

K. RIBNIKOV

---

# ANALISIS COMBINATORIO



## Análisis combinatorio

К.А.Рыбников

**ВВЕДЕНИЕ  
В КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ**

Издательство Московского университета

K. RÍBNIKOV

# Análisis combinatorio



Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por K.Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000610-9

© Издательство Московского университета, 1985  
© traducido al español, editorial Mir, 1988

# ÍNDICE

<b>Prólogo</b>	<b>6</b>
<b>Capítulo 1. Fundamentos teóricos del análisis combinatorio</b>	<b>7</b>
1.1. Qué se estudia en el análisis combinatorio y qué clase de problemas se resuelven	7
1.2. Conocimientos indispensables de la teoría de los conjuntos y del álgebra	9
1.3. Muestras y ordenaciones	17
1.4. Distribuciones y llenados	23
1.5. Sistemas de conjuntos	32
<b>Capítulo 2. Funciones generatrices</b>	<b>37</b>
2.1. Fundamentos del método de funciones generatrices	37
2.2. Tipos de funciones generatrices y de numeradores	40
2.3. Aparato operacional del método de funciones generatrices	52
2.4. Sobre las aplicaciones del método de funciones generatrices	62
2.5. Teoría de Redfield-Polya	66
<b>Capítulo 3. Métodos lógicos</b>	<b>74</b>
3.1. Método de inclusiones y exclusiones	74
3.2. Sistemas de representantes de los conjuntos	78
3.3. Principios de la teoría de Ramsey	83
<b>Capítulo 4. Aparato tabular de matriz del análisis combinatorio</b>	<b>87</b>
4.1. Sistemas de incidencia y matrices especiales	87
4.2. Rectángulos y cuadrados latinos	93
4.3. Bloque-esquemas	101
4.4. Permanentes	113
<b>Capítulo 5. Medios geométricos y gráficos</b>	<b>130</b>
5.1. Evidencia en las interpretaciones de los sistemas discretos	130
5.2. Ideas geométricas finitas	132
5.3. Sobre los grafos	144
<b>Capítulo 6. Métodos de resolución de los problemas extremales</b>	<b>159</b>
6.1. Planteamiento de los problemas combinatorios extremales y accesos a su resolución	159
6.2. Método de ramificaciones y restricciones <sup>1)</sup>	165
6.3. Métodos heurísticos	179
6.4. Optimización en los grafos	189
6.5. Flujos en las redes	192
<b>Capítulo 7. Métodos probabilísticos en el análisis combinatorio</b>	<b>206</b>
7.1. Ejemplos de aplicación de los métodos probabilísticos	206
7.2. Problemas de planificación del experimento	210
7.3. Método de entropía	214
7.4. Método de balance aleatorio	220
7.5. Sistemas separadores de subconjuntos	224
<b>Capítulo 8. Análisis combinatorio en los conjuntos parcialmente ordenados</b>	<b>232</b>
8.1. Conjuntos parcialmente ordenados	232
8.2. Retículos	263
8.3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius	248
8.4. Matroides	324
<b>Bibliografía</b>	<b>361</b>
<b>Índice alfabético de materias</b>	<b>367</b>

## PRÓLOGO

En el presente libro se examinan los métodos matemáticos de investigación de los sistemas discretos. Esta clase de sistemas ocupan un notable lugar en la actividad de la gente y existe una diversidad de tipos difícil de examinar (circuitos eléctricos, flujos de transporte e información, sistemas de organización de la producción, tablas, grafos, razonamientos lógicos, etc.).

Pese a que el carácter específico y heterogéneo de los sistemas discretos aparenta ser insuperable, éstos tienen en sus fundamentos mucho de común. Esto se manifiesta con toda evidencia en la semejanza e, incluso, en la coincidencia de los modelos matemáticos que se introducen al resolver problemas de carácter discreto.

Las amplias clases de los sistemas discretos se analizan en nuestro libro como partes de una teoría única. Dentro de los márgenes de dicha teoría (que históricamente conserva su nombre de análisis combinatorio) las clases citadas ocupan su lugar en dependencia de cómo se interpretan sus entes, qué problemas se estudian y cuáles son los métodos que se eligen para resolverlos. Tal exposición, como muestra la experiencia, facilita el estudio del análisis combinatorio y atribuye a esta parte de las matemáticas los rasgos necesarios de universalidad, tanto teórica como práctica.

Para que el lector obtenga una mejor orientación en la moderna teoría combinatoria general, el capítulo ocho del libro, escrito en colaboración con A.M.Reviakin, contiene material referente a la aplicación de problemas y métodos del análisis combinatorio a los conjuntos de naturaleza lo más amplia posible.

Resta por añadir que el autor expresa su más profundo agradecimiento a sus discípulos y colegas que prestaron una valiosa cooperación, y muy especialmente a A.M.Reviakin, quien ayudó activamente al autor en el proceso de preparación de la versión española del libro.

El autor quedará agradecido por las observaciones de los lectores.



# CAPÍTULO I      FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL ANÁLISIS COMBINATORIO

En este capítulo se dan explicaciones que tienen por fin permitir al lector la formación de nociones elementales sobre el análisis combinatorio (combinatoria). Se trata de los objetos que se estudian en el análisis combinatorio (considerado como una asignatura) y de los problemas que en este caso se plantean y se resuelven. Además, se introducen los conceptos principales, operaciones y simbolismo. Por fin, se explican los procedimientos aplicados en la resolución de los problemas combinatorios no complejos que se plantean tanto en la teoría como en la práctica.

## 1.1. QUÉ SE ESTUDIA EN EL ANÁLISIS COMBINATORIO Y QUÉ CLASE DE PROBLEMAS SE RESUELVEN

Enunciemos, para iniciar, unos cuantos problemas. Harémoslo para que el lector perciba intuitivamente el carácter combinatorio de dichos problemas y esté mejor preparado para poder asimilar las formulaciones generales.

a) Uno que ha terminado la enseñanza media y aspira a ingresar en la Universidad tiene que aprobar cuatro exámenes, siendo el sistema de calificación de cinco puntos. Para ingresar es suficiente obtener 17 puntos. ¿Cuántas son las combinaciones que le permiten aprobar los exámenes (por supuesto, sin sacar ni un solo mal)?

b) ¿Cómo se debe buscar el itinerario más corto para un cartero o un operador cinematográfico que atienden un número dado de poblados? La distancia entre cada par de poblados se conoce.

c) ¿Qué número de reinas o de otras piezas de ajedrez es suficiente para que ellas mantengan bajo amenaza todas las casillas del tablero de ajedrez y no se puedan comer una a la otra? ¿Cuántas son las combinaciones de su colocación?

d) ¿ En cuántas partes dividen un espacio  $n$  planos, si de cuatro cualquiera de ellos ninguno pasa por un mismo punto, de tres, ninguno pasa por una misma recta y de dos, ninguno es paralelo, mientras que cualesquiera tres planos tienen un punto común?

Los problemas de esta índole son semejantes por el hecho de que, en primer lugar, en ellos se estudian los conjuntos discretos (compuestos de elementos separados, aislados). En la mayoría de los casos los conjuntos mencionados son finitos. Tampoco se excluyen del análisis combinatorio los conjuntos infinitos, compuestos por un número infinitamente grande

de elementos, siempre que haya una información suficiente sobre las peculiaridades estructurales de estos últimos conjuntos. La estructura de los conjuntos discretos puede ser muy compleja en función de las relaciones y razones existentes entre ellos. La primera principal tarea del análisis combinatorio consiste en estudiar tales estructuras discretas y expresar sus propiedades empleando los métodos adoptados en las matemáticas (analíticos, gráficos, tabulares y geométricos).

Sobre los conjuntos discretos se realizan operaciones. Algunas de ellas originan el cambio de la estructura de los conjuntos, otras modifican la composición de éstos. Como operaciones más simples del primer tipo intervienen las permutaciones habituales de elementos, y del segundo tipo, la separación de los subconjuntos de elementos, o, como suele decirse, sus muestras. Como regla, al resolver los problemas, las operaciones se aplican más de una vez (reiteradamente) y, además, en las combinaciones más diversas, cuando vienen impuestas diferentes condiciones. Esto es una razón por la que se prestan posibilidades prácticamente inagotables de crear construcciones discretas, las cuales se denominan frecuentemente configuraciones (a veces, configuraciones combinatorias).

Según sean el carácter del objeto de investigación y las operaciones a introducir, se determina la totalidad específica de los problemas que se resuelven mediante el análisis combinatorio. Los más antiguos son problemas sobre el número de construcciones discretas que satisfacen las condiciones planteadas. Los métodos de su resolución han recibido el nombre de problemas enumerativos. Además de los problemas de tipo enumerativo, en el análisis combinatorio se estudian cuestiones de existencia o no existencia de una configuración que satisfaga las condiciones prefijadas, se buscan algoritmos de construcción de las configuraciones, como también las cuestiones de selección en una totalidad dada de tales configuraciones o algoritmos que posean, en un mayor o menor grado, las propiedades elegidas (problemas y métodos de optimización).

El análisis combinatorio está asociado con muchos apartados de las matemáticas e incluso tiene partes comunes correlacionadas. Efectivamente, los elementos de los razonamientos combinatorios surgieron en tiempos remotos, antiguamente, en la aurora de la formación de las ciencias matemáticas. No obstante, en el transcurso de la historia estos elementos se desarrollaban junto con otras partes de las matemáticas, integrando en diversos casos la composición de éstas. No es difícil ver que en una serie de ramas de las matemáticas modernas (teoría de los números, álgebra, geometría, lógica matemática y otras) muchos conceptos y métodos fundamentales tienen naturaleza discreta y poseen conexiones estables. Esto permite estudiar los problemas del análisis combinatorio en diferentes interpretaciones, investigar problemas, que a primera vista parecen tener diferente naturaleza, desde un punto de vista único que corresponda del modo más conveniente a la esencia del problema.

Hoy día las posibilidades de los métodos discretos de investigación aumentaron muy bruscamente. Ha crecido también la importancia de estos métodos. A la par con la teoría combinatoria general formada históricamente (análisis combinatorio) existen en las matemáticas modernas: la teoría de los grafos y de los hipergrafos, geometría de los números, análisis discreto y análisis finito, investigación de operaciones, etc. En los libros y artículos se consideran ciertas clases de problemas, lo que es testimonio de amplia ramificación y riqueza de las investigaciones combinatorias.

La tarea de este libro consiste en exponer el análisis combinatorio como una teoría matemática de investigaciones de los conjuntos discretos en sus diferentes interpretaciones, teniendo presente que dicha teoría está basada en principios únicos, es suficientemente rica en lo que se refiere a los métodos que se emplean y puede servir de base teórica general para los métodos discretos de investigación en las matemáticas.

## 1.2. CONOCIMIENTOS INDISPENSABLES DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS Y DEL ÁLGEBRA

La información que se incluye en este párrafo del libro se destina para describir las propiedades de los objetos que se estudian en el análisis combinatorio, las operaciones que se realizan sobre ellos y para introducir un simbolismo uniforme. Las definiciones, los términos y los símbolos se eligen, por regla, de los que son de uso general en las matemáticas. La introducción de ellos será paulatina.

El concepto principal es el de *conjunto*. No damos definición de este concepto debido a una tautología inevitable. Todos los conjuntos que se analizan en el libro (si no hay referencias a una precisión especial) son discretos y finitos. Los conjuntos se designarán mediante letras mayúsculas latinas  $A, B, \dots$ , y los *elementos de los conjuntos*, mediante letras minúsculas  $a, b, \dots$ . Escribiremos  $a \in A$ , si el elemento  $a$  pertenece al conjunto  $A$ , y  $a \notin A$ , si  $a$  no pertenece al conjunto  $A$ . Se denomina *subconjunto*  $A$  del conjunto  $S (A \subseteq S)$  cualquier conjunto cuyos elementos pertenecen todos a  $S$ . En otras palabras,  $A \subseteq S$ , si de  $a \in A$  se deduce que  $a \in S$ . Los conjuntos  $A$  y  $B$  *coinciden* o son *iguales* ( $A = B$ ), si están compuestos por unos mismos elementos. Dicho de otro modo,  $A = B$ , cuando y sólo cuando  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ . Si  $A \subseteq B$ , pero  $A \neq B$ , suele decirse que  $A$  es un subconjunto *propio* del conjunto  $B$ , y se escribe:  $A \subset B$ .

Los conjuntos, al igual que los subconjuntos, pueden introducirse y designarse mediante diferentes métodos. Por ejemplo, un subconjunto  $A$  del conjunto  $S$  se define frecuentemente como conjunto de todos los elementos  $a \in S$  que poseen cierta propiedad bien determinada. Si designamos esta propiedad mediante  $P(a)$ , la definición de  $A$  puede escribirse simbólicamente así:  $A = \{a \in S \mid P(a)\}$ , o bien (simplemente)  $A = \{a \mid P(a)\}$ . Estas inscripciones se leen del modo siguiente: " $A$  es un conjunto de todos los elementos

$a$  del conjunto  $S$ , para los cuales resulta válida la condición  $P(a)$ ". Por ejemplo, la inscripción  $A = \{a \mid a \in \mathbb{N} \text{ y } a = 2b \text{ para cierto } b \in \mathbb{N}\}$ , donde  $\mathbb{N}$  es un conjunto de números naturales, describe el conjunto de todos los números positivos pares.

Introduzcamos el símbolo  $\emptyset$  para designar con él un conjunto *vacío*, es decir, conjunto sin elementos. Es evidente que cualquier conjunto contiene en calidad de subconjunto un conjunto vacío. Por  $P(S)$  designaremos un conjunto de todos los subconjuntos del conjunto  $S$ , el cual contiene, en calidad de elementos, todos los subconjuntos propios  $A$  que satisfacen la condición  $\emptyset \subset A \subset S$ , como también el conjunto vacío  $\emptyset$  y el mismo conjunto  $S$ . Por ejemplo, si  $S = \{a, b, c\}$ , entonces  $P(S)$  contiene, además de  $\emptyset$  y  $S$ , seis subconjuntos propios  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{b, c\}$ . En general, si  $S$  se compone de  $n$  diferentes elementos, entonces  $P(S)$  contiene  $2^n$  diferentes subconjuntos. Por eso, en la literatura matemática  $P(S)$  se denota también con  $2^S$ .

Diremos que está dada la *aplicación*  $\varphi$  del conjunto  $A$  en el conjunto  $B$ , si a todo elemento del conjunto  $A$  se le ha puesto en correspondencia cierto elemento del conjunto  $B$ . Para designar la aplicación  $\varphi$  de  $A$  en  $B$ , haremos uso del símbolo  $\varphi: A \rightarrow B$ . Si  $a \in A$ , entonces el elemento de  $B$ , que se le ha puesto en correspondencia al elemento  $a$ , se designa mediante  $\varphi(a)$  y se denomina *imagen* del elemento  $a$  en la aplicación  $\varphi$ . Si  $b \in B$ , entonces cualquier elemento  $a$  de  $A$ , para el cual se verifica la igualdad  $b = \varphi(a)$ , se llama *preimagen* (imagen recíproca) del elemento  $b$ . El conjunto  $A$  lleva el nombre de *origen* de la aplicación  $\varphi$ , y el conjunto  $B$  es el *fin* de la aplicación citada. Por supuesto, cada elemento del origen de la aplicación  $\varphi$  tiene exactamente una sola imagen. No obstante, no todo elemento del fin de dicha aplicación tiene necesariamente una preimagen. Por otra parte, el fin de una aplicación puede contener elementos que cuentan con varias preimágenes. Un subconjunto del fin de la aplicación  $\varphi$  compuesto por todos los elementos suyos que tienen preimagen, o bien, lo que es lo mismo, que se representan en la forma  $\varphi(a)$  para cierto  $a \in A$ , se denomina *imagen de la aplicación*  $\varphi$  y se designa  $\text{Im } \varphi$ . Para un conjunto finito  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  se emplea con frecuencia la inscripción de la aplicación  $\varphi: A \rightarrow B$  en forma de dos filas, a saber

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \varphi(a_1) & \varphi(a_2) & \dots & \varphi(a_n) \end{pmatrix}.$$

Dos aplicaciones  $\varphi_1: A_1 \rightarrow B_1$ ;  $\varphi_2: A_2 \rightarrow B_2$  se consideran *iguales*, si  $A_1 = A_2$ ,  $B_1 = B_2$ , y  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$  para cualesquiera  $a \in A_1$ . La aplicación  $\varphi': A' \rightarrow B$  es una *contracción sobre*  $A'$  de la aplicación  $\varphi: A \rightarrow B$ , siempre que  $A' \subseteq A$  y  $\varphi'(a) = \varphi(a)$  para todo  $a \in A'$ .

La aplicación  $\varphi: A \rightarrow B$  lleva el nombre de *encaje* (inmersión), si cada elemento de  $B$  tiene no más de una preimagen, es decir,  $\varphi(a) = \varphi(b)$  lleva

conigo  $a = b$ . Si cada elemento de  $B$  tiene al menos una preimagen, o bien, con otras palabras,  $\text{Im}\varphi = B$ , la aplicación  $\varphi$  se denomina *superposición*. Una superposición  $\varphi : A \rightarrow B$  se llama también aplicación de  $A$  sobre  $B$ . Una aplicación que representa a la vez un encaje y una superposición se denomina *biunívoca* (biyectiva).

Si  $A = B$ , la aplicación biunívoca  $\varphi : A \rightarrow A$  se llama *sustitución*.

Los conjuntos pueden ser *finitos* (es decir, compuestos por un número finito de elementos) e *infinitos*. El número de elementos en un conjunto  $A$  recibe el nombre de *potencia* del conjunto  $A$  y se designa con  $|A|$ . Se dice que los conjuntos  $A$  y  $B$  son *equipotentes*, si existe una aplicación biunívoca  $\varphi : A \rightarrow B$ . Evidentemente, dos conjuntos finitos son equipotentes, cuando y sólo cuando contienen ambos un número igual de elementos. Denominaremos *n-conjunto* a todo conjunto finito  $A$  tal que  $|A| = n$ . Los conjuntos infinitos pueden ser equipotentes a alguno de sus subconjuntos; por ejemplo, el conjunto de los números naturales es equipotente al conjunto de los números positivos pares y al conjunto de sus cuadrados. Entre los conjuntos infinitos se distinguen los conjuntos numerables e innumerables. Se llama *numerable* todo conjunto infinito que sea equipotente con el conjunto de números naturales. En adelante, cuando se trate de conjuntos infinitos, éstos se considerarán numerables.

Definamos ciertas operaciones que se realizan en el conjunto  $P(S)$ .

Se llama *unión* (reunión o suma)  $A \cup B$  de los conjuntos  $A$  y  $B$  el conjunto de todos los elementos pertenecientes o bien a  $A$ , o bien a  $B$  (o bien a  $A$  y  $B$  simultáneamente):

$$A \cup B = \{a \in S \mid a \in A, \text{ o bien } a \in B\}.$$

Se llama *intersección* (o *producto*)  $A \cap B$  de los conjuntos  $A$  y  $B$  el conjunto de todos los elementos pertenecientes tanto a  $A$ , como a  $B$ :

$$A \cap B = \{a \in S \mid a \in A \text{ y } a \in B\}.$$

De un modo análogo se definen las uniones e intersecciones de un sistema arbitrario (incluido el infinito) de conjuntos.

Se llama *complemento* del conjunto  $A$  el conjunto

$$\bar{A} = \{a \in S \mid a \notin A\}.$$

Se llama *diferencia* de los conjuntos  $A$  y  $B$  el conjunto  $A \setminus B = \{a \in S \mid a \in A \text{ y } a \notin B\}$ . Es evidente que  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .

Se llama *diferencia simétrica* de los conjuntos  $A$  y  $B$  el conjunto

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

El conjunto  $P(S)$  con las operaciones de unión, intersección y de complemento definidas sobre él recibe el nombre de *booleano*. Quedan válidas en este caso las siguientes leyes algebraicas:

1.  $A \cap A = A$ ;  $A \cup A = A$  (idempotencia);
2.  $A \cap B = B \cap A$ ;  $A \cup B = B \cup A$  (conmutatividad);
3.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$  (asociatividad);
4.  $A \cap (A \cup B) = A$ ;  $A \cup (A \cap B) = A$  (absorción);
5. Si  $A \subseteq C$ , se tiene  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  (modularidad);
6.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (distributividad);
7.  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;  $A \cup \emptyset = A$ ;  
 $A \cap \overline{S} = \overline{A \cup S}$ ;  $A \cup \overline{S} = \overline{A \cap S}$  (fronteras universales);
8.  $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ;  $A \cup \overline{A} = S$  (complementariedad);
9.  $\overline{\overline{A}} = A$
10.  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (leyes de De Morgan).

Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A$  y  $B$  se llaman conjuntos *disjuntos*. La representación del conjunto  $S$  en forma de una unión de los subconjuntos disjuntos dos a dos recibe el nombre de *partición* del conjunto  $S$ . En otras palabras,  $A_1, A_2, \dots, A_k$  es una partición del conjunto  $S$ , si  $S = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , y  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para cualesquiera  $i \neq j$ . Una totalidad de todos los pares ordenados  $(a, b)$  tales que  $a \in A$ ,  $b \in B$ , se denomina producto *directo* (*cartesiano*) de los conjuntos  $A$  y  $B$  y se designa por  $A \times B$ , es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Si  $A = B$ , el producto directo  $A \times A$  se denota con  $A^2$ . Análogamente se determina el producto directo de  $k$  conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\},$$

y, al coincidir los conjuntos, tenemos:  $A^k = A \times A \times \dots \times A$ .

Enunciemos las reglas evidentes que yacen en la base de muchos cálculos y estimaciones combinatorios.

**Regla de la suma.** Si  $S$  es un conjunto finito y  $S = \bigcup_{i=1}^k A_i$ , donde  $A_i \in P(S)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , entonces

$$|S| = \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |A_i|,$$

con la particularidad de que la igualdad tiene lugar cuando  $A_1, A_2, \dots, A_k$  forman una partición del conjunto  $S$ .

**Regla del producto.** Para los conjuntos finitos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  tenemos

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Llamemos *correspondencia binaria* entre los conjuntos  $A$  y  $B$  cualquier subconjunto  $A \subseteq A \times B$ . Si  $(a, b) \in \alpha$ , suele decirse que  $a$  se encuentra en

Fig.1.1



relación  $\alpha$  respecto a  $b$ , y esto se expresa en la forma  $a\alpha b$ . La noción de correspondencia binaria entre  $A$  y  $B$  sirve de generalización del concepto de la aplicación  $\varphi : A \rightarrow B$ . En efecto, cada aplicación  $\varphi : A \rightarrow B$  define la correspondencia binaria  $\alpha_\varphi$  entre  $A$  y  $B$ : la expresión  $a\alpha_\varphi b$  significa que  $b = \varphi(a)$ . Viceversa, sea dada una correspondencia binaria  $\alpha$  entre los conjuntos  $A$  y  $B$ . Analicemos para todo  $a \in A$  el conjunto de todos los  $b \in B$  que se caracteriza por la propiedad  $a\alpha b$ . Dicha correspondencia define la aplicación  $\varphi : A \rightarrow B$ , cuando y sólo cuando para todo  $a \in A$  existe exactamente un solo elemento  $b \in B$  que se caracteriza por las propiedades  $a\alpha b$ . Así pues, la noción de correspondencia binaria incluye el concepto de aplicación como un caso particular (muy importante).

Cuando  $A = B$ , la correspondencia binaria  $\varrho \subseteq A \times A$  lleva el nombre de *relación binaria* en el conjunto  $A$ . Son ejemplos de relación binaria la relación de igualdad  $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ , llamada *diagonal* del conjunto  $A$ , y la relación que coincide con todo el conjunto  $A \times A$ , denominada *relación unidad*.

A una relación binaria  $\varrho$  sobre el conjunto finito  $A$  se le puede poner en correspondencia un ente geométrico llamado grafo orientado o diagrama. A todo elemento  $a \in A$  se le pone en correspondencia un punto en el plano que lleva el nombre de vértice. Si para  $a$  y  $b$  tenemos  $a\varrho b$ , los puntos marcados con  $a$  y  $b$  se unen por una flecha que parte de  $a$  y llega a  $b$  y que se denomina arco. La totalidad de vértices y arcos construidos del modo mencionado representan el diagrama  $\Gamma(A, \varrho)$  de la relación  $\varrho$ . En la fig. 1.1 se exponen los diagramas  $\Gamma(A, \Delta)$  y  $\Gamma(A, I)$ , respectivamente, donde  $A = \{a, b, c\}$ ,  $I = A \times A$ .

Sea  $A'$  un subconjunto no vacío del conjunto  $A$ , sobre el cual viene dada la relación binaria  $\varrho$ : de la relación  $\varrho'$  en  $A'$ , definida mediante la condición

$$a\varrho' b = a\varrho b \text{ para cualesquiera } a, b \in A',$$

se dice que ella está *inducida* mediante la relación  $\varrho$ .

Formulemos las propiedades que pueden tener las relaciones binarias. Una relación  $\varrho$  se denomina *reflexiva*, si  $a\varrho a$  para todo  $a \in A$ . Dicho de otro modo, una relación es reflexiva, siempre que  $\Delta \subseteq \varrho$ . Si la expresión  $a\varrho b$  lleva consigo  $b\varrho a$ , la relación  $\varrho$  se llama *simétrica*. En cambio, si  $a\varrho b$  y  $b\varrho a$  tienen por resultado  $a = b$ , la relación  $\varrho$  se llama *antisimétrica*. Una relación  $\varrho$  se llama *transitiva*, si  $a\varrho b$  y  $b\varrho c$  conducen a  $a\varrho c$ . No es difícil

convencerse de que la diagonal posee todas las cuatro propiedades citadas, mientras que la relación unidad tiene todas estas propiedades, a excepción de la antisimetría. Pero, si  $A$  se compone sólo de un elemento, la relación unidad coincide con la diagonal.

Se denomina *clase contigua* de la relación binaria  $\rho$ , definida por un elemento  $a \in A$ , el conjunto de todos los elementos  $b \in A$  tales que  $b\rho a$ .

La relación binaria  $\rho$  en el conjunto  $A$  se llama relación de equivalencia, si es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez. Las relaciones de equivalencia son de gran importancia en el análisis combinatorio, puesto que están estrechamente ligadas con las particiones de los conjuntos. Efectivamente, puede demostrarse con facilidad que una totalidad de clases contiguas de relaciones de equivalencia sobre un conjunto  $S$  representa la partición de este último y que a toda partición del conjunto  $S$  le corresponde la relación de equivalencia  $\rho$ , cuyas clases coinciden con los bloques de la partición indicada (la afirmación  $a\rho b$  tiene lugar, si y sólo si  $a$  y  $b$  pertenecen a un mismo subconjunto de la partición del conjunto  $S$ ).

Una relación binaria  $\rho$  sobre el conjunto  $A$  se denomina relación de orden parcial, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La relación de orden parcial se denotará con el símbolo  $\leq$ . La notación  $a \geq b$  significa que  $b \leq a$ . A veces diremos que  $A$  (o bien  $(A, \leq)$ ) es un conjunto parcialmente ordenado, suponiendo que la relación de orden parcial ya es conocida (esta afirmación, sin embargo, no es bien correcta, por cuanto en un solo conjunto pueden fijarse órdenes diferentes).

Un conjunto parcialmente ordenado se denomina *trivial*, siempre que  $a \leq b$ , cuando y sólo cuando  $a = b$ . Un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$ , que posee la propiedad de que para cualesquiera  $a, b \in A$  se verifica o bien  $a \leq b$ , o bien  $b \leq a$ , lleva el nombre de *cadena* (lo llaman también conjunto *linealmente ordenado*).

Recordemos, además, algunos conceptos algebraicos que nos harán falta ulteriormente. Se denomina *operación binaria* sobre el conjunto  $A$  la aplicación  $f: A \times A \rightarrow A$ . Si  $f(a, b) = c$ , donde  $a, b, c \in A$ , se escribe  $a * b = c$ . Una operación binaria se llama *asociativa*, si para cualesquiera  $a, b, c \in A$ :

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Si una operación binaria satisface la condición

$$a * b = b * a$$

para cualesquiera  $a, b \in A$ , se denomina *conmutativa*. El elemento  $e \in A$  se denomina elemento *unidad* (elemento *neutro*) respecto de la operación  $*$ , si para todo  $a \in A$ :

$$a * e = e * a = a.$$

Si tal elemento existe, es único. Supongamos que un conjunto  $A$  con operación prefijada posee un elemento unidad  $e$ . En este caso el elemento  $a^{-1}$



se denomina *inverso* (o *simétrico*) del elemento  $a \in A$  con relación a dicha operación, siempre que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ . El conjunto  $A$  con operación binaria  $*$ , en el cual las ecuaciones  $a * x = b$ , e  $y * a = b$  son resolubles unívocamente respecto de  $x$  e  $y$  para cualesquiera  $a, b \in A$  se llama *casi grupo*. Un conjunto no vacío  $A$ , sobre el cual viene definida la operación binaria asociativa, recibe el nombre de *semigrupo*. Si la operación es conmutativa, el semigrupo se llama *abeliano*. Un semigrupo, en el que existe un elemento unidad y para cada elemento existe uno inverso, se denomina *grupo*. El número de elementos en el grupo se llama *orden* del grupo. Un grupo cuyos elementos son todos la potencia de un elemento  $a$  (es decir, pueden obtenerse por la aplicación sucesiva de la operación, empleando un mismo elemento  $a$  distinto del elemento neutro) se llama *cíclico*. Los grupos cíclicos son siempre abelianos.

Sean  $A$  y  $B$  los grupos finitos de órdenes arbitrarios con las operaciones binarias  $*$  y  $\circ$ , respectivamente, y supongamos que  $\varphi: A \rightarrow B$  es una aplicación, con la cual para cualesquiera  $a, a' \in A$  se verifica la igualdad

$$\varphi(a * a') = \varphi(a) \circ \varphi(a'),$$

Tal aplicación  $\varphi$  se llama *homomorfismo* del grupo  $A$  en el grupo  $B$ . Si  $\varphi$  es una aplicación biunívoca, el homomorfismo recibe el nombre de *isomorfismo*.

**Ejemplo.** Un conjunto de sustituciones  $\varphi: X \rightarrow X$  forma un grupo, si la operación  $*$  se define como resultado de la actuación sucesiva de dos sustituciones, es decir  $\varphi * \psi = \pi$ , donde  $\forall x \in X: \pi(x) = \psi(\varphi(x))$ . Dicho grupo lleva el nombre de *grupo simétrico de potencia  $n = |X|$* . Es fácil mostrar que todos los grupos simétricos de un mismo orden son isomorfos. Observemos que los grupos simétricos no son abelianos cuando  $n \geq 3$ .

Si en un subconjunto  $B \subseteq A$  el resultado de una operación de dos cualesquiera elementos de  $B$  pertenece también a  $B$ , suele decirse que  $B$  está *cerrado* respecto de la operación dada. Se llama *subgrupo* a un subconjunto no vacío del grupo que está cerrado respecto de la operación binaria y que para cada elemento contiene un elemento inverso.

Un conjunto  $A$  con dos operaciones binarias  $+ y \circ$  se denomina *anillo*, siempre que forma un grupo abeliano respecto de la operación  $+$ , un semigrupo respecto de la operación  $\circ$ , y si  $\circ$  es distributiva respecto de la operación  $+$ , es decir, si para cualesquiera  $a, b, c \in A$  se tiene

$$\begin{aligned}(a + b) \circ c &= a \circ c + b \circ c, \\ c \circ (a + b) &= c \circ a + c \circ b.\end{aligned}$$

En un anillo los elementos neutros respecto de las operaciones  $+$  y  $\circ$  se denominan *nulo* y *unidad*, respectivamente. Un elemento del anillo se llama *invertible*, si para dicho elemento existe un elemento inverso respecto de la operación  $\circ$ .

Si un conjunto de elementos de un anillo, distintos de cero, forma res-

pecto de la operación  $\circ$  un grupo abeliano, entonces el anillo se llama en este caso *campo*. Un campo en el que se contienen un número finito de elementos se llama *finito*. Un campo finito de  $n$  elementos existe, cuando y sólo cuando  $n = p^\alpha$ , donde  $p$  es un número primo y  $\alpha$ , un número natural. Tal campo es único con exactitud hasta un isomorfismo en el que se conservan ambas operaciones binarias. Este campo se denomina *de Galois* y se designa, de ordinario, con la expresión  $GF(p^\alpha)$ . Si  $\alpha = 1$ ,  $GF(p)$  es isomorfo al campo de residuos respecto al módulo primo (o irreducible)  $p$ .

Como ejemplos de un anillo infinito y de un campo infinito sirven el anillo de números enteros  $\mathbf{Z}$  y el campo de números reales  $\mathbf{R}$ . Las operaciones binarias son aquí operaciones corrientes de adición y multiplicación.

Se denomina *espacio lineal*  $L$  sobre el campo  $P$  el conjunto dotado de la operación binaria  $\varphi: L \times L \rightarrow L$ , la cual se designa habitualmente como adición  $\varphi(a, b) = a + b$  para  $a, b \in L$ , y de la operación binaria externa  $f: P \times L \rightarrow L$ , la cual se designa habitualmente como multiplicación  $f(p, a) = pa$ , con la particularidad de que dichas operaciones satisfacen los siguientes axiomas:

a) con respecto a la operación de adición el espacio  $L$  es un grupo abeliano. El elemento neutro de este grupo se denota con  $0$ ; el elemento inverso de  $a$  se designa corrientemente con  $-a$ :

b) la multiplicación de los vectores por los elementos del campo  $P$ , o por los escalares, es unitaria, es decir,  $1 \cdot a = a$  para todos los  $a$ , y asociativa, es decir,  $p(qa) = (pq)a$  para cualesquiera  $p, q \in P$ ;  $a \in L$ :

c) la adición y la multiplicación están unidas mediante las leyes de distributividad, es decir,

$$p(a + b) = pa + pb,$$

$$(p + q)a = pa + qa$$

para cualesquiera  $p, q \in P$ ;  $a, b \in L$ .

La expresión del tipo  $p_1 a_1 + \dots + p_n a_n$  lleva el nombre de *combinación lineal* de los vectores  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; los escalares  $p_i$  se llaman *coeficientes* de dicha combinación lineal.

Se denomina *álgebra* sobre el campo  $P$  el anillo asociativo con la unidad  $A$  que contiene el campo  $P$  y es tal que  $P$  yace en el centro de  $A$ , es decir, que conmuta con todos los elementos de  $A$ . En particular,  $A$  es un espacio lineal sobre el campo  $P$ .

Los conceptos nuevos se introducirán más adelante a medida que surja la necesidad. Paseinos, ahora, a la explicación del sentido de las operaciones combinatorias más simples. Nos limitaremos, para empezar, al análisis de los conjuntos linealmente ordenados. Sin embargo, estudiaremos también, en forma paulatina, los conjuntos de estructura más compleja.

### 1.3. MUESTRAS Y ORDENACIONES

Con el concepto de *muestra* se asocian tanto la propia operación de selección de un subconjunto del conjunto dado, como también el resultado de la operación citada, es decir, el subconjunto elegido. En lo sucesivo se tendrá en cuenta precisamente la segunda interpretación, siempre que no se diga lo contrario.

Supongamos que de un  $n$ -conjunto  $A_n$  se ha obtenido una  $r$ -muestra:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r), \text{ donde } a_i \in A_n; i = 1, 2, \dots, r; r \leq n.$$

El número  $r$  se llama *volumen* de la muestra.

Según sean las condiciones del problema, en las muestras puede tomarse en consideración el orden de sucesión de los elementos en ellas (y en este caso las  $r$ -muestras se llaman *r-permutaciones*), o bien dicho orden no se toma en consideración (en este último caso se denominan *r-combinaciones*). Por ejemplo, dos 5-muestras del conjunto  $A_n (n \geq 5)$ :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \text{ y } (a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$$

representan en sí 5-combinaciones iguales y al mismo tiempo 5-permutaciones diferentes. En general, dos  $r$ -permutaciones  $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  y  $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  son iguales:  $a = b$  únicamente si  $a_i = b_i; i = 1, 2, \dots, r$ . En las muestras es posible la aparición reiterada de los elementos, y en tal caso ellas se denominan *r-combinaciones con repetición* y *r-permutaciones con repetición*, respectivamente. Una  $r$ -permutación (con repetición) de elementos del conjunto  $A$  se llama también *palabra de longitud  $r$  sobre el alfabeto  $A$* .

Es evidente que los conceptos de  $r$ -permutaciones y  $r$ -combinaciones, al igual que sus combinaciones, abarcan todos los tipos posibles de muestras. Por eso no hay necesidad de dar el concepto de arreglo (variación), aunque dicho concepto aparece todavía en la literatura, principalmente en los manuales.

La multiformidad de la solución de los problemas combinatorios observada en las etapas iniciales del desarrollo de las matemáticas condujo a una cuestión natural: ¿cuántos son los procedimientos, por medio de los cuales puede realizarse la requerida disposición combinatoria? En particular, el cálculo del número de  $r$ -muestras de un  $n$ -conjunto fue históricamente uno de los primeros problemas de la combinatoria.

Hallemos el número de todas las  $r$ -permutaciones posibles (sin repetición) de un  $n$ -conjunto. Denotemos el número que se busca mediante  $P(n, r)$ . El problema se reduce a una aplicación sucesiva de la regla del producto. En efecto, en el  $n$ -conjunto se tienen  $n$  posibilidades para elegir el primer elemento de la  $r$ -permutación. Una vez realizada tal elección, quedan  $n - 1$  posibilidades para la elección del segundo elemento, luego quedan  $n - 2$  posibilidades para elegir el tercer elemento, etc.: para la elección del  $r$ -ésimo

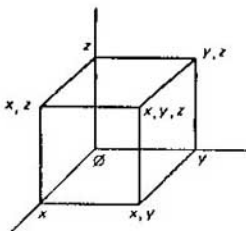


Fig 1.2.

elemento tendremos  $n - r + 1$  posibilidades. De acuerdo con la regla del producto,

$$P(n, r) = n(n - 1) \dots (n - r + 1),$$

de donde se deduce

$$P(n, n) = n!$$

Para que el resultado sea más completo, admitamos

$$P(n, 0) = 0! = 1.$$

Calculemos ahora el número de  $r$ -permutaciones posibles con repetición. En este caso, después de elegir cualquier elemento de la  $r$ -permutación quedan las mismas  $n$  posibilidades para elegir el elemento siguiente. Por consiguiente, según la regla del producto, el número de  $r$ -permutaciones con repetición del  $n$ -conjunto es igual a  $n^r$ .

Los razonamientos aducidos aquí se ilustran fácilmente con un ejemplo del esquema de urna, cuyos diferentes tipos se emplean en la teoría de las probabilidades: se tiene una urna dentro de la cual se encuentran colocadas  $n$  bolas iguales y de la cual se sacan por turno  $r$  bolas. En tal caso resultan posibles dos casos: la bola sacada o bien se retorna a la urna (elección con retorno) o bien no se retorna (elección sin retorno).

Un ejemplo más. ¿Cuántos subconjuntos tiene un  $n$ -conjunto  $S$ , es decir, a qué es igual  $|P(S)|$ ? La respuesta será  $|P(S)| = 2^n$ . Efectivamente, cualquier  $r$ -muestra  $R = (s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_r})$ , donde  $r = 1, 2, \dots, n$ , figura en  $P(S)$ . A esta  $r$ -muestra se le puede poner en correspondencia una  $n$ -muestra, compuesta por elementos de dos tipos: ceros, si el elemento no integra la  $r$ -muestra  $R$ , y unidades, si el elemento figura en  $R$ . De este modo, las unidades deben disponerse en los lugares correspondientes a  $i_1, i_2, \dots, i_r$ , mientras que los ceros, en los demás lugares. Pero, el número de tales  $n$ -muestras (es decir, de  $n$ -permutaciones con repetición) de 2-conjunto  $\{0, 1\}$  es igual a  $2^n$ , lo que constituye precisamente el resultado buscado. Este mismo problema puede interpretarse como el problema sobre el número de vértices de un hipercubo en el espacio de  $n$  dimensiones (el caso de  $n = 3$ ,  $S = \{x, y, z\}$  se muestra en la fig. 1.2, donde todos los subconjuntos  $P(S)$  son vértices del cubo).

**Ejercicio.** ¿Cuál es el número de matrices de dimensión  $k \times l$ , compuestas por ceros y unidades?

Calculemos ahora el número de  $r$ -combinaciones, designándolo con  $\binom{n}{r}$  o con  $C_n^r$ . Comencemos por el caso en que todos los elementos en las  $r$ -combinaciones son diferentes. Es fácil ver que el número de  $r$ -combinaciones del  $n$ -conjunto es  $r!$  veces inferior al número de  $r$ -permutaciones de los elementos del mismo conjunto. Por consiguiente,

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!};$$

de aquí se deduce que  $\binom{n}{r} = \binom{n-r}{r}$ ; en particular,

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

Observemos que las  $r$ -combinaciones del  $n$ -conjunto son sus  $r$ -subconjuntos. Con este motivo estudiemos el problema sobre el número de  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -particiones del  $n$ -conjunto  $S$ , es decir, de particiones ordenadas del tipo  $S = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$ , en las cuales  $T_i \cap T_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, k$ , con la particularidad de que  $T_i$  es un  $r_i$ -subconjunto del conjunto  $S$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Obviamente,  $\sum_{i=1}^k r_i = n$ . Razonemos igual que lo

hemos hecho al buscar el número  $P(n, r)$ . Para elegir el  $r_1$ -subconjunto  $T_1$  de  $S$  se tienen  $\binom{n}{r_1}$  posibilidades: entonces el  $r_2$ -subconjunto  $T_2$  puede elegirse sólo de  $n - r_1$  elementos restantes (ya que  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ ), y, por lo tanto, se tienen  $\binom{n-r_1}{r_2}$  métodos para la elección de  $T_2$ , etc.; el  $r_k$ -subconjunto  $T_k$  puede ser elegido sólo después de haber elegido los  $r_i$ -conjuntos  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , por consiguiente de  $n - \sum_{i=1}^{k-1} r_i$  elementos restantes

puede elegirse, sirviéndose de  $\binom{n - \sum_{i=1}^{k-1} r_i}{r_k}$  métodos. Aplicando ahora

la regla del producto, obtendremos que el número buscado de  $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -particiones del  $n$ -conjunto  $S$  es igual a

$$R = \binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n - \sum_{i=1}^{k-1} r_i}{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!},$$

(tomando en consideración la expresión para  $\binom{n}{r}$ ). La  $r$ -combinación

del  $n$ -conjunto puede ser interpretada como una  $(r, n - r)$ -partición, y la  $(1, 1, \dots, 1)$ -partición representa simplemente una permutación. Calculemos, por fin, el número de  $r$ -combinaciones con repetición del  $n$ -conjunto  $S$ . Daremos a conocer tres métodos distintos de obtención de este número con el objeto de mostrar los rasgos específicos de los razonamientos combinatorios.

**1<sup>er</sup> método.** Admitamos que los elementos del conjunto  $S$  están numerados por medio de los números  $1, 2, \dots, n$  (es decir,  $S$  se encuentra en una correspondencia biunívoca con el conjunto de los primeros  $n$  números naturales). Entonces, en lugar de las  $r$ -muestras del conjunto  $S$  podemos analizar las  $r$ -muestras (biunívocas) del conjunto  $S' = \{1, 2, \dots, n\}$  que corresponden a las primeras. Toda  $r$ -muestra del conjunto  $S'$  puede ser escrita en la forma  $A = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ , donde  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$  (la igualdad de los números responde al caso de elementos iguales en la  $r$ -muestra correspondiente de  $S$ ). A la  $r$ -muestra  $A$  (los elementos en esta muestra no son forzosamente diferentes) le ponemos en correspondencia el  $r$ -conjunto  $A' = \{a_1 + 0, a_2 + 1, \dots, a_r + r - 1\}$ , en el cual todos los elementos son, evidentemente, diferentes.

Como es fácil de ver, dicha correspondencia es biunívoca, con la particularidad de que los  $r$ -conjuntos  $A'$  son  $r$ -combinaciones sin repetición del  $(n + r - 1)$ -conjunto  $\{1, 2, \dots, n, n + 1, \dots, n + r - 1\}$ , cuyo número es igual (como quedó demostrado) a  $\binom{n + r - 1}{r}$ . Esta es precisamente la respuesta que buscábamos.

El 2<sup>o</sup> método consiste en la obtención de una fórmula recurrente<sup>1)</sup>.

Denotemos mediante  $f(n, r)$  el número de  $r$ -combinaciones con repeticiones del  $n$ -conjunto  $S$ . Está claro que

$$f(n, 1) = n \quad \text{y} \quad f(1, r) = 1.$$

(para cualquier  $n > 0$  entero de  $n$  elementos pueden elegirse  $n$  diferentes 1-combinaciones, es decir,  $n$  diferentes elementos; mientras tanto para cualquier  $r > 0$  entero de un elemento se puede obtener solamente una  $r$ -combinación: una  $r$ -muestra compuesta por  $r$  elementos iguales). Fijemos en  $S$  cierto elemento, entonces cada  $r$ -combinación o bien contiene este elemento o no lo contiene. Si tiene lugar el primer caso, los demás  $r - 1$  elementos de esta  $r$ -combinación (y, por tanto, las  $r$ -combinaciones que contienen el elemento fijado) pueden ser elegidos empleando los  $f(n, r - 1)$  métodos. Si tiene lugar el segundo caso, la  $r$ -combinación se elige de  $n - 1$  elementos, y entonces, el número de tales  $r$ -combinaciones es igual a  $f(n - 1, r)$ . Empleando la regla de la suma, obtendremos

<sup>1)</sup> Se denominan fórmulas (relaciones) recurrentes aquellas que permiten calcular los valores de una magnitud buscada paso a paso, partiendo de los valores «iniciales» conocidos y de los calculados de antemano.

$$f(n, r) = f(n, r - 1) + f(n - 1, r). \quad (1)$$

En particular, al conocer  $f(n, 1)$  y  $f(1, r)$ , tenemos

$$f(n, 0) = f(n, 1) - f(n - 1, 1) = 1,$$

lo que concuerda con el resultado obtenido anteriormente. Ahora obtenemos sucesivamente

$$f(n, 2) = f(n, 1) + f(n - 1, 2) = f(n, 1) + f(n - 1, 1) + f(n - 2, 2) = \dots$$

$$\dots = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} = \binom{n + 1}{2};$$

$$\begin{aligned} f(n, 3) &= f(n, 2) + f(n - 1, 2) + \dots + f(1, 3) = \\ &= \binom{n + 1}{2} + \binom{n}{2} + \dots + 1 = \binom{n + 2}{3} \end{aligned}$$

etc. Es fácil convencerse de que

$$f(n, r) = \binom{n + r - 1}{r}$$

satisface la correlación (1) y las condiciones iniciales:

$$f(n, 1) = n; f(1, r) = 1.$$

**3<sup>er</sup> método.** A una  $r$ -combinación con repetición del  $n$ -conjunto  $S$  (por ejemplo, a  $bcb$  de  $S = \{a, b, c, d, e\}$ ) agreguemos todos los  $n$  elementos del conjunto  $S$ , y escribamos por orden los  $n + r$  elementos obtenidos, disponiendo juntos los elementos iguales: ( $abbccde$ ). A continuación, dividamos los subconjuntos de elementos iguales mediante  $n - 1$  rayas: ( $a | bb - b | cc | d | e$ ). Por fin, sustituyamos por puntos todos los elementos dispuestos entre las rayas: ( $. | \dots | .. | . | .$ ). De este modo, a la  $r$ -combinación se le asigna (equipara) la colocación de  $n - 1$  rayas en  $n + r - 1$  intervalos entre  $n + r$  puntos. Inversamente en cada colocación de esta índole se restaura inóvamente la  $r$ -combinación que le corresponde. Por ejemplo,

$$(. | . | .. | . | .) \rightarrow (aa | b | cc | d | ee) \rightarrow (aabccdee) \rightarrow \{a, c, e\}.$$

Existen en total  $\binom{n + r - 1}{n - 1} = \binom{n + r - 1}{r}$  métodos de colocar  $n - 1$  rayas en  $n + r - 1$  lugares. Por consecuencia, existe exactamente la misma cantidad de  $r$ -combinaciones con repetición del  $n$ -conjunto.

Como conclusión de este párrafo, analicemos un concepto relacionado con la operación de ordenación, es decir, la permutación. Esta última puede ser examinada desde dos puntos de vista: a) como una totalidad ordenada de elementos del conjunto dado, o bien b) como una perturbación del orden estándar llamado, habitualmente, natural (por ejemplo, alfabético, numérico). El caso a) conduce a las  $r$ -permutaciones,  $r \leq n$ , ya descritas anteriormente. El caso b) conduce a las  $n$ -permutaciones (en relación con la defini-

ción de la  $r$ -permutación) denominadas simplemente permutaciones (o sustituciones), que se estudian en la teoría de los grupos.

Sea, por ejemplo una permutación

$$P = (4, 3, 7, 5, 6, 9, 2, 8, 1, 12, 11, 10),$$

que representa una perturbación del orden natural de los primeros 12 números de la serie natural. Puede ser escrita en forma de una sustitución (en la primera fila se pone el orden natural y en la segunda, el perturbado).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 9 & 2 & 8 & 1 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Esta notación muestra que, al realizarse la permutación  $P$ , el elemento 1 se convierte en 4, el elemento 2 en 3, el 3 en 7, etc. La permutación  $P$  puede escribirse también de otro modo:

$$P = (1, 4, 5, 6, 9)(2, 3, 7)(10, 12)(8)(11), \quad (2)$$

donde cada paréntesis es una permutación que actúa sólo contra los elementos encerrados dentro del paréntesis dado y no toca los elementos no encerrados en él (por ejemplo, la sustitución  $(2, 3, 7)$  convierte 2 en 3, 3 en 7, y 7, de nuevo en 2). La representación de una permutación en la forma (2) lleva el nombre de descomposición *en ciclos*. Cualquier permutación puede ser descompuesta en ciclos. Esta descomposición es única, con una exactitud de hasta las permutaciones cíclicas de los elementos dentro de los ciclos. Por ejemplo,  $(2, 3, 7)$ ,  $(3, 7, 2)$   $(7, 2, 3)$  son notaciones diferentes de un mismo ciclo.

Supongamos que una permutación contiene  $k_1$  ciclos compuestos por un solo elemento, es decir, 1-ciclos, luego  $k_2$  2-ciclos,  $k_3$  3-ciclos, etc. En este caso se denomina  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ -permutación, o bien permutación de la forma

$$1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}, \quad (3)$$

donde, evidentemente,

$$\sum_{i=1}^n i k_i = n.$$

**Teorema.** El número de permutaciones del tipo (3) es igual a

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!}. \quad (4)$$

*Demostración.* Examinemos la notación de una descomposición en ciclos para la permutación del tipo (3), a saber: primero  $k_1$  paréntesis para la notación de los ciclos de longitud 1, luego  $k_2$  paréntesis para la notación de los ciclos de longitud 2, etc. En  $n$  posiciones dispuestas dentro de todos los paréntesis podemos poner  $n$  elementos, sirviéndonos de  $n!$  métodos, y cada vez obtendremos la notación de la permutación del tipo (3). Sin em-



bargo, entre dichas  $n!$  notaciones se encuentran diferentes notaciones de una misma permutación. Aclaremos cuántas notaciones diferentes tiene una permutación. En primer lugar como hemos observado anteriormente, cada ciclo de longitud  $i$  puede escribirse dentro de los márgenes del paréntesis dado mediante  $i$  métodos. En segundo lugar, sirviéndose de  $k_i$  métodos se pueden reordenar los paréntesis donde están escritos los ciclos de longitud  $i$ . Según la regla del producto obtenemos, que una familia de ciclos de longitud  $i$  puede ser representada por  $i^{k_i} \cdot k_i!$  métodos. Al hacer  $i$  recorrer los valores de 1 a  $n$ , y al aplicar otra vez la regla del producto, concluimos que existen

$$N = 1^{k_1} k_1! 2^{k_2} k_2! \dots n^{k_n} k_n!$$

métodos para escribir cada permutación del tipo (3). Por consiguiente, se tienen en total  $n!/N$  de tales permutaciones, lo que era necesario demostrar.

La representación de las permutaciones en forma de un producto de ciclos sirve de fuente para muchos problemas combinatorios, por ejemplo: hallar el número de permutaciones del  $n$ -conjunto que tengan un número prefijado de ciclos (sin tomar en consideración la longitud de los ciclos); que dejen los elementos dados inmóviles; que tengan un número dado de ciclos de longitud prefijada, etc.

#### 1.4. DISTRIBUCIONES Y LLENADOS

En muchos problemas cierta totalidad de elementos (por ejemplo de granos, pernos, tuercas, etc.) se distribuye por cierto conjunto de células (cajas, cajones, etc.) que, como consecuencia, se llenan. Ambos conceptos principales, esto es, distribución (su sinónimo es la partición) y llenado, se emplean tanto para designar las operaciones, como para expresar el resultado de ellas, es decir, la situación obtenida.

Los problemas de esta clase existen desde hace mucho tiempo y cuentan con un procedimiento de resolución elaborado. El interés hacia estos problemas no se extingue, pues tienen gran importancia práctica. Ellos se manifiestan en los más diversos planteamientos: particiones de conjuntos, cortes de grafos y de redes, agrupaciones de tornos y de mecanismos automáticos y robots, etc.

En el aspecto teórico dichos problemas pueden interpretarse como aplicaciones de un conjunto (de elementos) sobre otro conjunto (de células). Pueden ser tratados también como elección de muestras.

Los medios adoptados de resolución de esta clase de problemas dependen de las condiciones impuestas sobre los tipos de elementos a distribuir, métodos de distribución y capacidad de las células. Es evidente, que la riqueza de las condiciones posibles determina la diversidad de los procedimientos aplicados para la resolución de los problemas. Más abajo se da cierta información que introduce al lector en esta esfera de problemas.

Para el cálculo del número de distribuciones hace falta precisar si los ele-

mentos del conjunto dado y las células son distinguibles (por ejemplo, numerados) o no. De acuerdo con ello los problemas se dividen en las siguientes cuatro clases.

(A) los elementos del conjunto son distinguibles, como también lo son las células;

(B) los elementos del conjunto no son distinguibles, las células, son distinguibles;

(C) los elementos del conjunto son distinguibles, las células no son distinguibles;

(D) tanto los elementos del conjunto, como las células no se distinguen entre sí.

Dentro de cada una de estas clases los problemas se diferencian, a su vez, por la forma de las aplicaciones prefijadas por las condiciones concretas. Convengamos en que a continuación  $N$  siempre servirá de designación para un  $n$ -conjunto de elementos, y  $R$  será un  $r$ -conjunto de células. Por cuanto en este párrafo hablamos sólo de los fundamentos teóricos de la operación de distribución y llenado, estudiemos estas clases de problemas en rasgos generales, sin tratar de exponer completa y detalladamente todos los accesos a la resolución de los problemas correspondientes.

(A) Según lo dicho anteriormente, todos los elementos del conjunto  $N$  y todas las células del conjunto  $R$  son distinguibles. Aquí no tiene importancia si se diferencian por la forma, el color, volumen o, incluso, por el número. Tiene importancia sólo el hecho de distinción. He aquí algunas formas equivalentes de este problema: a) formación de las palabras de longitud  $r$ , a partir del alfabeto compuesto por  $n$  letras; b) extracción sucesiva de  $r$  bolas de una urna que contiene  $n$  bolas, con su retorno inmediato; c) formación de las  $r$ -permutaciones con repetición de  $n$  símbolos.

El carácter de la aplicación que por ahora está libre de limitaciones algunas, permite indicar en seguida el número de distribuciones posibles:

$$P = n^r,$$

por cuanto para cada una de  $r$  células se tiene la posibilidad de colocar en ella cualquiera de  $n$  elementos. La forma particular de las aplicaciones (biunívocas) corresponde a una limitación adicional: en cada célula cabe uno, y sólo un elemento. En este caso

$$P = n(n-1) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

A la clase (A) pertenecen, en particular, los siguientes casos de distinción de los elementos y de las células.

(A<sub>1</sub>) El conjunto  $N$  tiene la  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ -especificación, si cuenta con  $k_1$  elementos del primer tipo (por ejemplo, de color),  $k_2$  elementos del segundo tipo, ...,  $k_m$  elementos del  $m$ -ésimo tipo (además,  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ).

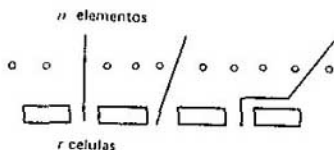


Fig.1.3.

(A<sub>2</sub>) El  $r$ -conjunto  $R$  tiene la  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ -especificación, si en la  $i$ -ésima célula se disponen  $n_i$  elementos,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

(A<sub>3</sub>) Los elementos dentro de las células están ordenados, es decir, dos células se consideran llenas de una manera diferente, si es distinta la ordenación de los elementos (incluso de los mismos) alojados en ellas; no hay limitaciones para el volumen de las células.

Sin pretender dar una descripción completa de todas las situaciones posibles, aduzcamos un solo ejemplo. Supongamos, por ejemplo, que el conjunto  $N$  tiene una  $(p, q)$ -especificación, es decir, contiene  $p$  elementos del primer tipo y  $q$  elementos del segundo tipo;  $p + q = n$ . Se necesita determinar cuántas son las distribuciones de los elementos del conjunto  $N$  en  $r$  células diferentes sin limitaciones para el número de elementos en cada una de las células. Los elementos del primer tipo pueden distribuirse en  $r$  células por

$$\binom{p+r-1}{r-1} = \binom{p+r-1}{p}$$

métodos, y los elementos del segundo tipo, por

$$\binom{q+r-1}{r-1} = \binom{q+r-1}{q}$$

métodos. El número total de distribuciones es igual, en virtud de la regla del producto, a

$$\binom{p+r-1}{p} = \binom{q+r-1}{q}.$$

Si tiene lugar la  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ -especificación del conjunto  $N$ , el número de distribuciones de  $n$  elementos suyos en  $r$  células diferentes será

$$\prod_{i=1}^m \binom{r+k_i-1}{i}.$$

Pasemos a los problemas de la clase (B). Como se ha dicho, en los problemas de este tipo los elementos del conjunto  $N$  no son distinguibles y los del conjunto  $R$ , distinguibles. Examinemos diferentes casos:

1. Los elementos del conjunto  $N$  están distribuidos en las células del conjunto  $R$  de una manera tal que ninguna célula está vacía (en la fig. 1.3. se muestra la distribución de  $n = 10$  elementos en  $r = 4$  células).

Según se ve, el problema se reduce a la determinación del número de métodos mediante los cuales se pueda trazar  $r - 1$  líneas en  $n - 1$  intervalos entre los elementos: este número es igual a  $\binom{n-1}{r-1}$ . A este mismo tipo de problemas se refieren los siguientes: hallar el número de métodos para pintar, usando  $r$  colores,  $n$  objetos iguales (por ejemplo, bolas); hallar el número de  $r$ -combinaciones con repetición, en las cuales se emplea cada elemento.

2. Los elementos del conjunto  $N$  de distribuyen en las células de  $R$  de tal modo, que pueden haber células vacías. El método de resolución de los problemas de este tipo es, en lo principal, el mismo. Al conjunto de elementos  $N$  se le agregan  $r$  "elementos vacíos" simbólicos. En este caso el problema se reduce a la determinación del número de métodos de trazar  $r - 1$  líneas en  $n + r - 1$  intervalos entre los elementos. Este número será

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}.$$

Entre los problemas de este tipo hay, por ejemplo, el siguiente: hallar el número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

en  $x_i$ :  $i = 1, 2, \dots, r$  enteros no negativos.

3. En fin, a esta clase se refieren los problemas relacionados con el cálculo del número de muestras de un  $n$ -conjunto.

Los dos tipos restantes de problemas, (C) y (D), donde resultan no distinguibles las células para el llenado, representan, al tratar de resolverlos, dificultades mucho más considerables. Se llaman, habitualmente, por el nombre colectivo de particiones no ordenadas. Los problemas del tipo C, donde son indistinguibles sólo las células, mientras que los elementos a distribuir son distinguibles, permiten, por otra parte, su resolución. Indiquemos algunas fórmulas.

1. En aquellos casos en que no se admite, al realizar el llenado, células vacías y cuando se toma en consideración el orden en que los elementos caen en las células, el número buscado de distribuciones es igual a

$$A_n^r = \frac{n!}{r!} \binom{n-1}{r-1}. \quad (1)$$

2. Si la partición antecedente se modifica de tal modo que se admiten 1, 2, ...,  $r$  células vacías, entonces el número buscado de distribuciones es

$$(A')_n^r = A_n^r + A_n^{r-1} + \dots + A_n^1. \quad (2)$$

3. Si no hay células vacías, mientras que el orden de disposición de los elementos en las células no se toma en consideración, el número de distribuciones será

$$B_n^r = \frac{1}{r!} \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_r = n \\ s_j \geq 1}} \frac{n!}{s_1! s_2! \dots s_r!} = S(n, r). \quad (3)$$

El número  $S(n, r)$  se llama número de Stirling de 2º género (véase más abajo § 2.3).

4. Cuando en el caso 3 se admiten 1, 2, ...,  $r$  células vacías, el número de distribuciones es igual a

$$(B^r)_n = B_n^r + B_n^{r-1} + \dots + B_n^1. \quad (4)$$

Aduzcamos un esbozo de la demostración de las afirmaciones citadas. Efectivamente, supongamos que en el caso 1 se distribuyen elementos de un conjunto  $N = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Las distribuciones  $L$  tienen la forma  $L = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i_1} \mid \alpha_{i_1+1}, \alpha_{i_1+2}, \dots, \alpha_{i_2} \mid \dots \alpha_{i_{r-1}+1}, \dots, \alpha_{i_{r-1}+2}, \dots, \alpha_n\}$ . El número  $|L|$  de estas distribuciones se puede calcular mediante dos procedimientos:

a)  $|L| = n! \binom{n-1}{r-1}$ , es decir, el número de permutaciones en el conjunto  $N$  se multiplica por el número de distribuciones de  $r-1$  líneas en  $n-1$  intervalos;

b)  $|L| = A_n^r \cdot r!$ , es decir, el número buscado se multiplica por el número de reenumeraciones posibles de las células.

Al igualar entre sí  $a)$  y  $b)$ , obtenemos la fórmula (1). Apliquemos en el caso 3, al igual que en el caso 1, dos métodos para calcular el número de distribuciones en diferentes células:

$$\begin{aligned} B_n^r \cdot r! &= \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_r = n \\ s_i \geq 0}} \binom{n}{s_1} \binom{n-s_1}{s_2} \dots \binom{n-s_1-s_2-\dots-s_{r-1}}{s_r} = \\ &= \sum \frac{n!}{s_1!(n-s_1)!} \frac{(n-s_1)!}{s_2!(n-s_1-s_2)!} \dots \frac{(n-s_1-s_2-\dots-s_{r-1})!}{s_r!(n-s_1-s_2-\dots-s_r)!} = \\ &= \sum \frac{n!}{s_1! s_2! \dots s_r!}, \end{aligned}$$

de donde se deduce (3).

Las fórmulas (2) y (4) se desprenden, evidentemente, de las (1) y (3), respectivamente.

Estudiemos, por fin, el caso  $(D)$ , es decir, la clase de problemas sobre las distribuciones, cuando los conjuntos  $N$  y  $R$  se componen ambos de elementos indistinguibles. Dichos problemas resultaron ser más difíciles y la teoría de su resolución aún no está elaborada completamente. La interpretación más conocida del caso dado la representa el problema teórico-numérico sobre la partición de los números naturales en sumandos naturales.

Notemos, ante todo, que los problemas de la clase (D) no pueden equipararse con los problemas de las clases anteriores, como se ha hecho más arriba: las conexiones resultan ser mucho más complejas y no se logra hallar una expresión analítica conveniente para obtener el número buscado.

Para calcular el número de particiones referentes a los problemas de tipo (D), sirve por ahora de medio principal el siguiente método recurrente.

Supongamos que un  $n$ -conjunto  $S$  se divide en  $k$  partes no vacías  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , con la particularidad de que  $|a_i| \geq 1, i = 1, 2, \dots, k$ . Denotemos con  $P_k(n)$  el número de tales particiones. Es obvio, que  $P_1(n) = 1; P_k(k) = 1, P_k(n) = 0$  para  $n < k$ .

$$\sum_{i=1}^k a_i = n. \quad (5)$$

Admitamos que  $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_k|$  (renumeremos, si es necesario, las partes de la partición). Está claro que

$$\sum_{i=1}^k (a_i - 1) = n - k. \quad (6)$$

Se ha obtenido la partición del  $(n - k)$ -conjunto en partes cuyo número es  $\leq k$  (la igualdad tiene lugar, si cualquier  $a_i$  contiene no menos de 2 elementos). Según la regla de la suma, el número de tales particiones es igual a  $\sum_{i=1}^k P_i(n - k)$ , y, en virtud de la igualdad (6), dicho número es igual al número de particiones del  $n$ -conjunto en  $k$  partes, es decir, a

$$\sum_{i=1}^k P_i(n - k) = P_k(n). \quad (7)$$

Teniendo en cuenta los valores (5), esta fórmula recurrente permite obtener sucesivamente los valores para  $P_k(n)$ , reuniéndolos, si es necesario, en la tabla 1.1.

Para los valores pequeños de  $k$  podemos obtener fórmulas de  $P_k(n)$ , por ejemplo

$$P_1(n) = 1; P_2(2) = 1; P_2(1) = 0; \\ P_2(n) = P_2(n - 2) + P_1(n - 2) = P_2(n - 2) + 1;$$

de donde

$$P_2(n) = \frac{n}{2}, \text{ si } n \text{ es par;} \\ P_2(n) = \frac{n-1}{2}, \text{ si } n \text{ es impar.}$$

Pero, ya para  $k = 3$  las fórmulas se hacen bastante engorrosas. La investigación del comportamiento de las magnitudes  $P_k(n)$  y  $P(n) = \sum_{k=1}^n P_k(n)$  (el

Tabla 1.1

k	n	Números $P_k(n)$									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1									
2			1								
3				1							
4					1						
5						1					
6							1				
7								1			
8									1		
9										1	
10											1
$P(n) = \sum_k P_k(n)$		1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

número de toda clase de particiones del número  $n$ ) para grandes valores de  $k$  está ligada con dificultades considerables. Se ha hallado el valor aproximado

$$P_k(n) \sim \frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1},$$

el cual en la práctica resulta suficiente. Para  $P(n)$  queda determinada una relación recurrente

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2) - P(n-5) - P(n-7) + \dots \\ \dots + (-1)^{k-1} P\left(n - \frac{3k^2 \pm k}{2}\right) + \dots$$

y están calculados los primeros valores sucesivos de esta magnitud.

Todas estas cuestiones y otras semejantes se analizan en la teoría de las particiones (véase [16]).

Aproximadamente desde la mitad del siglo anterior, merced a los esfuerzos de Darfi, Ferrers, Sylvester, y más tarde, de MacMahon, en la teoría de las particiones entró la interpretación de las mismas con ayuda de los grafos puntuales. Por ejemplo, la partición  $29 = 7 + 7 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2$  está expuesta en la fig. 1.4.

Las partes de las particiones se disponen, como regla, de arriba abajo en el orden de decrecimiento. Del análisis de los correspondientes grafos  $n$ -puntuales (llamados también grafos de Ferrers) pueden directamente obtenerse los resultados siguientes.

1. El número de particiones de un  $n$ -conjunto en las que la mayor parte

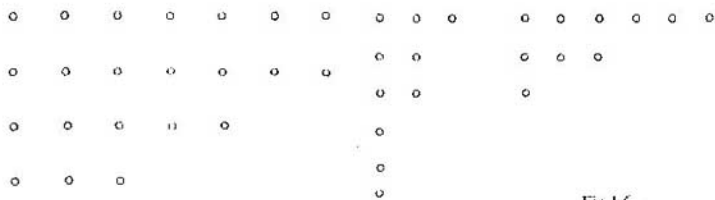


Fig. 1.4.

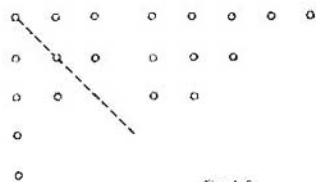


Fig. 1.5

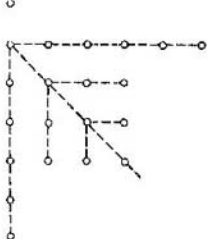


Fig. 1.6.

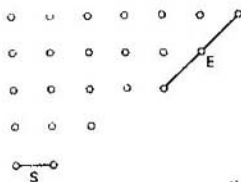


Fig. 1.7.

Fig. 1.8.

tiene  $k$  elementos, es igual al número de partes, es decir, a  $P_k(n)$ . Este teorema se demuestra por transposición del grafo de Ferrers respecto de la diagonal principal; tales grafos se denominan conjugados. Así, por ejemplo, en la fig. 1.5 el conjunto de 10 elementos está partido en 5 partes:  $10 = 3 + 3 + 2 + 1 + 1$ ; al efectuar la transposición, obtenemos:  $10 = 5 + 3 + 2$ , es decir, la partición del 10-conjunto en la cual la parte mayor contiene 5 elementos (una situación análoga se muestra en la fig. 1.6:  $10 = 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$  antes de la transposición, y  $10 = 6 + 3 + 1$ , después de la transposición).

2. El número de particiones autoconjugadas de un  $n$ -conjunto (una partición se llama autoconjugada, si el grafo de Ferrers que le corresponde es simétrico respecto de la diagonal principal) es igual al número de particiones del mismo conjunto en subconjuntos desiguales que se componen de un número impar de elementos. El teorema recíproco es también lícito.

Así, por ejemplo, a la partición autoconjugada del 20-conjunto  $20 = 6 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1$  (fig. 1.7) le corresponde biunívocamente la partición  $20 = 11 + 5 + 3 + 1$ , si los puntos de la primera columna dispuestos debajo de la diagonal los trasladamos a la primera fila, de la segunda columna, a la segunda fila, etc.



3. El número de particiones de un  $n$ -conjunto en partes diferentes es igual al número de particiones del mismo conjunto en partes, compuestas de un número impar de elementos.

Sea dada una partición del  $n$ -conjunto (por ejemplo,  $n = 34$ ) en componentes impares ( $34 = 5 + 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$ ). Todas las componentes impares iguales se reúnen en grupos (4 de cinco, 3 de tres y 5 unidades) y se escriben los números de sus repeticiones (4, 3 y 5) en el sistema binario ( $4 = 2^2$ ;  $5 = 2^2 + 2^0$ ;  $3 = 2^1 + 2^0$ ). Escribamos la nueva partición, teniendo en cuenta la representación binaria obtenida ( $34 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 20 + 6 + 3 + 4 + 1$ ). Este procedimiento es siempre factible, pues cualquier número se escribe de un modo único en el sistema binario. Siempre se puede razonar también del modo inverso.

4. Si  $Q_n$  y  $Q'_n$  son los números de particiones del  $n$ -conjunto en un número par e impar, respectivamente, de las partes desiguales entre sí, entonces

$$Q_n = \begin{cases} Q'_n, & \text{si } n \neq \frac{k}{2} (3k \pm 1); \\ Q'_k + (-1)^k, & \text{si } n = \frac{n}{2} (3k \pm 1); \end{cases}$$

donde  $k = 1, 2, \dots$

Supongamos que el grafo de Ferrers de la partición del  $n$ -conjunto en partes desiguales tiene la forma mostrada en la fig. 1.8.  $S$  es la parte menor de la partición y  $E$ , un conjunto de puntos (línea) dispuestos, a partir de la parte mayor, bajo un ángulo de  $45^\circ$ . Si  $|S| \leq |E|$ , entonces  $S$  se traslada al conjunto  $E$ ; en cambio, si  $|S| > |E|$ , viceversa,  $E$  se traslada a la parte menor  $S$ . Como resultado de tales traslaciones, tendremos el cambio de la paridad del número de partes desiguales de la partición. A toda partición par se le pone en correspondencia una impar y, además, biunívocamente:  $Q_n = Q'_n$ . Recomendamos que el lector mismo realice dicha operación con el siguiente ejemplo:  $7 + 6 + 5 + 3 + 2 \leftrightarrow 8 + 7 + 5 + 3$ .

Sin embargo, la operación no será posible, si las líneas  $S$  y  $E$  se intersecan y

$$|S| = |E|, \text{ o bien } |S| = |E| + 1.$$

Sea  $|E| = k$ . Entonces, en el primero de los casos exclusivos tendremos

$$n = k + (k + 1) + \dots + (2k - 1) = \frac{k}{2} (3k - 1);$$

y en el segundo:

$$n = (k + 1) + (k + 2) + \dots + 2k = \frac{k}{2} (3k + 1);$$

lo que demuestra nuestra afirmación.

## 1.5. SISTEMAS DE CONJUNTOS

Más arriba definimos la asignatura del análisis combinatorio, dimos una determinada información referente a la teoría de los conjuntos discretos finitos, indicamos las operaciones principales en las investigaciones combinatorias, explicamos los métodos de cálculo del número de entes combinatorios fundamentales, es decir, de muestras y ordenaciones, distribuciones y llenados. Todo lo dicho se realizó sólo para los conjuntos linealmente ordenados, y no para todos los casos posibles. Estas limitaciones fueron determinadas por el carácter introductor del capítulo.

No sería justo, sin embargo, concluir que los problemas tratados en el capítulo presente también son de importancia limitada y que el papel de los mismos es puramente pedagógico. La teoría general de los conjuntos discretos finitos es una asignatura matemática en desarrollo con sus propios problemas específicos. Además ocurre frecuentemente que a las investigaciones teóricas de los conjuntos finitos se reducen los problemas altamente prácticos.

Tomemos, por ejemplo, uno de los problemas sobre las particiones de un  $n$ -conjunto finito  $S$  en subconjuntos disjuntos. Analicemos las particiones  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . Designemos, para un elemento  $s \in S$  por  $f_i(s)$  el número de elementos en el bloque de partición  $\pi_i$ , el cual contiene el elemento  $s$  ( $i = 1, 2$ ). Llamemos conjugadas las particiones  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , si los pares ordenados de números  $(f_1(s), f_2(s))$  son distintos para todo  $s \in S$ .

**Ejemplo.** Sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Definamos dos particiones:

$$\pi_1 : S = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} \cup \{6\};$$

$$\pi_2 : S = \{1, 4, 6\} \cup \{2, 5\} \cup \{3\}.$$

Obtendremos para ellas

$i$	1	2	3	4	5	6
$f_1(i), f_2(i)$	{3, 3}	{3, 2}	{3, 1}	{2, 3}	{2, 2}	{1, 3}

Por cuanto todos los pares ordenados  $\{f_1(i), f_2(i)\}$  son distintos,  $\pi_1$  y  $\pi_2$  serán particiones conjugadas del conjunto  $S$ . Con relación a estas particiones conjugadas se ha demostrado [35] que un par de estas particiones existe, si y sólo si  $n \neq 2, 5, 9$ . Este resultado se ha obtenido al resolver el siguiente problema sobre la identificación de los cables telefónicos multifilares.

Sea dado un cable de  $n$  conductores indistinguibles. Se pide fijar en sus extremos  $A$  y  $B$  los bornes  $A_i, B_i; i = 1, 2, \dots, n$ , que correspondan a cada conductor. El método de resolución consiste en unir los grupos de extremos de los conductores por un lado del cable y en probar el paso de la corriente que se mide por otro lado del cable. Expliquemos esto más detalladamente con un ejemplo de un cable de seis conductores.

Tomemos el extremo  $A$  con bornes  $A_1, A_2, \dots, A_6$ , y unamos sus bornes de acuerdo con la partición  $\pi_1$  (posición I en la fig. 1.9). Supongamos que

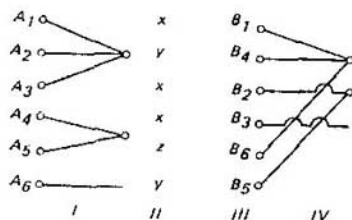


Fig. 1.9.

como resultado de la comprobación por el lado del extremo  $B$  (con bornes  $B_1, B_2, \dots, B_6$ ) se ha obtenido la situación que se indica en la fig. 1.9 mediante la posición II. Los bornes indistinguibles  $B_1, B_2, B_3$  se denotan con  $x$ , los bornes  $B_4$  y  $B_5$  con  $y$ , y el  $B_6$  con  $z$ ; unamos los bornes en el extremo  $B$  de acuerdo con la partición  $\pi_2$  (posición III). A continuación, al desconectar los bornes en el extremo  $A$ , comprobamos cuántos y cuáles conductores por el lado  $A$  quedan conectados en el extremo  $B$ . Admitamos, por ejemplo, que el conductor  $A_1 B_1$  resultó conectado con un solo borne en el extremo  $B$ . Por cuanto sabemos que el borne  $A_1$  pertenece al conjunto  $\{A_1, A_2, A_3\}$ , mientras que el borne en el extremo  $B$  integra el conjunto de dos bornes unidos (a saber,  $B_2$  y  $B_3$ ), y por cuanto el par  $\{f_1(i), f_2(i)\} = \{3, 2\}$  corresponde solamente a  $i = 2$ , concluimos que  $A_1$  está conectado con  $B_2$ . Análogamente, si el borne  $A_5$  está conectado con dos otros bornes por el lado  $B$  (es decir, el conductor  $A_5 B_5$  pertenece al conjunto de tres conductores que quedaban conectados), entonces  $A_5$  debe ser conectado con  $B_4$  (dado que al par  $(2, 3)$  corresponde  $i = 4$ ), etc.

Este algoritmo fue extendido también al caso general. Sea  $I$  un  $n$ -conjunto de números enteros  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ . Supongamos que para  $I$  existen dos particiones conjugadas:

$$\pi_1 : I = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k;$$

$$\pi_2 : I = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_k.$$

En el extremo  $A$  unamos primeramente los conductores de acuerdo con la partición  $\pi_1$ , es decir, conductores en los cuales los números de los bornes pertenecen a cierto  $P_l \in \pi_1$ ;  $l = 1, 2, \dots, k$ . En el extremo  $B$  elegimos por comprobación los subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_k$  de bornes de aquellos conductores que fueron conectados en el extremo  $A$ , y enumeramos los bornes en el extremo  $B$  de un modo tal que, cualquiera que sea  $S_r$ , el conjunto de índices de los bornes  $B_i$  que se encuentran en  $S_r$  sea exactamente un subconjunto de  $\pi_1$ . Ahora unamos los conductores en el extremo  $B$  en grupos  $T_1, T_2, \dots, T_k$ , donde  $T_j$  consta de todos aquellos conductores con bornes  $B_i$ , para los cuales  $i \in P'_j$ . Separando todas las conexiones en el extremo  $A$ , escogemos los conductores por el lado de  $A$  que están conectados en el extremo  $B$ .

Realizada esta operación, podemos encontrar los bornes "izquierdo" y "derecho" para un mismo conductor. En efecto, sea  $A_u$  algún conductor

que hemos cogido, y supongamos que en el extremo  $B$  dicho conductor integra el grupo  $T_j$ , el cual tiene, digamos,  $p$  elementos (de donde hallamos este número  $p$ ). Por cuanto se sabe el número de elementos en el subconjunto  $S_i$ , en el que está contenido  $A_u$  (admitamos que es igual a  $q$ ), entonces, basándonos en el procedimiento de construir  $S_i$  y  $T_j$ , y en que todos los pares  $(p, q) = [f_1(u), f_2(u)]$  son diferentes, podemos encontrar el único  $B_{iu}$  tal que  $A_u$  y  $B_{iu}$  sean extremos de un mismo conductor.

En muchas ramas de las matemáticas y en sus aplicaciones se plantean y se resuelven problemas que no sólo se reducen al análisis de los conjuntos discretos y de sus sistemas, sino que, además se enuncian en términos de los mismos. Así, por ejemplo, sucede en la teoría de los autómatas finitos, en la técnica de cómputo discreta, problemas aplicados del álgebra, etc. Describamos unos cuantos problemas tipo que se encuentran muy a menudo.

**Familias de Sperner.** Se dice que los subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_m$  de un conjunto finito  $S$  forman una familia de Sperner, siempre que ninguno de ellos está contenido en el otro. Sea  $|S| = n$ . ¿Cuál será el número máximo posible  $m$  de términos en la familia de Sperner? La respuesta a esta pregunta lleva el nombre del teorema de Sperner (véase cap. 8):  $m = \binom{n}{[n/2]}$ <sup>1)</sup>.

**Sistemas separadores.** Este concepto fue introducido por A. Rényi [36] al analizar los problemas de la teoría de información. Un sistema de subconjuntos  $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  de un conjunto finito  $S$  se denomina separador, si en el mismo, para cualesquiera dos elementos distintos del conjunto  $S$ , existe un subconjunto  $S_i$  que contiene sólo un elemento de todos los mencionados. A. Rényi planteó el problema de hallar un sistema separador mínimo bajo la condición de que cada subconjunto de este sistema consta exactamente de un número dado de elementos. Este problema fue analizado en [37].

**Problemas sobre los subconjuntos que se intersecan.** Existen varios problemas en los que se introducen limitaciones en la potencia de los propios subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_m \subseteq S$  y de sus intersecciones. Se requiere determinar el número máximo ( $m$ ) de subconjuntos que satisfagan dichas condiciones para  $n = |S|$  fijo. Con este motivo recomendamos la obra [38]. Demos a conocer el resultado clásico de Erdős, Chao Ko, Rado [39]. Supongamos que

- 1) cada uno de los subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_m$  contiene no más de  $k$  elementos, donde  $k \leq n/2$ ;
- 2) ninguno de los subconjuntos está contenido en el otro;
- 3) cualesquiera dos subconjuntos se intersecan. En este caso el número

<sup>1)</sup> Con  $[x]$  se denota el número máximo entero que no sobrepasa  $x$ ; con  $\{x\}$ , el número entero mínimo, superior o igual a  $x$ .

máximo posible de subconjuntos será  $\binom{n-1}{k-1}$ . Precisamente este número de términos tiene el sistema de todos los  $k$ -subconjuntos del  $n$ -conjunto  $S$  en los que está contenido cierto elemento fijo  $s \in S$ .

**Recubrimientos y empaques.** El problema de construcción de los mejores códigos conduce al siguiente problema combinatorio: hallar el número máximo  $m$ , para el cual existe un sistema de subconjuntos  $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  de  $r$  elementos del  $n$ -conjunto  $S$ , donde  $|S_i \cap S_j| < t$  para cualesquiera  $1 \leq i < j \leq m$ . Dicho de otro modo, se requiere que cada  $t$ -subconjunto del conjunto  $S$  se contenga a lo sumo en uno de los subconjuntos del sistema. Este problema se denomina *problema de empaques*. También se analiza con frecuencia el problema inverso. Exijamos que cada  $t$ -subconjunto se contenga no menos que en uno de los subconjuntos del sistema; se pregunta qué cantidad mínima de  $r$ -subconjuntos del  $n$ -conjunto  $S$  es necesaria para que se pueda formar tal sistema. Este problema se denomina *problema de recubrimientos*. Al igual que el problema de empaques, él está resuelto por ahora sólo en algunos casos particulares (por ejemplo, para  $r = 3, t = 2$ ;  $r = 4, t = 2$ ). Si en lugar de los subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_m$  estudiamos complementos de los mismos  $S'_1, S'_2, \dots, S'_m$ , donde  $S'_i = S \setminus S_i$ , y ponemos  $k = n - r, l = n - r$ , obtendremos otra forma del problema de recubrimientos: ¿qué número mínimo de  $l$ -subconjuntos del  $n$ -conjunto  $S$  es necesario para que en cualquier  $k$ -subconjunto de conjunto  $S$  se contenga por lo menos uno de los  $l$ -subconjuntos elegidos. Este número lleva el nombre de *número de Turán*  $T(n, k, l)$ . En el año 1941 Turán [40] demostró que

$$T(n, k, 2) = mn - \frac{m(m+1)}{2} (k-1) \text{ para } m \leq \frac{n}{k-1} \leq m+1.$$

Pese a que la formulación es sencilla, el problema de hallar los números de Turán resulta ser, en el caso general, exclusivamente difícil. Para  $l \geq 3$  se han obtenido pocos resultados. Se conoce (véase [41]) que

$$T(n, k, l) = n - (k-1) \text{ para } 1 \leq \frac{n}{k-1} \leq \frac{l}{l-1}$$

$$T(n, k, l) = \left\lfloor \frac{\left( \left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor - 1 \right) n - \left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor (k-1)}{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor} \right\rfloor$$

$$\text{para } \frac{l}{l-1} \leq \frac{n}{k-1} \leq \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor - 2} \right\rfloor.$$

La propiedad  $\emptyset$ . Suele decirse que un sistema de subconjuntos  $S_1, S_2,$

...,  $S_m \subseteq S$  posee la propiedad  $\mathcal{B}$ , si existe tal partición del conjunto  $S = S' \cup S''$  ( $S' \cap S'' = \emptyset$ ), que  $S_i \not\subseteq S'$ ,  $S_i \not\subseteq S''$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Se imponen las restricciones  $|S| = n$ , y  $|S_1| = |S_2| = \dots = |S_m| = k$ , y se busca el número mínimo  $m = m(n, k)$  de subconjuntos en un sistema que no posea la propiedad  $\mathcal{B}$ . Este problema se analiza en el cap. 7.

Una clase importante más de problemas sobre los sistemas de conjuntos está relacionada con el teorema de Ramsey al que se dedica un párrafo aparte del capítulo 3.

El estudio de los sistemas de conjuntos es el problema principal en el análisis combinatorio. De los éxitos de dicho estudio depende tanto el enriquecimiento de la teoría de la combinatoria, como también la ampliación de los campos de aplicación.

## CAPÍTULO 2 FUNCIONES GENERATRICES

Durante mucho tiempo el contenido del análisis combinatorio lo constituía el cálculo del número de configuraciones de determinados tipos. Una parte de la teoría combinatoria que estudia estos problemas sigue jugando hoy día un papel importante en las aplicaciones.

En §§ 1.3 y 1.4 hemos considerado los métodos directos ("elementales") de cálculo. El presente capítulo se dedica a los métodos indirectos, con ayuda de los cuales se calcula la cantidad de configuraciones combinatorias.

### 2.1. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

El método de las funciones generatrices (generadoras) es uno de los más desarrollados en el análisis combinatorio. Las ideas fundamentales de este método fueron enunciadas por primera vez al final del siglo XVIII en las obras de Laplace referentes a la teoría de las probabilidades. Expliquemos las mismas con el siguiente ejemplo sencillo. Veamos el producto del número finito de binomios lineales

$$\prod_{r=1}^n (1 + x_r t) = \sum_{r=0}^n a_r t^r, \quad (1)$$

donde

$$a_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$$

no son nada más que funciones simétricas elementales de las variables  $x_1, \dots, x_n$ . Observemos que a los sumandos del coeficiente  $a_r$  se les puede asignar las  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos  $x_1, \dots, x_n$ . La expresión (1) se llamará *numerador* de las  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos. Si ponemos en (1)  $x_i = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ , obtendremos

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r = (1 + t)^n, \quad (2)$$

puesto que  $a_r(1, \dots, 1)$  es el número de  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos. Desarrollemos la función  $(1 + t)^n$  en potencias de  $t$  según la fórmula de Taylor:

$$(1 + t)^n = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} t^r. \quad (3)$$

(Este mismo resultado puede ser demostrado también por inducción respecto de  $n$ .)

De (2) y (3) se deduce

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} t^r. \quad (4)$$

Al igualar entre sí los coeficientes de iguales potencias de  $t$  en (4), obtenemos de nuevo (esta vez, analíticamente) el resultado del capítulo 1: el número de  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos es igual a  $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ . Al aplicar este resultado del capítulo 1 a la fórmula (2), obtendremos una demostración más de la identidad (3). Semejante método de determinar los coeficientes del desarrollo de las funciones era generalmente aceptado en la primera mitad del siglo XIX y se llamaba análisis combinatorio, a diferencia del análisis matemático al cual se referían los métodos analíticos de obtención de los desarrollos.

En la expresión (2) la función  $f(t) = (1+t)^n$  está biunívocamente relacionada con una sucesión de los números

$$\left\{ \binom{n}{r} \right\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Tal relación resulta muy útil: atribuyendo en la fórmula (2) diferentes valores particulares a la variable  $t$ , se pueden obtener muchas identidades importantes. Así, por ejemplo, para  $t = 1$  y  $t = -1$  tenemos

$$2^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n},$$

$$0 = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = 1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n};$$

respectivamente. La adición y sustracción de estas expresiones término a término nos da

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{2r} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2r+1} = 2^{n-1},$$

mientras que la simple división de los factores

$$(1+t)^n = (1+t)^m (1+t)^{n-m}$$



conduce a la identidad

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n-m}{k} \binom{m}{r-k},$$

que se conoce como convolución de Vandermonde. Por fin, al sustituir en (2)  $t = a/b$ , y al multiplicar por  $b^n$  los miembros primero y segundo, obtenemos seguidamente el *teorema binomial* (la fórmula binomial):

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^r b^{n-r}.$$

debido a lo cual los números  $\binom{n}{r}$  se llaman *coeficientes binomiales*.

**Ejercicio.** Demuéstrese, por inducción respecto a  $m$ , el teorema binomial:

$$\left( \sum_{r=1}^m a_r \right)^n = \sum_{n_1! n_2! \dots n_m!} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m},$$

donde la suma se calcula respecto a todas las soluciones de la ecuación  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$  en números enteros no negativos; los coeficientes en el segundo miembro se llaman polinomiales y ya aparecieron en el capítulo I como números de las  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ -particiones del  $n$ -conjunto.

La función  $f(t) = (1 + t)^n$  se denomina *función generatriz* de una sucesión de números  $\left\{ \binom{n}{r} \right\}$ , o bien, más brevemente, función generadora del número de  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos,  $r = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Examinemos ahora una sucesión numérica  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ , o bien, de otro modo, la función  $a_n$  de un argumento de número entero  $n$ . A esta función le corresponde biunívocamente la serie

$$f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (5)$$

la cual es más cómoda y simple en las operaciones, particularmente cuando ella converge a una función que posee una forma analítica conveniente. La serie  $f_a(t)$  se llama *función generatriz* de la sucesión  $a$ . Así pues, las funciones generatrices permiten pasar del análisis de magnitudes aisladas (por ejemplo, de las  $r$ -combinaciones para un valor particular  $r$ ) al análisis de sus sucesiones e, incluso, de las clases de sucesiones.

Para la mayoría de los problemas combinatorios la serie (5) es finita. Si esta serie es, sin embargo, infinita y el radio de su círculo de convergencia es igual a cero, las operaciones con ella son posibles sólo dentro del álgebra de las series de potencias formales, el cual se analizará en el párrafo que viene.

## 2.2. TIPOS DE FUNCIONES GENERATRICES Y DE NUMERADORES

Sea  $R$  cierto anillo con la unidad. El anillo  $S(R)$  de sucesiones sobre  $R$  y el anillo  $R[[t]]$ , isomorfo a  $S(R)$ , de series de potencias formales sobre  $R$  se definen del modo siguiente. Los elementos del anillo  $S(R)$  son las sucesiones

$$\{a\} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots)\}, \quad (1)$$

y los elementos correspondientes del anillo  $R[[t]]$  son las series

$$\{F_a(t)\}, F_a(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r. \quad (2)$$

Se llama suma de las sucesiones  $a = (a_0, a_1, \dots)$  y  $b = (b_0, b_1, \dots)$  a la sucesión

$$c = a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots),$$

y se llama suma de las series  $F_a(t)$  y  $F_b(t)$ , pertenecientes a la clase (2), a la serie  $F_c(t) = F_a(t) + F_b(t)$ :

$$F_c(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r,$$

donde  $c_r = a_r + b_r$ .

Se denomina producto (o convolución) de las sucesiones  $a$  y  $b$  de la clase (1) a la sucesión  $a \times b = d = (d_0, d_1, \dots)$ , en la cual

$$d_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \dots + a_r b_0, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

y producto (convolución) de las series  $F_a(t)$  y  $F_b(t)$  de la clase (2), a la serie

$$F_d(t) = F_a(t) \times F_b(t) = \sum_{r=0}^{\infty} d_r t^r,$$

donde  $d_r$  se determina según la fórmula (3).

Definamos ahora: el cero en la clase (1) como una sucesión (nula)

$$0 = (0, 0, \dots),$$

entonces el cero en la clase (2) es la serie correspondiente a  $O$

$$F_0(t) = 0;$$

la unidad en la clase (1) como una sucesión (unitaria)

$$e = (1, 0, 0, \dots),$$

entonces la unidad en la clase (2) será una serie correspondiente a  $e$ :

$$F_e(t) = 1.$$

Por fin, un elemento inverso para  $a \in S(R)$  respecto de la adición en la clase (1) es  $-a = (-a_0, -a_1, \dots)$ , y el elemento correspondiente inverso pa-

ra  $F_a(t)$  en la clase (2) será

$$-F_a(t) = F_{-a}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-a_r)t^r.$$

Es fácil ver que todos los axiomas del anillo para  $S(R)$  y  $R[[t]]$  tienen lugar.

Sea  $a_0$  un elemento invertible del anillo  $R$ ; buscamos  $a^{-1} = a'$ , partiendo de la condición  $a \times a' = e$ , es decir,

$$\begin{aligned} a_0 a'_0 &= 1, \\ a_1 a'_0 + a_0 a'_1 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ a_k a'_0 + a_{k-1} a'_1 + a_{k-2} a'_2 + \dots + a_0 a'_k &= 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

de donde encontramos  $a'_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) de las primeras  $k + 1$  ecuaciones, empleando el cálculo sucesivo por el método de Gauss (o bien por el de Cramer). Por consiguiente, sólo para las sucesiones  $a$ , tales que  $a_0$  es invertible, existen  $a^{-1}$  y  $F_a^{-1}(t)$  en los anillos  $S(R)$  y  $R[[t]]$ .

En los anillos  $S(R)$  y  $R[[t]]$  puede introducirse la diferenciación  $D$ : para  $a = (a_0, a_1, \dots)$ ,  $Da = (a_1, 2a_2, \dots, na_n, \dots)$ ,

$$DF_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1},$$

y la integración  $\int$ :

$$\int a = \left(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_n}{n+1}\right), \quad \int F_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}.$$

**Ejercicio 1.** Demuéstranse las siguientes propiedades de las aplicaciones  $D$  y  $\int$  en  $S(R)$ :

- 1)  $D(a + b) = Da + Db$ ; 2)  $\int(a + b) = \int a + \int b$ ;
- 3)  $D \int a = a$ ; 4)  $\int Da = a$ ;
- 5)  $D(a \times b) = (Da) \times b + a \times Db$ ;

y las propiedades correspondientes en el anillo  $R[[t]]$ .

Si el anillo  $R$  es un álgebra sobre el campo  $P$ , entonces, al introducir en  $S(R)$  y en  $R[[t]]$  las operaciones de multiplicación por  $\alpha \in P$ :

$$\alpha a = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots), \quad \alpha F_a(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha a_r) t^r,$$

convertimos  $S(R)$  y  $R[[t]]$  en álgebras isomórfas.

Volvamos ahora a las sucesiones que aparecen en los problemas combinatorios, es decir, al álgebra  $S(\mathbf{R})$  de sucesiones sobre el campo  $\mathbf{R}$  de números reales. Para la sucesión  $a \in S(\mathbf{R})$ , la serie  $F_a(t) \in R[[t]]$  lleva el nombre de *función generatriz ordinaria*, mientras que la propia álgebra  $R[[t]]$  se deno-

mina álgebra de Cauchy. Las funciones generatrices ordinarias se usan al analizar las familias de sucesiones cuyos elementos están constituidos por las funciones de las  $r$ -muestras no ordenadas ( $r$ -combinaciones).

Para la construcción de los mismos objetos combinatorios (de las  $r$ -combinaciones) emplearemos el álgebra  $\mathbf{R}(x; t) = \mathbf{R}[x_1, x_2, \dots][[t]]$  de series de potencias formales sobre el álgebra  $\mathbf{R}[x_1, x_2, \dots]$  de polinomios de las variables  $x = \{x_1, x_2, \dots\}$  sobre el campo de números reales. El álgebra  $\mathbf{R}(x; t)$  se llamará *numeradora*, y las series, cuyos coeficientes serán polinomios que enumeran los objetos combinatorios construidos por nosotros, *numeradores* de dichos objetos.

Recordemos que la aplicación  $M: A_1 \rightarrow A_2$ , realizada del álgebra  $A_1$  sobre el campo  $P$  en el álgebra  $A_2$  sobre  $P$ , se denomina *operador lineal*, si  $M(a + b) = Ma + Mb$  y  $M(\alpha a) = \alpha Ma$  para cualesquiera  $a, b \in A_1, \alpha \in P$ . La aplicación  $M$  se denomina *operador multiplicativo*, si  $M(ab) = (Ma)(Mb)$  para cualesquiera  $a, b \in A_1$ . Usaremos con frecuencia la aplicación  $T: \mathbf{R}(x; t) \rightarrow \mathbf{R}[[t]]$  que convierte todos los  $x_i$  en 1.

Ejercicio 2. Demuéstrase que la aplicación  $T$  es un operador multiplicativo lineal.

Ejercicio 3. Demuéstrase que las aplicaciones  $D$  y  $\int$  sobre el álgebra  $\mathbf{R}(x; t)$  son operadores lineales.

EjemPlo 1. Hállense el numerador y la función generatriz para las  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos.

Este problema ya lo hemos resuelto en el § 2.1: el numerador de las  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos está dado por la serie (1) en el álgebra numeradora  $\mathbf{R}(x; t)$ , y la función generatriz, por la serie (4) en la subálgebra  $\mathbf{R}[[t]]$  de la misma.

EjemPlo 2. Hállense el numerador y la función generatriz para las  $r$ -combinaciones con repeticiones del tipo  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  de  $n$  elementos, donde  $\Lambda_i$  es un subconjunto del conjunto  $\mathbf{N}_0$  de números enteros no negativos; el elemento  $a_i$  puede estar presente en las  $r$ -combinaciones  $\lambda$  veces, siempre que  $\lambda \in \Lambda_i$ .

Al elemento  $a_i$  del  $n$ -conjunto  $S$  pongámosle en correspondencia una variable  $x_i$  en  $\mathbf{R}(x; t)$ , entonces, a la aparición del elemento  $a_i$  en la  $r$ -combinación corresponderá, o bien  $\lambda_1$  veces, ..., o bien  $\lambda_2$  veces, la serie  $x_i^{\lambda_1} t^{\lambda_1} + x_i^{\lambda_2} t^{\lambda_2} + \dots$ . Por eso, el numerador buscado tendrá la expresión

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r = \prod_{i=1}^n \sum_{\lambda \in \Lambda_i} x_i^{\lambda} t^{\lambda}. \quad (4)$$

La función generatriz tiene en este caso la forma

$$F(t) = \prod_{i=1}^n \sum_{\lambda \in \Lambda_i} t^{\lambda} \quad (5)$$

(a los miembros primero y segundo de (4) se ha aplicado el operador lineal  $T$ , que convierte todos los  $x_i$  en 1). Al desarrollar (5) en potencias de  $t$ , llegamos a que el número de  $r$ -combinaciones del tipo  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de  $n$  elementos

es igual al número de soluciones de la ecuación  $y_1 + \dots + y_n = r$  con las incógnitas  $y_i \in \Lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**EJEMPLO 3.** Hállense el numerador y la función generatriz, para las  $r$ -combinaciones con repeticiones ilimitadas de  $n$  elementos.

Reduciremos nuestro problema al anterior, si ponemos  $\Lambda_i = \mathbf{N}_0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El numerador (4) adopta la forma:

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t + x_i^2 t^2 + \dots) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i t}.$$

De aquí (ó de (5)) encontramos la función generatriz:

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + t + t^2 + \dots)^n = (1 - t)^{-n} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-r+1)}{n!} (-1)^r t^r = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-t)^r, \end{aligned}$$

donde se ha puesto por definición

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}.$$

De aquí tenemos la sucesión  $b = (b_0, b_1, \dots)$ , donde  $b_r = \binom{n+r-1}{r}$  es el número de  $r$ -combinaciones con repetición de  $n$  elementos. Este resultado concuerda con el obtenido antes (véase § 1.3).

**EJEMPLO 4.** Hállense el numerador y la función generatriz de las  $r$ -combinaciones con repetición, en las cuales figura por lo menos un elemento de cada tipo.

Pongamos, en las condiciones del ejemplo 2,  $\Lambda_i = \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, de (4) obtenemos el numerador buscado:

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r = \prod_{i=1}^n (x_i t + x_i^2 t^2 + \dots) = t^n \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - x_i t}.$$

De aquí tenemos la función generatriz:

$$f(t) = (t + t^2 + \dots)^n = t^n (1 - t)^{-n} = t^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r.$$

Al realizar la sustitución  $n + r = k$ , obtenemos

$$f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} t^k = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} t^k.$$

Por consiguiente, el número de  $r$ -combinaciones buscadas es igual a 0 para  $r < n$ , y a  $\binom{r-1}{n-1}$ , para  $r \geq n$ .

**EJEMPLO 5.** Hállense el numerador y la función generatriz para las  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos, donde se admite sólo un número par de apariciones para cada uno de los elementos.

Suponiendo en las condiciones del ejemplo 2,  $\Lambda_i = \{0, 2, 4, \dots\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tenemos de (4) el numerador buscado:

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r = \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2 t^2 + x_i^4 t^4 + \dots) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i^2 t^2}.$$

De aquí obtenemos la función generatriz

$$f(t) = (1 + t^2 + t^4 + \dots)^n = (1 - t^2)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^{2r}.$$

Ahora podemos obtener una identidad interesante: por cuanto  $(1 - t^2)^{-n} = (1 - t)^{-n} (1 + t)^{-n}$ , la comparación de los coeficientes de las potencias de  $t$  en los miembros primero y segundo nos da:

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{n+r-k-1}{r-k} \binom{n+k-1}{k} = \begin{cases} 0, & \text{para } r \text{ impar,} \\ \binom{n+s-1}{s}, & \text{para } r = 2s. \end{cases}$$

**Ejercicio 4.** Hállense el numerador y la función generatriz para las  $r$ -combinaciones de  $n$  elementos, donde se admiten a lo sumo  $j$  repeticiones de cada elemento.

Pasemos ahora a la construcción de la teoría analítica para la enumeración de las  $r$ -muestras ordenadas o de las  $r$ -permutaciones.

En los márgenes del álgebra  $\mathbf{R}[x_1, x_2, \dots][[t]]$  de series de potencias formales con los coeficientes del álgebra de polinomios  $\mathbf{R}[x_1, x_2, \dots]$  sobre un campo  $\mathbf{R}$  de variables  $x_1, x_2, \dots$ , que no conmutan entre sí, examinemos la expresión

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n (1 + x_{\pi(i)} t) = \sum_{r=0}^n a_r(x_1, x_2, \dots) \frac{t^r}{r!}, \quad (1)$$

en la que la suma en el primer miembro se toma por todas las sustituciones de grupo simétrico  $S_n$  de sustituciones de un  $n$ -conjunto. No es difícil ver que en el coeficiente de  $t^r$  del desarrollo en potencias de  $t$  de la expresión

$$\sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n (1 + x_{\pi(i)} t)$$

el número de apariciones del monomio  $x_{i_1} \dots x_{i_r}$  es igual al número de sustituciones de  $\pi \in S_n$  tales, que  $\pi^{-1}(i_1) < \pi^{-1}(i_2) < \dots < \pi^{-1}(i_r)$ . Las sustituciones de esta índole pueden construirse del modo siguiente: elegimos  $r$  lugares para las preimágenes de los elementos  $i_1, \dots, i_r$  empleando  $\binom{n}{r}$  méto-

dos, y los demás  $n - r$  elementos pueden permutarse mediante  $(n - r)!$  métodos. Por eso, el monomio que se examina aparece sólo  $\binom{n}{r} (n - r)! = n!/r!$  veces. Por consiguiente, el polinomio  $a_n^*(x_1, x_2, \dots)$  en (6) se compone de monomios, correspondientes a todas las  $r$ -permutaciones de elementos  $x_1, \dots, x_n$ . La serie (6) se denominará numerador exponencial de las  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos.

Ahora, suponiendo en (6)  $x_i = t, i = 1, \dots, n$  (aplicamos a los términos primero y segundo el operador multiplicativo  $T$  que convierte todos los  $x_i$  en  $t$ ), obtenemos

$$(1 + t)^n = \sum_{r=0}^n P(n, r) \frac{t^r}{r!}, \quad (7)$$

donde  $P(n, r)$  es el número de  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos. La función  $f(t) = (1 + t)^n$  se llamará función generatriz exponencial para el número de  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos. Observemos que la fórmula (7) podía ser deducida inmediatamente de la fórmula (2) § 2.1, puesto que  $P(n, r) = a_n(1, \dots, r)!$ . Al desarrollar  $(1 + t)^n$  en potencias de  $t$ , obtenemos

$$\sum_{r=0}^n P(n, r) \frac{t^r}{r!} = \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n - r)!} \frac{t^r}{r!},$$

y de aquí hallamos otra vez el número de  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos:  $P(n, r) = n!/(n - r)!$ .

Sea  $R$  un anillo con la unidad. El anillo  $S^*(R)$  de sucesiones exponenciales sobre  $R$  y el anillo  $R^*[[t]]$  (isomorfo a  $S^*(R)$ ) de series de potencias formales sobre  $R$  se construyen del modo siguiente. El anillo  $S^*(R)$ , siendo un grupo aditivo, coincide con el grupo aditivo del anillo  $S(R)$ . La operación de multiplicación en  $S^*(R)$  será la convolución binomial de las sucesiones:  $ab = d = (d_0, d_1, \dots)$ , donde  $a = (a_0, a_1, \dots)$ ,  $b = (b_0, b_1, \dots)$ ,

$$d_r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} a_i b_{r-i}. \quad (8)$$

La unidad y el cero en  $S^*(R)$  son los mismos que en el anillo  $S(R)$ . El elemento inverso respecto de la multiplicación para la sucesión  $a = (a_0, a_1, \dots)$  existe sólo en el caso de invertibilidad del elemento  $a_0$ , y se calcula a partir del sistema de ecuaciones, análogo al sistema, ya analizado, de ecuaciones en el anillo  $S(R)$ .

**Ejercicio 5.** Demuéstrese que en  $S^*(R)$  están cumplidos todos los axiomas del anillo, y la aplicación  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \rightarrow a' = (a_0, a_1, \dots, a_n/n!, \dots)$  es un isomorfismo de los anillos  $S(R)$  y  $S^*(R)$ .

Como elementos del anillo  $R^*[[t]]$  intervienen las series de potencias exponenciales

$$[E_a(t)], E_a(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{t^r}{r!},$$

correspondientes a las sucesiones  $a = (a_0, a_1, \dots)$ . Las operaciones de adición y multiplicación se determinan del modo siguiente:

$$E_a(t) + E_b(t) = E_c(t) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \frac{t^r}{r!},$$

$$b = (b_0, b_1, \dots), c_r = a_r + b_r;$$

$$E_a(t) \times E_b(t) = E_d(t) = \sum_{r=0}^{\infty} d_r \frac{t^r}{r!},$$

donde  $d_r$  se halla por la fórmula (8). El cero y la unidad en  $R^*[[t]]$  son los mismos que en el anillo  $R[[t]]$ ; el elemento inverso respecto de la adición se determina análogamente; el elemento inverso respecto de la multiplicación se calcula igual que en el anillo  $S^*(R)$ . Si  $R$  es el álgebra sobre el campo  $P$ , entonces (lo mismo que en el caso de  $S(R)$ ) el anillo  $S^*(R)$  se transforma en el álgebra sobre  $P$ . Una construcción análoga se realiza también para el anillo  $R^*[[t]]$  sobre el álgebra  $R$ .

Ejercicio 6. Realícense para el anillo  $R^*[[t]]$  las construcciones y demostraciones omitidas en el texto.

De la definición del anillo  $R^*[[t]]$  se ve que en el caso de las series convergentes el producto formal coincide con el ordinario. La serie  $E_a(t)$  recibe el nombre de *función generatriz exponencial* para la sucesión  $a \in S^*(\mathbb{R})$ , y la propia álgebra  $R^*[[t]]$  se denomina álgebra de funciones generatrices exponenciales.

Ejercicio 7. Muéstrese que las álgebras  $\bar{R}^*[[t]]$  y  $R^*[[t]]$  son isomorfas.

De nuevo con el fin de realizar la construcción algebraica de las  $r$ -muestras ordenadas, examinemos el álgebra  $\bar{R}^*(x; t) = (R[x_1, x_2, \dots])^* [[t]]$  de series de potencias exponenciales sobre el álgebra  $\bar{R}[x_1, x_2, \dots]$  de polinomios con variables no conmutables, la cual llamaremos álgebra numeradora exponencial, y el álgebra  $R^*(x; t) = (R[x_1, x_2, \dots])^* [[t]]$  de series de potencias exponenciales sobre el álgebra  $R[x_1, x_2, \dots]$  de polinomios habituales que llamaremos álgebra numeradora exponencial reducida. Denotemos con  $\bar{T}^*$  la aplicación de  $\bar{R}^*(x; t)$  en  $R^*[[t]]$  que reemplaza todos los  $x_i$  por 1.

Ejercicio 8. Demuéstrese que  $\bar{T}^*$  es un operador lineal multiplicativo.

Designemos con  $U$  la aplicación que traslada una serie de  $\bar{R}^*(x; t)$  en la misma serie de  $R^*(x; t)$ , es decir, que permite que las variables  $x_i$  conmuten entre sí.

Ejercicio 9. Demuéstrese que  $U$  es un operador multiplicativo lineal.

Designemos con  $T^*$  la aplicación  $R^*(x; t)$  en  $R^*[[t]]$  que reemplaza todos los  $x_i$  por 1.



Ejercicio 10. Demuéstrase que  $T^*$  es un operador multiplicativo lineal.

Veamos la aplicación  $V: R^*(x; t) \rightarrow R^*(x; t)$ , la cual todo monomio  $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$  con la especificación  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  (esto quiere decir que  $x_1$  se encuentra  $\lambda_1$  veces,  $x_2$ ,  $\lambda_2$  veces, etc.) en el coeficiente de  $t^k/k!$  lo transforma en el polinomio

$$\frac{\lambda_1! \dots \lambda_n!}{r!} \sum x_{j_1} \dots x_{j_r}$$

donde la suma se toma respecto de todas las permutaciones  $(j_1, \dots, j_r)$  de los elementos  $i_1, \dots, i_r$ .

Ejercicio 11. Demuéstrase que  $V$  es un operador lineal, mas la propiedad de multiplicatividad para él no tiene lugar.

Ejercicio 12. Demuéstrase que  $UV$  es un operador idéatico sobre el álgebra  $R^*(x; t)$ .

A toda  $r$ -permutación  $i_1 i_2 \dots i_r$  de elementos  $1, \dots, n$  con repeticiones pongamos en correspondencia en el álgebra numeradora exponencial un monomio  $x_{i_1} \dots x_{i_r} t^r / r!$ . La serie correspondiente  $p(x_1, x_2, \dots; t)$  para la clase dada de permutaciones se llamará *numerador exponencial* de dicha clase. La imagen  $U_p(x_1, x_2, \dots; t)$ , al actuar el operador  $U$ , la llamaremos *numerador exponencial reducido* de la clase dada de permutaciones, y la serie  $T^* p(x_1, x_2, \dots; t)$ , *función generatriz exponencial*.

EJEMPLO 6. Hállense el numerador exponencial, el numerador exponencial reducido y la función generatriz exponencial para una  $r$ -permutación de  $n$  elementos.

El numerador exponencial ya lo hemos encontrado en la forma (6); el numerador exponencial reducido es el polinomio

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i t),$$

y la función generatriz exponencial para el número de  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos la hemos hallado en la forma de (7).

EJEMPLO 7. Hállense el numerador exponencial, el numerador exponencial reducido y la función generatriz exponencial para las  $r$ -permutaciones con repeticiones del tipo  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de  $n$  elementos.

Por  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ -permanente (véase [42]) de una  $(r \times n)$ -matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

con los elementos del anillo  $R$  se entenderá un elemento

$$\text{Per}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} A = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ri_r}$$

donde la suma se toma respecto de todas las  $r$ -permutaciones  $(i_1, \dots, i_r)$  de elementos  $1, \dots, n$  con la repetición del tipo  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , o bien, dicho de otro modo, en el producto pueden figurar  $\lambda$  elementos de la columna  $i$  sólo en el caso en que  $\lambda \in \Lambda_i$  si la suma tiene un conjunto vacío de sumandos,

entonces pongámosla igual a cero. Ahora podemos escribir el numerador exponencial buscado en la forma

$$p(x_1, x_2, \dots; t) = \sum_{r=0}^{\infty} \text{Per}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) X_{r,n} \frac{t^r}{r!},$$

donde  $X_{r,n}$  es una  $(r \times n)$ -matriz con  $r$  filas iguales  $(x_1, \dots, x_n)$ . El numerador exponencial reducido  $Up(x_1, x_2, \dots; t)$  puede representarse ahora del modo siguiente:

$$Up(x_1, x_2, \dots; t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_n = r \\ r_1 \in \Lambda_1, \dots, r_n \in \Lambda_n}} \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \frac{t^r}{r!}, \quad (9)$$

de donde

$$Up(x_1, x_2, \dots; t) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\lambda \in \Lambda_i} x_i^\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!} \right). \quad (10)$$

Por fin, la función generatriz exponencial tiene la forma

$$\tilde{T}_p^*(x_1, x_2, \dots; t) = T^* Up(x_1, x_2, \dots; t) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\lambda \in \Lambda_i} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \right),$$

por lo cual

$$p(1, 1, \dots; t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_n = r \\ r_1 \in \Lambda_1, \dots, r_n \in \Lambda_n}} \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} \frac{t^r}{r!}.$$

De aquí llegamos a que el número de  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos con repeticiones del tipo  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$  es igual a

$$\sum_{\substack{r_1 + \dots + r_n = r \\ r_1 \in \Lambda_1, \dots, r_n \in \Lambda_n}} \frac{r!}{r_1! \dots r_n!}.$$

Podemos hallar también el numerador exponencial partiendo del numerador exponencial reducido (10), al representarlo en la forma canónica (9) y al aplicar el operador lineal  $V$ .

**EJEMPLO 8.** Hállense el numerador exponencial, el numerador exponencial reducido y la función generatriz exponencial para las  $r$ -permutaciones con repeticiones ilimitadas de  $n$  elementos.

En este caso, en las condiciones del ejemplo antecedente  $\Lambda_i = N_0$  para  $i = 1, \dots, n$ , y

$$\text{Per}(N_0, \dots, N_0) X_{r,n} = (x_1 + \dots + x_n)^r.$$

Por eso el numerador exponencial tiene la forma de un exponente

$$p(x_1, x_2, \dots; t) = \sum_{r=0}^{\infty} (x_1 + \dots + x_n)^r \frac{t^r}{r!} = \exp((x_1 + \dots + x_n)t).$$

La misma forma tiene en este caso el numerador exponencial reducido, mientras que la función generatriz exponencial se obtiene en la siguiente forma

$$p(1, 1, \dots; t) = \exp(nt) = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{t^r}{r!}.$$

Así pues, el número de  $r$ -permutaciones con repeticiones ilimitadas de  $n$  elementos es igual a  $n^r$ , lo que concuerda con el resultado del § 1.3. La forma de la función generatriz de este ejemplo predetermina precisamente el término "exponencial" que se usa en la teoría analítica de enumeraciones de las  $r$ -permutaciones.

EMPLO 9. Hállense el numerador exponencial, el numerador exponencial reducido y la función generatriz exponencial para las  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos con repeticiones, donde cada elemento ha de aparecer por lo menos una vez.

Para este caso, en las condiciones del ejemplo 7 tenemos  $\Lambda_i = \mathbf{N}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , por consiguiente, el numerador exponencial reducido tendrá la forma

$$p^*(x_1, x_2, \dots; t) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(x_i t)^\lambda}{\lambda!} \right) = \prod_{i=1}^n (\exp(x_i t) - 1).$$

Ahora podemos escribir la función exponencial generatriz:

$$\begin{aligned} p^*(1, 1, \dots; t) &= (e^t - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{t(n-k)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r, \end{aligned}$$

los números correspondientes, por lo tanto, son iguales a

$$p(n, r) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r. \quad (11)$$

Por fin, el numerador exponencial puede ser determinado con ayuda del operador lineal  $V$ :

$$p(x_1, x_2, \dots; t) = V p^*(x_1, x_2, \dots; t) = V \prod_{i=1}^n (e^{x_i t} - 1).$$

**Ejercicio 13.** Hállense el numerador exponencial, el numerador exponencial reducido y la función generatriz exponencial para las  $r$ -permutaciones con repeticiones de  $n$  elementos, donde cada elemento puede aparecer sólo un número par de veces.

La función generatriz de Dirichlet para una sucesión de números  $a = (a_1, a_2, \dots)$  es una serie formal

$$D_a(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{r^t}.$$

Determinemos, igual que lo hicimos anteriormente, las operaciones de adición y multiplicación para estas series. Se llamará suma de  $D_a(t)$  con  $D_b(t)$  a la serie

$$D_a(t) + D_b(t) = D_c(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^t}, \quad b = (b_1, b_2, \dots), \quad \dots$$

donde  $c_r = a_r + b_r$ , y producto de las series mencionadas, a la serie siguiente:

$$D_a(t) \times D_b(t) = D_d(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{d_r}{r^t},$$

donde

$$d_r = \sum_{ij=r} a_i b_j = \sum_{i|r} a_i b_{r/i}$$

(la adición se realiza según los divisores enteros  $r$ ). De aquí se ve con facilidad que  $O = (0, 0, \dots)$  define el cero con relación a la adición;  $e = (1, 0, 0, \dots)$  define la unidad con relación a la multiplicación;  $D_e(t) = 1$ ; el elemento inverso respecto de la multiplicación  $D_a^{-1}(t)$  se busca a partir de la igualdad

$$D_a(t) \times D_a^{-1}(t) = D_e(t) = 1,$$

o bien, que es lo mismo, del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 a_1' &= 1, \\ a_2 a_1' + a_1 a_2' &= 0, \\ a_3 a_1' + a_2 a_2' + a_1 a_3' &= 0, \\ a_4 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' + a_1 a_4' &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

de donde tenemos, en particular:  $a_1' = \frac{1}{a_1}$ ,  $a_2' = -\frac{a_2}{a_1^2}$ ,  $a_3' = -\frac{a_3}{a_1^2}$ ,  $a_4' = \frac{a_2^2}{a_1^3} - \frac{a_4}{a_1^2}$ , etc., es decir, es necesaria y suficiente la invertibilidad del elemento  $a_1$ . No es difícil comprobar que la totalidad de funciones generatrices de Dirichlet es también un anillo. Si definimos la multiplicación natural de la serie  $D_a(t)$  por un número real, dicho anillo será el álgebra  $\mathbf{R}\{t\}$

sobre el campo  $\mathbf{R}$ . El álgebra de Dirichlet  $D(\mathbf{R})$  de sucesiones, isomorfa a la primera, se determina de un modo análogo.

La noción de función generatriz de Dirichlet surgió en la teoría de los números, donde es de amplio uso la zeta función de Riemann:

$$\xi(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^t}.$$

Las tres formas de las funciones generatrices introducidas más arriba son fundamentales para el análisis combinatorio, pero están lejos de ser únicas. La diversidad de las formas que tienen funciones generatrices, se debe a los diversos planteamientos de los problemas. Veamos, como ejemplo, un problema sobre la construcción de las funciones generatrices para alojamientos y llenados, a saber, el problema del tipo  $(A_2)$  (véase § 1.4).

Se tienen un  $n$ -conjunto de diferentes elementos y un  $m$ -conjunto de diferentes células de especificación  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ . Se requiere construir la función generatriz para el número de alojamientos de  $n$  elementos en  $m$  células. Supongamos que el símbolo

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

significa que en la  $i$ -ésima célula se alojan  $n_i$  elementos,  $i = 1, \dots, m$ .

Si  $n = 1$ , es decir, si se tiene sólo un elemento, entonces el correspondiente símbolo de alojamiento es  $x_i$ , siempre que el elemento está colocado en la  $i$ -ésima célula,  $i = 1, \dots, m$ . De conformidad con la regla de la suma, la posibilidad de alojar un elemento en cualquiera de  $m$  células se describe por el polinomio

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m.$$

Si se tienen  $n$  elementos, de los cuales cada uno puede ser colocado en cualquiera de  $m$  células, entonces el polinomio correspondiente será

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n,$$

mientras que la correspondiente función generatriz se representará por una función exponencial

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n \frac{t^n}{n!} = \exp\left(t \sum_{i=1}^m x_i\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^m t x_i\right) = \prod_{i=1}^m \exp(t x_i). \end{aligned}$$

Si se trata sólo del número de alojamientos posibles, suponemos  $x_i = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , y, en este caso, la función generatriz adopta la forma

$$E(t) = \exp(mt).$$

De acuerdo con el teorema polinomial tenemos:

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^n = \sum \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m},$$

de donde obtenemos que el número de alojamientos de  $n$  diferentes elementos en  $m$  diferentes células con una  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ -especificación será igual a

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!}.$$

### 2.3. APARATO OPERACIONAL DEL MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

El uso de las funciones generatrices, permite enfocar con un grado suficiente de generalidad problemas combinatorios del tipo enumerativo. Sin embargo, las funciones generatrices, construidas para diferentes tipos de muestras resultaron ser, en la mayor parte bastante engorrosas. Por esta razón, para una notación más cómoda de las funciones generatrices se emplean operadores especiales, cálculos simbólicos y números y funciones especiales.

Sea una sucesión  $a = (a_0, a_1, \dots)$ , la que se escribirá de otro modo:  $a = a(n)$ , es decir, como función de un argumento de número entero  $n(n = 0, 1, 2, \dots)$ . Para el conjunto de sucesiones  $\{a(n)\}$  se emplean con mayor frecuencia los siguientes operadores especiales:

a) el operador de desplazamiento  $E$ :

$$Ea(n) = a(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ E^{-1}a(n) = a(n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad E^{-1}a(0) = 0;$$

b) el operador de diferencia  $\Delta$ :

$$\Delta a(n) = a(n+1) - a(n);$$

c) el operador mediador  $\delta$ :

$$\delta a(n) = \frac{a(n-1) + a(n+1)}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \delta a(0) = \frac{a(1)}{2}.$$

Estos operadores están unidos por medio de ciertas relaciones, por ejemplo:

$$\Delta a(n) = (E - I)a(n), \\ \delta a(n) = \frac{1}{2}(E + E^{-1})a(n),$$

donde  $I$  es un operador idéntico.

Las reiteradas aplicaciones de los operadores a los elementos de la sucesión pueden conducir a ciertas fórmulas útiles y cómodas. Por ejemplo, denotemos con  $n^r$  una sucesión con término general  $a(n) = n^r$ . La notación

$Ln^r$ , en la que  $L$  es un operador lineal en el conjunto de sucesiones se entenderá como  $(La)(n)$ , donde  $a(n) = n^r$ . Entonces,

$$E^n(0) = n; E^n(0^r) = n^r; \Delta 0^r = 1^r - 0^r = 1^r; \\ \Delta^2 0^r = 2^r - 2; \Delta^3 0^r = 3^r - 3 \cdot 2^r + 3,$$

etc. Los números  $\Delta^n 0^r$  llevan el nombre de *De Morgan*.

Como un ejemplo de empleo de los operadores en las fórmulas combinatorias aduzcamos el problema sobre el número de  $r$ -permutaciones con repeticiones de un  $n$ -conjunto a condición de que cada elemento aparezca no menos de una vez.

Reduzcamos el número  $p(n, r)$ , obtenido en el § 2.2, a la forma (11) del modo siguiente:

$$p(n, r) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i E^{n-i} 0^r = (E-1)^n 0^r = \\ = \Delta^n 0^r.$$

Demostremos que

$$\Delta^n 0^{r+1} = n \Delta^n 0^r + n \Delta^{n-1} 0^r.$$

En efecto,

$$\Delta^n 0^{r+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^{r+1} = n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r - \\ - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r i.$$

El primer sumando no es otra cosa que  $n \Delta^n 0^r$ , lo que se deduce con toda evidencia de lo expuesto anteriormente. En lo que se refiere al segundo sumando, está claro que al realizar la sustitución  $i = j + 1$ , obtenemos

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^r i = - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} (-1)^j (n-j-1)^r (j+1) \\ = - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n(n-1)! (j+1)}{(j+1)! (n-1-j)!} (-1)^j (n-j-1)^r = \\ = -n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j (n-1-j)^r = -n \Delta^{n-1} 0^r.$$

**Ejercicio 1.** Demuéstrese que el número de  $r$ -permutaciones de  $n$  elementos con repeticiones pares (incluido 0) ilimitadas es igual a  $\delta^n 0^r$ .

Las repeticiones frecuentes de las mismas expresiones condujeron a la aparición de números y funciones especiales. Los números especiales, por

ejemplo, se descubren y vuelven a descubrir en los diferentes apartados de las matemáticas: en el cálculo de las diferencias finitas, en la teoría de los números, en la teoría de las probabilidades y en la estadística matemática. He aquí algunos datos sobre dichos números.

Analicemos la factorial inferior  $(t)_n = t(t-1)\dots(t-n+1)$  como una función generatriz:

$$(t)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)t^k, \quad n > 0.$$

Los coeficientes  $s(n, k)$  en este desarrollo se denominan *números de Stirling de primer género*. Por cuanto  $(t)_k$  es un polinomio de grado  $k$ , entonces, podemos desarrollar  $t^n$  según el sistema de polinomios  $(t)_0, (t)_1, \dots, (t)_n$ :

$$t^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(t)_k, \quad n > 0. \quad (1)$$

Los coeficientes  $S(n, k)$  se denominan *números de Stirling de segundo género*. Realicemos una definición adicional para ambos géneros de números:

$$(t)_0 = t^0 = s(0, 0) = S(0, 0) = 1.$$

Los números de Stirling se encuentran en muchos problemas. Volvamos, por ejemplo, al problema examinado más arriba sobre el número de  $n$ -permutaciones con repeticiones de  $k$  elementos a condición de que cada elemento figure en las muestras mencionadas por lo menos una vez (véase el ejemplo 9 del § 2.2). Resulta que la función generatriz en este caso tiene la forma

$$\begin{aligned} (e^t - 1)^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i e^{t(k-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^k 0^n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Recordemos que este problema admite su interpretación como un problema sobre el número de alojamientos de  $n$  diferentes elementos en  $k$  células distinguibles tales que no queden células vacías. Para cualesquiera  $t \geq n$  naturales tenemos

$$\begin{aligned} t^n &= E^t 0^n = (1 + \Delta)^t 0^n = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} \Delta^k 0^n = \sum_{k=0}^t (t)_k \frac{\Delta^k 0^n}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^n (t)_k \frac{\Delta^k 0^n}{k!}, \end{aligned}$$

puesto que  $\Delta^k 0^n = 0$  para  $k > n$  ( $\Delta^k 0^n$  es el número de  $n$ -permutaciones de  $k$  elementos con repeticiones, donde cada elemento figura no menos de 1 vez). Por cuanto el polinomio de grado  $n$  cuenta con  $n$  raíces, entonces la



igualdad

$$t^n = \sum_{k=0}^n (t)_k \frac{\Delta^k 0^n}{k!}$$

será válida para todos los valores reales de  $t$ . Al tener presente el desarrollo (1), obtenemos

$$\Delta^k 0^n = k! S(n, k).$$

Esto quiere decir que el número de alojamientos de  $n$  elementos diferentes en  $k$  células distinguibles, cuando ninguna célula queda vacía (problema del tipo (A)), es igual a  $k! S(n, k)$ , y el correspondiente número para las células indistinguibles (problema del tipo (C)) (o lo que es lo mismo, el número de particiones de un  $n$ -conjunto en  $k$  partes no vacías) es igual a  $S(n, k)$ .

Los números de Stirling se encuentran a menudo en los razonamientos combinatorios, por lo cual daremos a conocer algunas observaciones más.

Se pueden obtener recurrencias útiles para dichos números, por ejemplo:

a) de  $(t)_{n+1} = (t-n)(t)_n$  se deduce

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k);$$

$$\begin{aligned} \text{b) } t^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1, k)(t)_k = t \sum_{k=0}^n S(n, k)(t)_k = \\ &= \sum_{k=0}^n S(n, k)((t)_{k+1} + k(t)_k), \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k).$$

Con una de las dos expresiones

$$(t)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)t^k, \quad t^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(t)_k$$

sustituiremos la otra:

$$t^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) \sum_{m=0}^k s(k, m)t^m = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k S(n, k)s(k, m)t^m.$$

Al igualar los coeficientes de las mismas potencias de  $t$ , obtenemos

$$\sum_{k=m}^n S(n, k)s(k, m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

El número  $\delta_{n,m}$  se denomina *delta de Kronecker*.

He aquí una información acerca de los otros números especiales.

Se llaman de *Fibonacci* los números  $f(n)$ , donde

$$f(0) = f(1) = 1, f(n) = f(n-1) + f(n-2), n \geq 2.$$

Su función generatriz tiene la forma:

$$F(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + 8t^5 + 13t^6 + \dots$$

Si se toma en consideración la relación recurrente, llegamos a la siguiente expresión analítica para la función generatriz:

$$F(t) = 1 + t + (f(1) + f(0))t^2 + \dots + (f(n-1) + f(n-2))t^n + \dots = 1 + (t + t^2)F(t),$$

de donde

$$F(t) = (1 - t - t^2)^{-1}.$$

Esta función puede ser representada también en la forma

$$F(t) = ((1 - at)(1 - bt))^{-1}, \quad (2)$$

donde  $a$  y  $b$  se hallan de las correlaciones

$$a + b = 1, ab = -1,$$

de donde

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Al desarrollar (2) en fracciones simples, obtenemos

$$F(t) = \frac{\alpha}{1 - at} + \frac{\beta}{1 - bt}, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \beta = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

( $\alpha$  y  $\beta$  se hallan por el método de coeficientes indeterminados). De aquí obtenemos la fórmula de Binet

$$f(n) = \alpha a^n + \beta b^n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Los números de Fibonacci forman una sucesión específica que se encuentra a menudo en los problemas combinatorios. Por ejemplo, el número de Fibonacci  $f(n)$ ,  $n \geq 1$ , es el número de  $(n-1)$ -permutaciones de ceros y unidades que no contienen dos ceros seguidos.

De perfeccionamiento ulterior del aparato de funciones generatrices sirve el empleo del cálculo simbólico de Blissar. Demos a conocer la versión rígida del mismo que se basa en las ideas de Mullin y Rota [43] referentes a la utilización del aparato de operadores lineales con el objeto de fundamentar el cálculo de Blissar.

Recordemos que un operador lineal que actúa de un espacio vectorial en el campo sobre el cual está construido dicho espacio se denomina *funcional lineal*.

La idea fundamental del cálculo de Blissar consiste en la operación "de alzamiento de los subíndices": la función generatriz exponencial

$$E_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

de una sucesión  $a = (a_0, a_1, \dots)$  se sustituye por la serie

$$\exp(at) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{t^n}{n!}$$

y después de realizar las transformaciones indispensables con la participación de esta serie, las potencias se sustituyen de nuevo por los subíndices (en lugar de  $a^n$  escribimos  $a_n$ ). Con el fin de fundamentar estas transformaciones introduzcamos el álgebra  $\mathbf{R}^*(a; t) = (\mathbf{R}[a])^*[[t]]$  de series exponenciales formales con los coeficientes en el álgebra de polinomios  $\mathbf{R}[a]$  de la variable  $a$ , y la funcional lineal  $L_a: \mathbf{R}[a] \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $L_a a^n = a_n$ , prolongada, naturalmente, hasta el operador lineal  $L_a: \mathbf{R}^*(a; t) \rightarrow \mathbf{R}^*[[t]]$ , de suerte que  $L_a \exp(at) = E_a(t)$ .

EjemPlo 1. Veamos una sucesión de los números de Bernoulli  $B = (B_0, B_1, \dots)$ , definida por su función exponencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Entonces, para la funcional lineal  $L_B: \mathbf{R}[B] \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $L_B B^n = B_n$ , tenemos

$$L_B \exp(Bt) = \frac{t}{e^t - 1}. \quad (3)$$

De aquí tenemos

$$\begin{aligned} t &= L_B(\exp((B+1)t) - \exp(Bt)) = L_B\left(\sum_{n=0}^{\infty} ((B+1)^n - B^n) \frac{t^n}{n!}\right) = \\ &= L_B\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} B^r\right) \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} B_r\right) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

y obtenemos, de este modo, la fórmula recurrente

$$\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} B_r = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n = 0, 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Sustituyendo en (3)  $t$  por  $-t$ , obtenemos

$$L_B \exp(-Bt) = \frac{-t}{e^{-t} - 1} = \frac{te^t}{e^t - 1} = L_B \exp((B+1)t).$$

Igualando los coeficientes de las potencias de  $x$ , tenemos

$$L_B(B+1)^n = L_B(-B)^n,$$

es decir,

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r = (-1)^n B_n. \quad (4)$$

De (3) y (4) obtenemos, ahora, que  $B_n = (-1)^n B_n$  para  $n \neq 1$ , y  $B_1 = -B_1 - 1$ . Por consiguiente,  $B_1 = -1/2$ ,  $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$ .

**Ejercicio 2.** Demuéstrase que en el álgebra  $\mathbb{R}^*(a; t)$  tienen lugar las propiedades de permutabilidad de los operadores lineales  $D$ ,  $\int$  y  $L_a$ :

1.  $D L_a = L_a D$ ;
2.  $\int L_a = L_a \int$ .

Analicemos ahora el caso cuando en las expresiones que se consideran participan dos sucesiones  $a = (a_0, a_1, \dots)$  y  $b = (b_0, b_1, \dots)$ . Entonces, para cada una de ellas construimos su funcional lineal:  $L_a: a^n \rightarrow a_n$ , y  $L_b: b^n \rightarrow b_n$  (trabajamos ya en el álgebra  $\mathbb{R}^*(a, b; t) = (\mathbb{R}[a, b])^*[[t]]$  con polinomios de dos variables que actúan en calidad de coeficientes). Veamos, por ejemplo, la sucesión  $c = (c_0, c_1, \dots)$  que representa su convolución binomial. Suponiendo que  $L_a(p(b)a^n) = p(b)L_a a^n$  para cualquier polinomio  $p(b)$  (y, análogamente, para  $L_b$ ), tenemos

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} = L_a L_b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = L_a L_b (a+b)^n.$$

Introduciendo la funcional lineal  $L_c: c^n \rightarrow c_n$ , obtenemos de aquí

$$L_c c^n = L_a L_b (a+b)^n.$$

Para el producto de funciones generatrices exponenciales correspondientes tenemos

$$\begin{aligned} L_c \exp(ct) &= E_a(t) \cdot E_b(t) = \\ &= L_a L_b \exp(at) \exp(bt) = L_a L_b \exp((a+b)t). \end{aligned}$$

La dificultad principal del cálculo clásico de Blissard consistía en que, al considerar la convolución

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$$

después de alzar los subíndices:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k a^{n-k}$$

era necesario prohibir la multiplicación  $a^k a^{n-k} = a^n$ , puesto que dicha operación conduciría a un resultado absurdo:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = 2^n a_n.$$

Siguiendo las ideas de Guinand [44], esta posibilidad la eliminamos aquí exigiendo que, al alzar los subíndices de las convoluciones de las sucesiones iguales, se introduzcan para ellas diferentes variables. En el caso dado tomamos  $L_a : a^n \rightarrow a_n$  y  $L_{a'} : (a')^n \rightarrow a_n$ . Entonces

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = L_a L_{a'} (a + a')^n.$$

**EJEMPLO 2.** Demostremos la identidad de Euler para la suma de los productos de los números de Bernoulli  $B_n$ :

$$\sum_{r=1}^{n-1} \binom{2n}{2r} B_{2r} B_{2n-2r} = -(2n+1) B_{2n}.$$

Esta identidad puede reescribirse en la forma

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} B_s B_{m-s} = (1-m) B_m \quad (5)$$

(cuando  $m$  es impar, los miembros primero y segundo son nulos). Introducimos las funcionales lineales  $L_B : B^n \rightarrow B_n$  y  $L_{B'} : (B')^n \rightarrow B_n$ , entonces (5) puede escribirse en la siguiente forma:

$$L_B L_{B'} (B - B')^m = (1-m) L_B B^m. \quad (6)$$

Analicemos la función generatriz exponencial para el primer miembro de (6):

$$\begin{aligned} L_B L_{B'} \sum_{m=0}^{\infty} (B - B')^m \frac{t^m}{m!} &= L_B L_{B'} \exp((B - B')t) = \\ &= L_B L_{B'} \exp(Bt) \exp(-B't) = \frac{t}{e^t - 1} \frac{-t}{e^{-t} - 1} = \frac{t^2 e^t}{(e^t - 1)^2} = \\ &= -t^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{L_B \exp(Bt)}{t} \right) = L_B (1 - Bt) \exp(Bt) = \\ &= L_B \left( \sum_{m=0}^{\infty} B^m \frac{t^m}{m!} - \sum_{m=0}^{\infty} B^{m+1} \frac{t^{m+1}}{m!} \right) = L_B \left( \sum_{m=0}^{\infty} (1-m) B^m \frac{t^m}{m!} \right). \end{aligned}$$

De aquí obtenemos la identidad (6), lo que se trataba de demostrar.



Bell  $A_n = (1; y_1, y_2, \dots, y_n) = Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = e^{-y} D_x^n e^y$ ,  $y = y(x)$ .

Dichos polinomios resultaron ser un medio operacional importante en la matemática estadística, y luego en la teoría combinatoria.

Hallemos una relación recurrente para los polinomios de Bell. Introduzcamos la designación abreviada

$$A_n(a) = A_n(a; g_1, \dots, g_n).$$

Entonces

$$A_{n+1}(a) = e^{-ag} D^n (d e^{ag}) = e^{-ag} a D^n (g_1 e^{ag}).$$

De aquí, con arreglo a la fórmula de Leibniz sobre la diferenciación de un producto, tenemos

$$A_{n+1}(a) = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-ag} D^{n-k} e^{ag}) D_k^k = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{n-k}(a) g_k^{k+1} =$$

$$= L_{A(a)} L_R a g [A(a) + g]^n, \quad (7)$$

$$L_{A(a)} [A(a)]^k = A_k(a), \quad L_R g^k = g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Veamos ahora la serie

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!}$$

y la función generatriz exponencial para los polinomios de

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a) \frac{x^n}{n!}$$

De (7) obtenemos

$$DF(x) = aG(x)F(x),$$

de aquí, integrando esta ecuación, obtenemos

$$F(x) = \exp(aG(x)).$$

Ahora, según el teorema polinomial, tenemos

$$A_n(a) = \sum \frac{a^k n!}{k_1 \dots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n},$$

donde  $k = k_1 + \dots + k_n$ , y la suma se toma por todas las soluciones en números enteros de la ecuación  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ . Y, por fin, obtenemos la expresión

$$A_n = A_n(f) = \sum \frac{n! f_k}{k_1 \dots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n},$$

que se conoce como fórmula de F. di Bruno

## 2.4. SOBRE LAS APLICACIONES DEL MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

Según lo dicho más arriba, el método de funciones generatrices se aplica para resolver problemas de carácter enumerativo, es decir, cuando se determina el número de objetos en cierta clase. Los razonamientos combinatorios inmediatos análogos a aquellos que ya se usaron en el cap. 1 jugaban y siguen jugando gran papel en calidad de métodos principales, mas las funciones generatrices introdujeron consigo una mayor generalidad de juicios y ampliaron el dominio de las aplicaciones posibles del análisis combinatorio.

Históricamente las circunstancias tomaron un cariz tal que los métodos combinatorios se aplicaron, ante todo, en la teoría de las probabilidades y en la estadística matemática. Y esto es bien explicable. En la moderna teoría axiomática de las probabilidades estas mismas se interpretan sólo en relación con los espacios de los sucesos elementales. Los últimos son conceptos originarios no definibles y se interpretan como conjuntos puntuales. Si un espacio de sucesos elementales se compone de un conjunto finito o numerable de puntos, dicho espacio se denomina discreto.

Todo el aparato de investigación de los espacios discretos de sucesos elementales es, en esencia, combinatorio. Más aún, podemos hablar sobre las interpretaciones teórico-probabilísticas de una parte determinada del análisis combinatorio.

Efectivamente, las  $r$ -muestras pueden ser interpretadas con ayuda de diferentes esquemas de urna. Los casos en que se admiten repeticiones de los elementos en las muestras, corresponden a los esquemas de urna con retorno. Las funciones generatrices de la forma

$$\sum_{i=1}^s p_i t^{x_i}$$

donde  $\sum_{i=1}^s p_i = 1$ ,  $p_i \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, s$ ) intervienen en la teoría de las probabilidades, cuando una magnitud aleatoria  $X$  (una función sobre el conjunto de sucesos elementales) puede asumir los valores  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , con las probabilidades  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , respectivamente. Una de las funciones generatrices más simples en la teoría de las probabilidades está asociada con el lanzamiento de una moneda y con otros sucesos que pueden tener dos resultados:

$$P(t) = q + pt, \quad p + q = 1, \quad p, q \geq 0$$

(la magnitud aleatoria toma el valor 0 con la probabilidad  $q$ , y el valor 1 con la probabilidad  $p$ ). La función generatriz de lanzamiento de un dado hexaedro con las caídas equiprobables de puntos tiene la forma

$$\frac{1}{6} (t + t^2 + \dots + t^6) = \frac{t(1 - t^6)}{6(1 - t)}$$



Sea  $X_1$  una magnitud aleatoria que toma los valores  $0, 1, 2, \dots, s$  con las probabilidades  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_s$ , respectivamente; supongamos que  $X_2$  es otra magnitud aleatoria que toma los valores  $0, 1, 2, \dots, r$  con las probabilidades  $p'_0, p'_1, p'_2, \dots, p'_r$ , respectivamente. Sus funciones generatrices serán

$$\sum_{i=0}^s p_i t^i \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^r p'_k t'^k.$$

Si dos sucesos son independientes, entonces la probabilidad de su aparición simultánea es igual al producto de sus probabilidades. La correspondiente función generatriz de la magnitud aleatoria bidimensional  $(X_1, X_2)$  tiene por expresión:

$$\begin{aligned} p_0 p'_0 + (p_1 p'_0) t + (p_0 p'_1) t' + (p_1 p'_1) t t' + \dots + (p_s p'_r) t^s t'^r = \\ = \left( \sum_{i=0}^s p_i t^i \right) \left( \sum_{k=0}^r p'_k (t')^k \right). \end{aligned}$$

Si analizamos la distribución de la suma  $X_1 + X_2$ , entonces  $t = t'$ , y el producto tiene por expresión

$$\begin{aligned} \left( \sum_i p_i t^i \right) \left( \sum_k p'_k t^k \right) = p_0 p'_0 + (p_0 p'_1 + p_1 p'_0) t + \\ + (p_1 p'_1 + p_0 p'_2 + p_2 p'_0) t^2 + \dots \end{aligned}$$

Esta construcción se extiende con facilidad a las distribuciones de  $n$  magnitudes aleatorias independientes. En particular, para  $n$  pruebas independientes (con 2 resultados) la función generatriz del número de resultados de una forma determinada será

$$P(t) = (q + pt)^n, \quad p + q = 1, \quad p, q \geq 0.$$

En la teoría de las probabilidades pueden emplearse también funciones generatrices de tipo algo diferente. Por ejemplo, supongamos que cuatro partículas entran volando en una cámara, donde se encuentran centros de atracción con fuerzas proporcionales a 8:9:11:12. Diremos que la función generatriz de las probabilidades de distribución de una partícula por los centros es

$$\frac{8}{40} t_1 + \frac{9}{40} t_2 + \frac{11}{40} t_3 + \frac{12}{40} t_4.$$

En tal caso, si se asegura la independencia de las partículas, la función generatriz de las probabilidades de caída de las cuatro partículas tendrá por expresión:

$$\prod_{i=1}^4 \left( \frac{8}{40} t_1^{(i)} + \frac{9}{40} t_2^{(i)} + \frac{11}{40} t_3^{(i)} + \frac{12}{40} t_4^{(i)} \right).$$

Si nos interesa sólo cuántas partículas caen en los centros dados, la función



Es obvio que la expresión de los momentos factoriales a través de los ordinarios genera los números de Stirling de primer género, y la expresión inversa, los números de Stirling de segundo género;

d) momentos centrales:

$$M_k = L_m(m - m_1)^k, \quad L_m(m^i) = m_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

o bien, de otro modo,

$$M_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m_{k-j} (-m_1)^j, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

El más simple es el segundo momento central llamado de otro modo varianza:  $M_2 = m_2 - m_1^2$ . La idea principal que condujo al análisis de los momentos centrales consiste en que en lugar de la misma magnitud aleatoria se examinan sus desviaciones del valor medio.

He aquí algunos tipos de las funciones generatrices que se usan con mayor frecuencia en la teoría de las probabilidades:

a) para la distribución de las probabilidades:

$$P(t) = \sum_k p_k t^k;$$

b) para los momentos ordinarios;

$$m(t) = L_m \exp(mt) = \sum_k m_k \frac{t^k}{k!}; \quad L_m(m^k) = m_k, \quad k = 0, 1, \dots;$$

c) para los momentos factoriales:

$$(m)(t) = \sum_k (m)_k \frac{t^k}{k!};$$

d) para los momentos binomiales

$$B(t) = \sum_k B_k t^k$$

e) para los momentos centrales:

$$M(t) = L_M \exp(Mt) = \sum_k M_k \frac{t^k}{k!}, \quad L_M(M^k) = M_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Las operaciones de carácter formal sobre diferentes funciones generatrices conducen al descubrimiento de varias relaciones útiles, por ejemplo:

1)  $m(t) = P(e^t)$ . En efecto,

$$m(t) = \sum_k m_k \frac{t^k}{k!} = \sum_k \frac{t^k}{k!} \sum_j j^k p_j = \sum_j p_j \sum_k \frac{(tj)^k}{k!} = \sum_j p_j e^{tj} = P(e^t);$$

2)  $(m)(t) = P(1 + t)$ , lo que se ve de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (m)(t) &= \sum_k (m)_k \frac{t^k}{k!} = \sum_k \sum_j (j)_k p_j \frac{t^k}{k!} = \\ &= \sum_j p_j \sum_k \binom{j}{k} t^k = \sum_j p_j (1 + t)^j = P(1 + t). \end{aligned}$$

## 2.5. TEORÍA DE REDFIELD—POLYA

El tipo de funciones generatrices depende de las condiciones concretas en que se plantean los problemas y su construcción es, en cierto grado, un arte. Durante mucho tiempo no existía un enfoque regular respecto a la construcción de las funciones generatrices. En este sentido han hecho pasos considerables Redfield y Polya, que elaboraron el método de construcción de las funciones generatrices para objetos combinatorios no equivalentes de tipo bastante general. A los objetos enumerados se les atribuían pesos, mientras que la noción de equivalencia se introducía por medio de un grupo de sustituciones. Aclaremos esta cuestión detalladamente.

Veamos un grupo  $G$  de sustituciones de los elementos de un  $n$ -conjunto, es decir, un subgrupo de un grupo simétrico  $S_n$ . Cada sustitución engendra la partición del  $n$ -conjunto en ciclos, es decir, en subconjuntos cuyos elementos son cíclicamente permutables: la cantidad de elementos en un subconjunto se denomina longitud del ciclo. Supongamos, por ejemplo, que la sustitución  $g$  tiene  $k_1$  ciclos de longitud 1,  $k_2$  ciclos de longitud 2, etc. Entonces suele decirse que la sustitución posee estructura cíclica  $(k_1, k_2, \dots)$  y se le pone en correspondencia un monomio  $p(g) = t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots$ . Se llama *índice cíclico* del grupo  $G$  la media de tales monomios tomada de todas las  $g \in G$ :

$$P_G(t_1, t_2, \dots) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots$$

EJEMPLO. Basándonos en la fórmula (4) del § 1.3 para el número de sustituciones que poseen estructura cíclica dada, encontramos el índice cíclico del grupo simétrico  $S_n$  para todas las sustituciones del  $n$ -conjunto:

$$\begin{aligned} P_{S_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!} t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n} = \\ &= \sum \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{t_1}{1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{t_n}{n}\right)^{k_n}, \end{aligned}$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las soluciones en números enteros no negativos de la ecuación  $1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n k_n = n$ , o bien, hablando de otro modo, respecto de todas las particiones del número  $n$ .

A todo grupo de sustituciones se le puede asignar su índice cíclico de

un modo único. Una afirmación contraria no será, sin embargo, cierta. En 1937 Polya construyó dos grupos no isomorfos de sustituciones de orden  $p^3$  ( $p > 2$ , primo) con iguales índices cíclicos.

Sean dados un conjunto finito  $D$  y un grupo finito  $G$  con su aplicación homomorfa  $\pi$  en un grupo simétrico de sustituciones del conjunto  $D$ , es decir, a todo  $g \in G$  le corresponde una sustitución  $\pi_g$  del conjunto  $D$ , y  $\pi_{gg'} = \pi_g \pi_{g'}$  (para cualesquiera  $g, g' \in G$ ). No se requiere que la aplicación  $\pi$  sea un encaje.

La equivalencia de los elementos del conjunto  $D$  se introduce por medio del grupo  $G$ :

$$d_1 \sim d_2 \quad (d_1, d_2 \in D),$$

si existe un elemento  $g \in G$  tal que  $\pi_g d_1 = d_2$ . Todos los requerimientos de equivalencia se cumplen en esta definición. En efecto:

a)  $d \sim d$  para todos los  $d \in D$ , puesto que  $\pi_e$ , donde  $e$  es un elemento unidad de  $G$ , es una sustitución idéntica;

b) de  $d_1 \sim d_2$  se deduce  $d_2 \sim d_1$ , por cuanto de la condición de homomorfismo se desprende que si  $g' = g^{-1}$ , entonces  $\pi_{g'} = (\pi_g)^{-1}$ ;

c) de  $d_1 \sim d_2$  y  $d_2 \sim d_3$  se deduce que  $d_1 \sim d_3$ , puesto que si  $\pi_g d_1 = d_2$  y  $\pi_{g'} d_2 = d_3$ , entonces  $\pi_{g'g} d_1 = \pi_{g'}(\pi_g d_1) = \pi_{g'} d_2 = d_3$ .

En virtud de la definición de equivalencia, el conjunto  $D$  resulta ser partido, con ayuda del grupo  $G$ , en clases de equivalencia (conjuntos transitivos). Los elementos son equivalentes, si y sólo si integran una misma clase de equivalencia.

**Lema de Bernsáid.** El número de clases de equivalencia definidas por el grupo finito  $G$  que actúa sobre el conjunto finito  $D$  es igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g),$$

donde  $|G|$  es el número de elementos en  $G$ ;  $\psi(g)$ , el número de elementos en  $D$ , que son invariantes respecto de  $\pi_g$ , es decir, tales que  $\pi_g d = d$ , mientras que la sumación se hace de todos los elementos  $g \in G$ .

Esta afirmación se anunció por primera vez en las obras de Cauchy, Frobenius y Bernsáid.

*Demostración.* Veamos todos los pares  $(g, d)$ , para los cuales  $\pi_g d = d$  ( $g \in G, d \in D$ ) entonces:

a) podemos fijar  $g$  y contar cuántos  $d$  existen, para los cuales  $\pi_g d = d$ ;

b) para cada  $d$  fijo calculemos todos los  $g$ , para los cuales  $\pi_g d = d$ ; designemos los números obtenidos con  $\eta(d)$ . Está claro que

$$\sum_{d \in D} \eta(d) = \sum_{g \in G} \psi(g).$$

Los elementos  $g \in G$  que fijan  $d$  forman un subgrupo  $G_d$  del grupo  $G$ :

$$|G_d| = \eta(d).$$

Si tomamos otro elemento de la misma clase de equivalencia  $d_1 \sim d$ , entonces el número de elementos  $g$ , para los cuales  $\pi_g d = d_1$ , será también igual a  $|G_d|$ . Efectivamente, se tiene un elemento  $h \in G$ , para el cual  $\pi_h d_1 = d$ , y, por tanto, de que  $\pi_g d = d_1$  se deduce que  $hg \in G_d$ . Así pues, el grupo  $G$  puede ser partido en subconjuntos disjuntos en cada uno de los cuales habrá  $|G_d|$  elementos (un subgrupo  $G_d$  en cada clase contigua izquierda del grupo  $G$ ): cada subconjunto corresponde exactamente a un solo elemento de la clase de equivalencia, en la que figura el elemento  $d$ . De aquí, para hallar  $\eta(d)$ , se debe dividir  $|G|$  por el número de elementos de la clase de equivalencia a la que pertenece  $d$ . Sumamos: a)  $\sum \eta(d) = |G|$ , si la suma se toma de todos los  $d$  que integran una misma clase de equivalencia; b) la suma  $\sum_{d \in D} \eta(d)$  es igual al producto de  $|G|$  por el número de clases de equivalencia, de donde se desprende el resultado que tratábamos de demostrar.

Hemos introducido, pues, el concepto de equivalencia para los elementos a través de un grupo de sustituciones y hemos deducido la fórmula para el número de clases de equivalencia.

Introduzcamos la relación de equivalencia para las aplicaciones. Sean dados los conjuntos finitos  $D$  y  $R$ . Designemos el conjunto de todas las aplicaciones de  $D$  en  $R$  con  $R^D$ . El número de estas aplicaciones es igual a  $|R|^{|D|}$ , puesto que para cada  $d \in D$  existe  $|R|$  posibilidades independientes para la imagen. Supongamos que se dispone de un grupo  $G$  de sustituciones del conjunto  $D$ . Las aplicaciones  $f_1$  y  $f_2$  son equivalentes ( $f_1 \sim f_2$ ), si existe una sustitución  $g \in G$  tal que  $f_1(gd) = f_2(d)$  para todos los  $d \in D$ , o bien  $f_1 g = f_2$ . Las condiciones de equivalencia son: a)  $f \sim f$ ; b) si  $f_1 \sim f_2$ , entonces  $f_2 \sim f_1$ ; c) si  $f_1 \sim f_2$  y  $f_2 \sim f_3$ , entonces  $f_1 \sim f_3$  se cumplen todas. La primera condición se deduce de la existencia en  $G$  de una sustitución idéntica; la segunda, de que junto con  $g$  figura en  $G$  también  $g^{-1}$ ; la tercera, de que si  $g_1 \in G$  y  $g_2 \in G$ , entonces  $g_1 g_2 \in G$ .

La equivalencia de las aplicaciones introducida de este modo parte el conjunto  $R^D$  en clases de equivalencia (*modelos*).

Introduzcamos ahora los pesos. Estos darán la posibilidad de enumerar las clases especiales de los objetos combinatorios. Al principio, a todo elemento  $r \in R$  se le asigna un peso  $\omega(r)$ , donde  $\omega(r)$  es un elemento de anillo conmutativo sobre el campo de números racionales. El peso de la aplicación  $W(f)$ , donde  $f \in R^D$ , se define como un producto

$$W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)),$$

donde  $f(d)$  es la imagen del elemento  $d \in D$  al realizarse la aplicación  $f$ , y  $\omega(f(d))$ , su peso. Las aplicaciones equivalentes tienen pesos iguales. En efecto, si  $f_1 g = f_2$  ( $g \in G$ ), entonces

$$\prod_{d \in D} \omega(f_1(d)) = \prod_{d \in D} \omega(f_1(gd)) = \prod_{d \in D} \omega(f_2(d)).$$

La igualdad es obvia, puesto que tanto el primer producto, como el segundo, difieren sólo en el orden de los factores. Por cuanto todas las aplicaciones  $f$  de la clase de equivalencia  $F$  poseen un mismo peso, asignemos este peso a toda la clase  $F$ , designándolo con  $W(F)$ . La suma de pesos

$$\sum_{r \in R} \omega(r)$$

de los elementos del conjunto  $R$  se llamará (siguiendo a de Buijn) *inventario* (inventory) del conjunto  $R$  y se denotará con  $\text{inv } D$ .

Ahora podemos calcular el inventario del conjunto  $R^D$  de aplicaciones

$$\text{Inv } R^D = \sum_f W(f) = \left( \sum_{r \in R} \omega(r) \right)^{|D|} = (\text{inv } R)^{|D|}.$$

Mostremos que esta afirmación es cierta. En el segundo miembro tenemos  $|R|^{|D|}$  términos. Se puede establecer una correspondencia entre  $|D|$  factores y los elementos del conjunto  $D$ . La elección de un término de cada factor y la formación de un término del desarrollo se interpretan como la aplicación  $f: D \rightarrow R$ . Pero, para cada  $f$  tenemos  $W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$ . Todo el producto es igual a la suma de todos los  $W(f)$ , lo que se requería demostrar.

Si consideramos el conjunto  $S$  de aplicaciones, constantes sobre los subconjuntos  $D_1, \dots, D_k$ , que forman la partición del conjunto  $D$ , entonces

$$\text{inv } S = \prod_{i=1}^k \sum_{r \in R} (\omega(r))^{|D_i|}, \quad (1)$$

lo que se demuestra mediante un razonamiento análogo al aducido más arriba.

Ahora, introducidos todos los conceptos indispensables, podemos enunciar el teorema básico. Se trata en él sobre el paso de los pesos de las funciones a los de los modelos (de las clases de equivalencia).

**Teorema de Polya.** Sean  $D$  y  $R$  los conjuntos finitos dados, y  $G$ , un grupo de sustituciones de los elementos de  $D$ : supongamos, además, que a los elementos  $r \in R$  están asignados los pesos  $\omega(r)$ ; a las aplicaciones  $f \in R^D$  y a los modelos (clases)  $F$ , se les asignan los pesos  $W(f)$  y  $W(F)$ , respectivamente. Entonces

$$\sum_F W(F) = P_G \left( \sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} (\omega(r))^2, \sum_{r \in R} (\omega(r))^3, \dots \right),$$

donde  $P_G$  es el índice cíclico del grupo  $G$ . En un caso particular, cuando todos los pesos son iguales a uno, el número de clases de equivalencia será

$$P_G(|R|, |R|, \dots).$$

**Demostración.** Elijamos de  $R^D$ , es decir, del conjunto de todas las aplicaciones  $f: D \rightarrow R$ , un conjunto  $S$  de aquellas aplicaciones, cuyos pesos son iguales, digamos, a  $\omega$ . Para  $f \in S$  tenemos:  $W(f) = \omega$ , y el número de clases

de equivalencia para el conjunto  $S$  es igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{\omega}(g),$$

donde  $\psi_{\omega}(g)$  denota el número de aplicaciones  $f$ , para las cuales

$$W(f) = \omega, \quad f = fg \text{ (o bien } fg^{-1} = f).$$

En efecto, se ha demostrado que si  $g \in G$  y  $f_1 = f_2 g$ , entonces  $f_1$  y  $f_2$  son de peso igual. Quiere decir, que si  $f_1 \in S$ , también  $f_1 g^{-1} \in S$ . De este modo, a cada  $g \in G$  corresponde una aplicación  $\pi_g$  del conjunto  $S$  sobre sí mismo que se determina por la correlación

$$\pi_g f = fg^{-1}.$$

Si dos elementos  $f_1$  y  $f_2$  del conjunto  $S$  son equivalentes, esta afirmación es equivalente a la siguiente: la existencia del elemento  $g \in G$ , para el cual  $\pi_g f_2 = f_1$ , es equivalente a la existencia del elemento  $g \in G$ , para el cual  $f_2 = f_1 g$ . Ahora resta por alegar el lema de Bernsaid para convencerse de que el número de clases de equivalencia está determinado correctamente.

Todas las clases de equivalencia que integran  $S$  tienen un peso igual a  $\omega$ . Por consiguiente, si multiplicamos

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{\omega}(g)$$

por  $\omega$  y sumamos respecto de todos los  $\omega$ , obtendremos

$$\sum_t W(F) = \frac{1}{|G|} \sum_{\omega} \sum_{g \in G} \psi_{\omega}(g) \omega.$$

Pero, es evidente que

$$\sum_{\omega} \psi_{\omega}(g) \omega = \sum_f^{(g)} W(f),$$

donde la sumación se realiza por todas las  $f \in R^D$  que satisfacen la igualdad  $f = fg$ ; quiere decir

$$\sum_F W(F) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_f^{(g)} W(f). \quad (2)$$

Calculemos ahora  $\sum_f^{(g)} W(f)$ . La sustitución  $g$  divide  $D$  en ciclos. La condición  $f = fg$  significa que

$$f(d) = f(gd) = f(g^2 d) = \dots,$$

es decir,  $f = \text{const}$  para cada ciclo. Es cierta también la afirmación contra-



ria: toda aplicación  $f$ , constante en cada ciclo, satisface la igualdad  $fg = f$ , puesto que  $g(d)$  y  $d$  pertenecen siempre a un mismo ciclo. De modo que si  $D_1, D_2, \dots, D_k$  son los ciclos de  $g$ , entonces, según (1), tenemos

$$\sum_f^{(g)} W(f) = \prod_{i=1}^k \sum_{r \in R} (\omega(r))^{i D_i}.$$

Supongamos que la sustitución  $g$  es de estructura cíclica  $(b_1, b_2, \dots)$ , entonces

$$\sum_f^{(g)} W(f) = \left( \sum_{r \in R} \omega(r) \right)^{b_1} \left( \sum_{r \in R} (\omega(r))^2 \right)^{b_2} \dots$$

Al sustituir esta expresión en (2), obtenemos

$$\sum_F W(F) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{r \in R} \omega(r) \right)^{b_1} \left( \sum_{r \in R} (\omega(r))^2 \right)^{b_2} \dots$$

lo que se trataba de demostrar.

Este teorema fue enunciado por Polya en 1937. Más tarde se notó que el mismo teorema, pero en una forma algo diferente, fue publicado en 1927 por J. Redfield (véase en [12]). Sin embargo, debido a una costumbre ya arraigada el teorema conserva el nombre de Polya.

Posteriormente dicho teorema fue demostrado basándose en suposiciones generales. Según lo observado anteriormente, para las aplicaciones  $f: D \rightarrow R$  la equivalencia se introducía por intermedio del grupo  $G$  de sustituciones de los elementos  $d \in D$ . Si añadimos el segundo grupo  $H$  de sustituciones de los elementos  $r \in R$ , la introducción de la equivalencia con ayuda de ambos grupos  $G$  y  $H$  se realiza del modo siguiente: dos funciones (dos aplicaciones)  $f_1 \in R^D$  y  $f_2 \in R^D$  son equivalentes:  $f_1 \sim f_2$ , si existen elementos  $g \in G$  y  $h \in H$  tales que  $f_1 g = h f_2$ , es decir,

$$f_1(gd) = h f_2(d) \text{ para todos } d \in D.$$

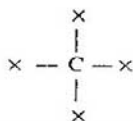
Entre otras generalizaciones del teorema de Polya indiquemos aquella que está ligada con el enlace de los grupos. Sean los grupos de sustituciones  $G$  y  $H$  para los conjuntos  $S$  y  $T$ , respectivamente. En el producto directo de los conjuntos  $S \times T$  formemos las sustituciones de un tipo especial. A saber, elegimos  $g \in G$ ; para cada  $s \in S$  elegimos un elemento  $h_s \in H$ . Estos elementos definen la sustitución:

$$(s, t) \rightarrow (gs, h_s t), \quad s \in S, \quad t \in T.$$

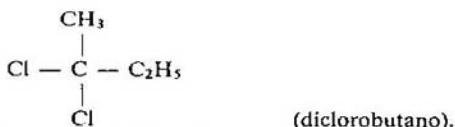
En total hay  $|G| \cdot |H|^{|\mathcal{S}|}$  de tales sustituciones; ellas forman precisamente un grupo denominado por Polya como enlace de los grupos (Gruppenkranz).

La explicación acertada de los teoremas de Polya provista de ejemplos se da en [10]. El desarrollo ulterior ha enriquecido poco la teoría de Redfield — Polya y no la cambió en principio.

Como conclusión, aduzcamos un ejemplo no complejo que explica la aplicación del teorema de Polya. Se trata de la enumeración de los isómeros de las moléculas orgánicas de una estructura dada. Se consideran las moléculas del tipo:



donde C es un átomo de carbono, y en los lugares marcados con cruces pueden encontrarse: CH<sub>3</sub> (metilo), C<sub>2</sub>H<sub>5</sub> (etilo), H (hidrógeno) y Cl (cloro). Por ejemplo,



De modelo matemático de estas moléculas sirve un tetraedro en cuyo centro se dispone el átomo de carbono. El problema de enumeración de las moléculas se interpretará como problema sobre el número de clases de equivalencia *D* (para cuatro vértices):

$$f : D \rightarrow R = \{\text{CH}_3, \text{C}_2\text{H}_5, \text{H}, \text{Cl}\}.$$

El grupo *G* será un grupo de rotaciones del tetraedro compuesto por: una permutación idéntica de los vértices; ocho rotaciones en 120° alrededor de los vértices; tres rotaciones en 180° alrededor de los ejes que pasan por los centros de las aristas que no se intersecan. Entonces

$$P_G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{12} (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2).$$

Supongamos que todos los pesos son iguales a la unidad y obtendremos el número total de moléculas:

$$P_G(4, 4, 4) = 36.$$

Sustituyamos los tipos particulares de las moléculas de la estructura dada: supongamos, por ejemplo, que se debe calcular el número de tales moléculas, en las que no interviene el átomo de hidrógeno. En este caso para CH<sub>3</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>5</sub> y Cl los pesos serán iguales a la unidad, y para H, a cero:

$$P_G(3, 3, 3) = \frac{1}{12} (3^4 + 8 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2) = 15 \text{ moléculas buscadas.}$$

Para poder clasificar las demás 21 moléculas atribuyamos, como lo hicimos antes, los pesos unidad a CH<sub>3</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>5</sub> y Cl, y el peso H al átomo de hidrógeno:

$$P_G(H + 3, H^2 + 3, H^3 + 3) = \frac{1}{12} ((H + 3)^4 + 8(H + 3)(H^3 + 3) + 3(H^2 + 3)^2) = H^4 + 3H^3 + 6H^2 + 11H + 15.$$

Por consiguiente, existen: 1 molécula de  $\text{CH}_4$  (metano); 3 moléculas con 3 átomos de H; 6 moléculas con 2 átomos de H; 11 moléculas con 1 átomo de H; 15 moléculas que no tienen átomos de H.

La teoría de las funciones generatrices es la parte del análisis combinatorio que mayor avance tiene en los aspectos teórico y práctico para la resolución de los problemas prácticos. La composición y las posibilidades de esta teoría ya están bien determinadas.

## Capítulo 3 Métodos lógicos

En este capítulo describiremos procedimientos lógicos característicos que constituyen la base de muchas demostraciones combinatorias.

### 3.1. MÉTODO DE INCLUSIONES Y EXCLUSIONES<sup>1)</sup>

Sean dados un  $n$ -conjunto  $S$  de ciertos elementos y un  $N$ -conjunto de propiedades  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , con la particularidad de que los elementos del conjunto pueden poseer dichas propiedades y pueden no tenerlas. Se requiere hallar el número de elementos que no poseen ninguna de las propiedades mencionadas.

Elijamos una  $r$ -muestra de propiedades  $(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$ . Designemos con  $n(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$  el número de elementos del conjunto  $S$ , cada uno de los cuales posee todas las propiedades elegidas. Denotemos con  $\bar{p}_i$  la ausencia en los elementos de la propiedad  $p_i$ . Así pues, el número de elementos que, digamos, poseen las propiedades  $p_1, p_3, p_5$ , y no poseen las propiedades  $p_2, p_4, p_6$  se escribirá en la forma  $n(p_1, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_4, p_5, \bar{p}_6)$ .

Examinemos al principio dos casos sencillos:

a) se tiene sólo una propiedad  $p$ ; entonces, evidentemente,

$$n(\bar{p}) = n - n(p);$$

b) se tiene un número finito de propiedades  $p_1, p_2, \dots, p_N$  que no son compatibles; tenemos, evidentemente

$$n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) = n - \sum_{i=1}^N n(p_i).$$

Pasemos a un planteamiento más general del problema, cuando los elementos del conjunto pueden poseer combinaciones de las propiedades compatibles. En este caso tiene lugar el

**Teorema 1.** Si están dados un  $n$ -conjunto de elementos y un  $N$ -conjunto de propiedades  $p_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ , entonces

$$\begin{aligned} n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) = & n - \sum_{i=1}^N n(p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} n(p_i, p_j) - \\ & - \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} n(p_i, p_j, p_k) + \dots + (-1)^N n(p_1, p_2, \dots, p_N). \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Se conoce también bajo la denominación de método de criba, método lógico, método simbólico y principio de clasificación cruzada.

*Demostración.* Con el fin de obtener elementos que no posean ninguna de las propiedades mencionadas, hace falta excluir del  $n$ -conjunto los elementos que tienen la propiedad  $p_1$ , luego, los elementos poseedores de la propiedad  $p_2$ , etc., es decir,  $\sum_i n(p_i)$  elementos. En este caso, sin embargo,

los elementos que poseen dos propiedades, digamos  $p_1$  y  $p_2$  resultaron excluidos dos veces (al principio, como poseedores de la propiedad  $p_1$ , y a continuación, como poseedores de la propiedad  $p_2$ ). Quiere decir, que es necesario devolver todos los conjuntos, cuyos elementos poseen dos propiedades, o sea hay que añadir  $\sum_{1 \leq i < j \leq N} n(p_i, p_j)$  elementos. Mas, en tal caso los

elementos que poseen tres propiedades, digamos  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  quedan incluidos, por lo cual se debe sustraer  $\sum_{1 \leq i < j < k \leq N} n(p_i, p_j, p_k)$ , elementos.

Siguiendo razonando de un modo análogo, obtendremos un algoritmo para calcular  $n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N)$  el cual consiste en rechazar y devolver alternativamente los subconjuntos. A esto se debe precisamente una de las denominaciones del método: el de inclusiones y exclusiones. Vamos a seguir este método en adelante.

A parte de los razonamientos sencillos aducidos más arriba, podemos realizar la demostración por inducción respecto de  $N$ . El teorema es válido para  $N = 1$ ;

$$n(p) = n - n(p).$$

De acuerdo con la formulación del teorema, podemos escribir también:

$$n(p_1, p_2, \dots, p_N) = n(\bar{p}_1, p_2, \dots, \bar{p}_{N-1}) - n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N-1}, p_N).$$

Supongamos que el teorema es válido para  $N - 1$  propiedades, es decir,

$$n(p_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N-1}) = n - \sum_i n(p_i) + \sum_{i < j} n(p_i, p_j) - \dots \\ \dots + (-1)^{N-1} n(p_1, p_2, \dots, p_{N-1}).$$

Pasemos al caso en que se tienen  $N$  propiedades. Apliquemos la correlación obtenida para el número  $n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N-1}, \bar{p}_N)$ :

$$n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{N-1}, p_N) = n(p_N) - \sum_i n(p_i, p_N) + \dots \\ \dots + (-1)^{N-1} n(p_1, p_2, \dots, p_N).$$

Al sustraer esta igualdad de la anterior, llegamos a la afirmación del teorema.

El carácter de la demostración es tal que puede ser utilizada para cualquier combinación de las propiedades. En el primer miembro de la igualdad demostrada puede figurar no sólo  $n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N)$ , sino también, por ejemplo,  $n(p_1, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_4)$ . En este caso el teorema se enuncia respecto a una totalidad de las propiedades  $p_2$  y  $p_4$ , con el cumplimiento obligatorio de las

propiedades  $p_1$  y  $p_3$ , del modo siguiente:

$$n(p_1, p_3, \bar{p}_2, \bar{p}_4) = n(p_1, p_3) - n(p_1, p_3, p_2) - \\ - n(p_1, p_3, p_4) + n(p_1, p_3, p_2, p_4).$$

El método se hace más complicado cuando se introducen los pesos de los elementos. Al igual que en el cap. 2, no habrá limitaciones o precisiones algunas para el concepto de peso. Para nosotros los pesos son características numéricas de los elementos de los conjuntos definidas por las condiciones del problema.

Así pues, sea dado un  $n$ -conjunto  $S$  y supongamos que a cada elemento  $s_i \in S$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , se le atribuye el peso  $V(s_i)$ . Del  $N$ -conjunto de propiedades  $p_1, p_2, \dots, p_N$  elijamos una  $r$ -muestra  $p_{i_1}, \dots, p_{i_r}$  y designemos con  $V(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r})$  la suma de pesos de los elementos que poseen todas las  $r$  propiedades elegidas. La suma de los pesos extendida a todas las  $r$ -muestras posibles de propiedades la denotaremos con

$$\sum V(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}) = V(r).$$

Para el caso de  $r = 0$  el símbolo correspondiente  $V(0)$  designará la suma de pesos de todos los elementos del conjunto  $S$ .

El teorema antecedente se enuncia en este caso del modo siguiente.

**Teorema 2.** Si están dados el  $n$ -conjunto  $S$ , cada elemento del cual tiene un peso, y el  $N$ -conjunto de propiedades, entonces la suma  $V_N(0)$  de pesos de los elementos que no poseen ninguna de las propiedades dadas se determina por la fórmula

$$V_N(0) = V(0) - V(1) + V(2) - \dots + (-1)^N V(N).$$

Ha de notarse que el teorema 2 generaliza el teorema 1. Si todos los elementos  $s_i \in S$  son de peso unitario, entonces la suma de los pesos será igual a la suma de los sumandos en la suma. En este caso  $V(0) = N$  y  $V_N(0)$  es igual al número de elementos del conjunto  $S$  que no tienen ninguna de las  $N$  propiedades; la fórmula que se obtiene en tal caso es precisamente la fórmula (1).

El teorema 2 puede ser, a su vez, generalizado.

**Teorema 3.** La suma de pesos de los elementos que poseen exactamente  $r$  propiedades de las  $p_1, p_2, \dots, p_N$  se determina por la fórmula

$$V_N(r) = V(r) - \binom{r+1}{1} V(r+1) + \binom{r+2}{2} V(r+2) - \dots \\ \dots + (-1)^{N-r} \binom{N}{N-r} V(N),$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$V_N(r) = V(r) - \binom{r+1}{r} V(r+1) + \binom{r+2}{r} V(r+2) - \dots$$

$$\dots + (-1)^{N-r} \binom{N}{r} V(N).$$

Los teoremas 2 y 3 se demuestran igual que el teorema 1. Se propone que el lector mismo realice estas demostraciones o se dirija al § 8.3, donde se aducen generalizaciones ulteriores del método de inclusiones y exclusiones.

Estudiemos, a título de ejemplo, un problema sobre desórdenes, llamado también problema de encuentros. Sea un conjunto ordenado finito de números  $1, 2, 3, \dots, n$ . Para estos números pueden formarse las permutaciones  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . El número de todas las permutaciones es  $s = n!$  Entre las permutaciones citadas hay tales, donde ninguno de los elementos conserva su lugar original:  $a_i \neq i, i = 1, 2, \dots, n$ . Las permutaciones de esta índole se llaman desórdenes. ¿Cuántos desórdenes existen?

Un conjunto de  $n$  elementos se examina con relación al conjunto de propiedades de los elementos de quedarse en su lugar:  $p_i \sim \{a_i = i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ . Es evidente que si  $s$  elementos quedan fijados en sus lugares, el número  $N(s)$  de las respectivas permutaciones es igual a  $(n-s)!$ . El número de desórdenes en tal caso se determina con ayuda del método de inclusiones y exclusiones:

$$N(0) = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^s \times \\ \times \binom{n}{s}(n-s)! + \dots = n! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right),$$

lo que representa un número entero, el más próximo a  $n!e^{-1}$ .

Si se trata no de los desórdenes, sino de un número de permutaciones, en las que quedan en sus lugares  $s$  elementos, entonces

$$N(s) = \frac{n!}{s!} \left( 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-s} \frac{1}{(n-s)!} \right).$$

Es fácil observar el desarrollo de los razonamientos durante la resolución: entre  $n$  elementos se eligen  $s$  elementos inmóviles, sirviéndose para ello de  $\binom{n}{s}$  métodos; a continuación, se realiza la multiplicación (según la regla del producto) por el número de desórdenes que se encuentran entre los  $(n-s)$  elementos restantes.

Demos a conocer la interpretación teórico-probabilística del método de inclusiones y exclusiones. El conjunto de elementos se interpreta en estas circunstancias como un espacio discreto de sucesos elementales, simultáneos o incompatibles (excluyentes),  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , y los pesos de los elementos, como probabilidades. La probabilidad de la aparición simultánea de los sucesos  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  se designará con  $P(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ . Para el caso en que los sucesos no aparecen se emplea la llamada ecuación de Poincaré:

$$P(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = [1 - P(a_1)][1 - P(a_2)] \dots [1 - P(a_n)],$$

en la cual podemos abrir paréntesis, rigiéndonos por la regla:  $P(a_i)P(a_j) = P(a_i, a_j)$ . Esta ecuación es una generalización de la fórmula para las probabilidades de los sucesos independientes aplicada al caso de los sucesos dependientes y simultáneos. La fórmula general para el método de inclusiones y exclusiones tiene por expresión:

$$n(p_1, p_2, \dots, p_n) = n - \sum_i n(p_i) + \sum_{i,j} n(p_i, p_j) - \dots \\ \dots + (-1)^n n(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

con la particularidad de que la fórmula se modifica: ambos miembros se dividen por  $n$ , para obtener magnitudes no absolutas, sino relativas, es decir, probabilidades

$$n^{-1}n(p_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) = 1 - n^{-1}\sum_i n(p_i) + n^{-1}\sum_{i,j} n(p_i, p_j) - \dots \\ \dots + (-1)^n n^{-1}n(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Más abajo señalaremos como se aplica el método de inclusiones y exclusiones al cálculo de los permanentes (§ 4.4) y al cálculo de los valores de las funciones especiales que figuran en la teoría de los números (§ 8.3).

### 3.2. SISTEMAS DE REPRESENTANTES DE LOS CONJUNTOS

Se examina aquí uno de los accesos combinatorios a la característica de la estructura de los conjuntos finitos. Ya por denominación se puede concebir que la idea principal consiste en sustituir el sistema de conjuntos por la reunión de sus representantes.

El planteamiento de los problemas de este tipo y los métodos de su resolución dependen de los requerimientos que dichos representantes deben satisfacer.

**Sistemas de representantes distintos (s.r.d.).** Sean un  $n$ -conjunto  $S$  y el conjunto  $P(S)$  de todos los subconjuntos suyos. Supongamos que  $M = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  es una  $m$ -muestra de  $P(S)$ , y  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ , cierta  $m$ -muestra de  $S$ . Si a la muestra  $M$  se le puede poner en correspondencia (no forzosamente de una manera unívoca) una muestra  $a$  tal que los elementos  $a_i, i = 1, 2, \dots, m$ , sean distintos dos a dos y, además,  $a_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, m$ , suele decirse que el elemento  $a_i$  representa el conjunto  $S_i$ , y toda la muestra  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  se denomina sistema de representantes distintos (en forma abreviada, s.r.d.) para  $M$ . Observemos a la vez que si  $i \neq j$ , entonces  $a_i \neq a_j$ , incluso si  $S_i = S_j$ . Si un conjunto aparece varias veces, debe tener cada vez un representante que sea distinto de los demás.

Resulta seguidamente que el s.r.d. puede existir no para todas las colecciones de conjuntos. Si en un sistema finito los conjuntos no son vacíos y no se intersecan, el s.r.d., obviamente, existe. Tomemos un caso más complejo. Por ejemplo, si  $S = (a, b, c, d, e)$ , y  $M$  es una colección de cuatro conjun-



tos  $S_1 = (a, b, c, d)$ ,  $S_2 = (a, b, e)$ ,  $S_3 = S_4 = (b, e)$ , entonces existen dos s.r.d.:  $(c, a, b, e)$  y  $(b, a, e, d)$ . Pero, apenas cambiamos uno de los subconjuntos, por ejemplo, tomamos  $S_2' = (b, e)$  en lugar de  $S_2$  y ya no podremos obtener ningún s.r.d. La respuesta a la pregunta de si existe o no un s.r.d. para una familia dada de conjuntos la da el teorema de P. Hall enunciado por éste no más tarde de 1935. El teorema formula las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del s.r.d.

**Teorema de P. Hall.** Los subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_m$  tienen un s.r.d., cuando y sólo cuando la reunión de cualesquiera  $k$  de estos conjuntos contiene no menos de  $k$  elementos. Dicho de otro modo, el s.r.d. para  $S_1, S_2, \dots, S_m$  existe, si y sólo si  $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_k}$  consta por lo menos de  $k$  elementos, siendo en este caso  $k = 1, 2, \dots, m$ , y  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ , cualquier  $k$ -muestra de  $1, 2, \dots, m$ .

*Demostración.* La necesidad es casi evidente, puesto que la existencia del s.r.d. asegura la presencia de un número necesario de elementos en calidad de representantes distintos. En lo que se refiere a la suficiencia, aduzcamos una formulación perfeccionada que nos da, además, la cota inferior para el número de los propios s.r.d.

**Teorema.** Supongamos que una familia  $M = (S_1, S_2, \dots, S_m)$  satisface la condición necesaria para la existencia de un s.r.d. y que cada uno de los conjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_m$  consta por lo menos de  $t$  elementos. Entonces; a) si  $t \leq m$ ,  $M$  tiene no menos de  $t!$  s.r.d.; b) si  $t > m$ , la familia  $M$  tiene no menos de  $t!/(t-m)!$  s.r.d.

La *demostración* la realizaremos por inducción respecto de  $m$ . Para  $m = 1$  (e, incluso, para  $m = 2$ ) el teorema es evidente. Demostremos que es lícito para cualquier  $m$  finito, partiendo de su validez para  $m' < m$ .

Veamos una (reunión) de cierta  $k$ -muestra de los conjuntos:

$$S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_k};$$

se deben examinar dos casos: uno cuando el número de elementos en la unión es igual a  $k$ , y otro cuando el número de elementos es superior a  $k$ . Empecemos por el segundo caso, cuando la unión en consideración posee no menos de  $k+1$  elementos, cualesquiera que sean  $k: k = 1, 2, \dots, m$ , y el juego  $i_1, i_2, \dots, i_k$  de números  $1, 2, \dots, m$ . Elijamos algún elemento  $a_1 \in S_{i_1}$  y eliminémoslo en  $S_2, S_3, \dots, S_m$ , si él se encuentra en dichos conjuntos. Llegamos de este modo a  $M^* = (S_2^*, S_3^*, \dots, S_m^*)$ . Esta  $(m-1)$ -muestra satisface la condición necesaria para la existencia de un s.r.d., puesto que  $S_{i_1}^* \cup S_{i_2}^* \cup \dots \cup S_{i_k}^*$  contiene no menos de  $k$  elementos y, además,  $M^*$  tiene o bien no menos de  $(t-1)$  s.r.d., si  $t \leq m$  (y, por tanto,  $t-1 \leq m-1$ ), o bien  $(t-1)!/(t-m)!$  s.r.d., si  $t > m$  (y, por tanto  $t-1 > m-1$ ). El resultado buscado se logra, si tomamos en consideración que en  $S_1$  hay por lo menos  $t$  posibilidades de fijar el elemento  $a_1$  y que este elemento constituye, junto con el s.r.d. para  $M^*$ , el s.r.d. para  $M$ .

Volvamos al primer caso en que la demostración realizada no puede

considerarse válida, pues existe una  $k$ -muestra  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}$  tal que  $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_k}$  contiene exactamente  $k$  elementos ( $1 \leq k \leq m-1$ ). Reenumeremos los conjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_m$  de un modo tal que  $S_{i_1}$  se haga  $S_1, S_{i_2}$  se haga  $S_2, \dots$ , y  $S_{i_k}$  se haga  $S_k$ ; escribamos estos conjuntos en el siguiente orden nuevo:

$$S_1, S_2, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots, S_m.$$

Por cuanto  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$  contiene exactamente  $k$  elementos, entonces  $t \leq k$ . Por consiguiente, por hipótesis de inducción,  $(S_1, S_2, \dots, S_k)$  tiene no menos de  $t!$  s.r.d. Tomemos uno de estos s.r.d.:  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , donde  $a_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Eliminemos los elementos  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de  $S_{k+1}, \dots, S_m$ , siempre que se encuentren allí. La  $(m-k)$ -muestra obtenida  $M^* = (S_{k+1}^*, \dots, S_m^*)$  satisface la condición necesaria para que existe un s.r.d. Efectivamente, si esto no es así y si la unión de cierta  $k^*$ -muestra  $S_{k+1}^* \cup \dots \cup S_{k+k^*}^*$  tiene menos de  $k^*$  elementos, entonces la unión

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k \cup \dots \cup S_{k+k^*}$$

tendría menos de  $k + k^*$  elementos, lo que contradice la hipótesis del teorema. Así pues,  $M^*$  tiene por lo menos un s.r.d., y, por consiguiente,  $M$  tiene no menos de  $t!$  s.r.d.

**Algoritmo de elección de un s.r.d.** Prácticamente es muy difícil comprobar si en este caso concreto se cumple o no la hipótesis del teorema de P. Hall. La demostración que acabamos de ofrecer, basada en la inducción matemática completa, no proporciona ninguna indicación que ayude a hallar el s.r.d. Esto no es sorprendente. Los teoremas de existencia aparecen, las más de las veces, cuando resulta difícil o imposible hallar un algoritmo que conduzca a la determinación de la solución. El algoritmo que permite elegir un s.r.d. para un número finito de conjuntos, o mostrar que para el juego dado de conjuntos tal sistema no existe, lo dió M. Hall como demostración del teorema de P. Hall sobre los distintos representantes.

Sean dados  $n$  conjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Se requiere hallar para ellos el s.r.d., o mostrar que tal sistema no existe. Elijamos al azar un elemento del primer conjunto  $a_1 \in S_1$  en calidad de representante de este último. Elegiremos por turno los representantes de otros conjuntos:  $a_2 \in S_2; a_3 \in S_3; \dots$ , preocupándonos sólo de que todos estos representantes sean distintos. Si llevamos este proceso hasta  $a_n \in S_n$  inclusive, obtendremos el s.r.d. buscado.

Puede ocurrir que en un  $r$ -ésimo paso llegaremos a conseguir cierto  $t$ -conjunto  $S_r$ , todos los elementos del cual  $b_1, b_2, \dots, b_t$  ya habían sido elegidos en calidad de representantes de otros conjuntos. Esto, sin embargo, no significa todavía que el s.r.d. no existe. Vamos a tomar, uno tras otro, todos aquellos conjuntos, cuyos representantes son los elementos  $b_i (i = 1, 2, \dots)$ , y eliminar de ellos todos los elementos de la sucesión  $b_1, b_2, \dots, b_t$ , agregando los elementos restantes al final de la sucesión citada. Procedamos de este modo hasta que ocurra una cosa de dos: o bien 1) llegaremos al elemen-

to  $b_i$ , el cual no puede servir de representante, o bien 2) la sucesión se agotará con los elementos  $b_1, b_2, \dots, b_s$  como representantes de los conjuntos.

En el caso 2) podemos estar convencidos de que el s.r.d. no existe. En efecto, los elementos  $b_1, b_2, \dots, b_s$  son representantes de  $s$  conjuntos y, por construcción, cada elemento de estos  $s$  conjuntos se contiene en la sucesión dada. Pero, en tal caso, los  $s$  conjuntos mencionados, y también el conjunto  $S_r$ , forman  $s + 1$  conjuntos que sólo contienen  $s$  elementos distintos, lo que contradice la hipótesis del teorema.

En cambio, si tiene lugar el caso 1), entonces encontramos, en cierta etapa, el elemento  $b_i = b_{i_1} \in S_{j_1}$  ( $i_1 > t$ ) que no ha sido hasta ahora un representante. Esto es testimonio de que como representante de  $S_{j_1}$  ya fue elegido otro elemento  $b_{i_2}$  ( $i_2 < i_1$ ). Si  $i_2 > t$ , entonces el elemento  $b_{i_2}$  pertenece al conjunto  $S_{j_2}$  cuyo representante es  $b_{i_3}$  ( $i_3 < i_2$ ), etc. Surge, pues, una sucesión  $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m}$ , cuyos índices decrecen ( $i_m \leq t$ ), con la particularidad de que cada elemento de esta sucesión integra un conjunto, cuyo representante es el término sucesivo. Sustituyamos los representantes, eligiendo los elementos del modo siguiente:  $b_{i_1}$  para  $S_{j_2}$ ,  $b_{i_2}$  para  $S_{j_3}$ ,  $\dots$ ,  $b_{i_{m-1}}$  para  $S_{j_{m-1}}$ . Como resultado de esta sustitución, el elemento  $b_{i_m}$  se libera para poder ser elegido en calidad de representante de  $S_r$ . Así pues,  $S_1, \dots, S_r$  tienen representantes distintos y podemos seguir la misma senda, teniendo en cuenta o bien la posibilidad de llegar a  $S_n$  y obtener el s.r.d. completo, o bien encontrarse con el caso 2) y establecer que el s.r.d. no existe.

La conclusión sobre el número de s.r.d. se obtiene del algoritmo mencionado como una consecuencia. Efectivamente, si el s.r.d. existe, esto significa que existe también un conjunto, cada elemento del cual puede ser elegido en calidad de su representante en el s.r.d. Esto quiere decir, que si los conjuntos de una familia dada de  $n$  elementos tienen  $t$  o más elementos, entonces existen por lo menos  $t!$  s.r.d., si  $t < n$ , o bien  $t(t-1) \dots (t-n+1)$  elementos, si  $t \geq n$  (por cuanto la elección del primer representante puede realizarse empleando por lo menos  $t$  métodos; al tachar este representante elegido por nosotros en todos los demás conjuntos, llegaremos al sistema de conjuntos  $S_2^*, \dots, S_n^*$ , donde el conjunto menor tiene no menos de  $t-1$  elementos. Continuando así, paso a paso, obtendremos el resultado mencionado).

La condición de que el sistema sea finito es aquí de mucha importancia. Si retiramos esta condición, entonces, para, por ejemplo, un sistema infinito de conjuntos

$$S_0 = \{1, 2, 3, \dots, k, \dots\};$$

$$S_1 = \{1\};$$

$$\dots$$

$$S_k = \{k\};$$

$$\dots$$

no existe un s.r.d., aunque sí existe para cualquier parte de él.

**Otros sistemas de representantes de los conjuntos.** Los problemas de partición de los conjuntos condujeron al concepto de sistemas de representantes comunes. Sean dadas dos particiones diferentes de un mismo conjunto  $S$  en  $k$  componentes no vacías:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k; \quad S = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k.$$

Si existe un subconjunto  $O$  del conjunto  $S$ , compuesto de  $k$  elementos, y si, además, dicho subconjunto es tal que su intersección con cualquiera de las componentes no es vacía:

$$O \cap A_i \neq \emptyset; \quad O \cap B_i \neq \emptyset; \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

éste se denominará *sistema de representantes comunes* (s.r.c.) de las particiones dadas. En este caso cada una de las intersecciones resulta estar compuesta por un solo elemento. Los conjuntos de las particiones primera y segunda, tomados dos a dos y elegidos, si es necesario, de un modo correspondiente, tienen uno y sólo un elemento común, el cual es precisamente su representante común.

No es forzosamente obligatorio, por supuesto, que se cumpla el requerimiento de existencia de un solo elemento común. Pueden plantearse y tomarse en consideración condiciones diferentes: existencia de un número dado de elementos comunes, de un conjunto dado, etc. Por ejemplo, si exigimos que cada elemento  $s_i \in S$  figure no menos de  $k_{1i}$  y no más de  $k_{2i}$  veces ( $k_{2i} \geq k_{1i} \geq 1$ ) en el sistema de representantes comunes, este último se llamará sistema de un número limitado de representantes [28]. Está claro que el problema de s.r.d es un caso particular de tal problema para  $k_{1i} = 0$ ,  $k_{2i} = 1$ .

El otro caso particular en que

$$k_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1, 2, \dots, l; \\ 0 & \text{para } i = l + 1, l + 2, \dots, m; \end{cases}$$

$$k_{2i} = 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m,$$

lleva el nombre de problema sobre la existencia del s.r.d. que contiene el conjunto dado de elementos marginales  $s_1, s_2, \dots, s_l$ .

El criterio de existencia o no existencia del s.r.c. es próximo al criterio que se aplica al s.r.d.

**Teorema.** Dos particiones de un conjunto

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

tienen un s.r.d., cuando y sólo cuando la unión de cualesquiera  $m$  del conjunto  $A_i$  se intersecan no menos que con  $m$  del conjunto  $B_j$ , donde  $m = 1, \dots, k$ .

*Demostración.* La necesidad es obvia, igual que en el caso del s.r.d. La suficiencia se demuestra por reducción a los teoremas sobre el s.r.d.

En efecto, elijamos para cada  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , un conjunto  $S_i$  de todos los índices  $j \in K = \{1, \dots, k\}$  tales que  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ . Obtendremos una  $m$ -muestra  $M = (S_1, S_2, \dots, S_k)$  de subconjuntos del conjunto  $K$ . Para  $M$

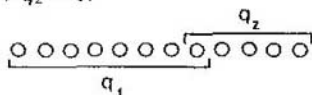
existe el s.r.d. (el criterio enunciado de existencia de un s.r.d. es el criterio de existencia del s.r.d. para  $M$ ). La elección de los distintos representantes da para cada  $B_i$  su  $A_j$ , con la particularidad de que su intersección es no vacía. En esta intersección puede elegirse por lo menos un elemento que sea común para  $A_j$  y  $B_i$ , es decir, su representante común.

El concepto de representantes de los conjuntos y de sistemas de representantes tiene en las matemáticas numerosas y variadas aplicaciones, como son, por ejemplo, los representantes de las clases de equivalencia. El método de sistemas de representantes se usa también en la teoría de las redes, al investigar la admisibilidad de los flujos, y en la teoría de ampliación de los cuadrados latinos.

### 3.3. PRINCIPIOS DE LA TEORÍA DE RAMSEY

La operación de partición de los conjuntos es el fundamento de una cantidad infinita de problemas prácticos. En este párrafo se describe el procedimiento que permite obtener los datos sobre el carácter de las propias particiones y sobre la posibilidad de realizar una partición del tipo prefijado de antemano.

Sea un  $n$ -conjunto  $S$ , cuyos elementos han de distribuirse en dos cajones. ¿Cuál debe ser el número  $n$ , para asegurar que  $q_1$  elementos caigan en el primer cajón, o que  $q_2$  elementos caigan en el segundo? La respuesta es casi evidente:  $n \geq q_1 + q_2 - 1$ .



Así pues, el número mínimo de elementos que aseguran la resolución del problema es igual a

$$N(q_1, q_2; 1) = q_1 + q_2 - 1.$$

Si se plantea un problema de distribución no entre dos, sino entre el mayor número (digamos,  $t$ ) de cajones, siendo  $q_1, q_2, \dots, q_t$  los números correspondientes que caracterizan el llenado requerido de los cajones, entonces

$$N(q_1, q_2, \dots, q_t; 1) = \sum_{i=1}^t q_i - (t - 1).$$

Ramsey [45] demostró en 1930 un teorema en el que generalizó estos resultados particulares. En lugar de la distribución de los elementos unidad del  $n$ -conjunto el teorema analiza la distribución de los  $r$ -subconjuntos del conjunto citado. Designemos con  $S_n$  el conjunto de  $n$  elementos y con  $P_r(S_n)$ , la colección de sus  $r$ -subconjuntos.

**Teorema de Ramsey.** Supongamos que  $r \geq 1$ ,  $q_i \geq r$  ( $i = 1, \dots, t$ ). Existe un número natural mínimo  $N = N(q_1, \dots, q_t; r)$  tal que para cualquier

$n \geq N$  y para toda  $t$ -partición ordenada  $P_r(S_n) = A_1 \cup \dots \cup A_t$ , se encontrará (para cierto  $i \in \{1, \dots, t\}$ ) un  $(q_i, A_i)$ -subconjunto, es decir, un  $q_i$ -subconjunto del conjunto  $S_n$ , cuyos  $r$ -subconjuntos están contenidos todos en  $A_i$ .

Hagamos previamente tres observaciones con el fin de facilitar la comprensión del teorema en su planteamiento y demostración.

1. Los ejemplos aducidos más arriba y referentes a las particiones de los conjuntos representan casos particulares del teorema de Ramsey para  $r = 1$ ,  $P_r(S) = S$ , y el  $(q_i, A_i)$ -conjunto es simplemente un  $q_i$ -subconjunto del conjunto  $A_i$ .

2. Para un caso particular en que  $t = 1$ , tenemos  $N(q_1, r) = q_1$ , lo que es trivial.

3. Si demostramos el teorema de Ramsey para  $t = 2$ , quedará válido también para  $t = 3$ . En efecto, sea

$$P_r(S) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3).$$

Denotemos  $A_2 \cup A_3 = A_2^*$ . Pongamos  $q_2^* = N(q_2, q_3; r)$ . Si  $n \geq N(q_1, q_2^*; r)$ , entonces, o bien  $S$  contiene el  $(q_1, A_1)$ -subconjunto, o bien  $S$  contiene el  $(q_2^*; A_2 \cup A_3)$ -subconjunto. El primer caso corresponde a la afirmación del teorema. En cambio, si tiene lugar el segundo caso, entonces el  $q_2^*$ -subconjunto del conjunto  $S$  contendrá, por hipótesis, o bien el  $(q_2, A_2)$ -conjunto o bien el  $(q_3, A_3)$ -subconjunto. Por lo tanto, nuestra afirmación es lícita. De aquí se deduce que resulta suficiente demostrar el teorema de Ramsey para  $t = 2$ , y, a continuación concluir por inducción, que es válido también para todo  $t > 2$  entero.

La demostración del teorema para el caso de  $t = 2$  empieza escribiendo las siguientes igualdades, considerándolas como iniciales:

$$N(q_1, q_2; 1) = q_1 + q_2 - 1; \quad N(q_1, r; r) = q_1; \quad N(r, q_2; r) = q_2. \quad (1)$$

La primera de estas igualdades ya la conocemos. En la segunda cualquier partición  $A_1 \cup A_2$  lleva o bien al  $(r, A_2)$ -subconjunto, si  $A_2$  es no vacío, o bien al  $(q_1; P_r(S))$ -subconjunto. En este caso  $q_1$  no es inferior a  $r$ . Cualquiera de estos casos corresponde exactamente a la formulación del teorema. Unos razonamientos no complejos mostrarán la validez también de la tercera igualdad. Además,

$$r > 1; \quad q_1 \geq r; \quad q_2 \geq r. \quad (2)$$

Así pues, ya podemos afirmar que existen los números  $N(2, 2, 2)$ ,  $N(3, 2, 2)$ ,  $N(4, 2, 2)$  etc., como también  $N(2, 3, 2)$ ,  $N(2, 4, 2)$ , etc. Las igualdades (1) y las desigualdades (2) sirven de datos iniciales para la demostración del teorema de Ramsey por inducción. El primer paso, pues, lo hicimos. El segundo paso, que da por terminada la demostración, consiste en demostrar la existencia de  $N(q_1, q_2; r)$  a condición de que existen

$$p_1 = N(q_1 - 1, q_2; r); \quad p_2 = N(q_1, q_2 - 1; r); \quad N(p_1, p_2; r - 1).$$

Por cuanto hasta el momento no se logra calcular exactamente  $N(q_1, q_2; r)$ , el sentido de la demostración consiste en estimar este número superiormente, demostrando la desigualdad

$$N(q_1, q_2; r) \leq N(p_1, p_2; r - 1) + 1.$$

En efecto, tomemos un conjunto  $S_n$ , donde  $n \geq N(p_1, p_2; r - 1) + 1$ , y fijemos en él un elemento  $a_0$ ; entonces,  $S_n \setminus \{a_0\} = S_{n-1}$ . Pasemos de la partición  $P_r(S_n) = A_1 \cup A_2$  a la  $P_{r-1}(S_{n-1}) = B_1 \cup B_2$  del modo siguiente: en el conjunto  $S_{n-1}$  tomamos por turno los  $(r - 1)$ -subconjuntos; si la unión de tal subconjunto, digamos, de  $B'$ , y del elemento fijo  $a_0$  integra  $A_1$ , entonces este  $(r - 1)$ -subconjunto  $B'$  lo atribuiremos a la clase  $B_1$ , y si la unión está contenida en  $A_2$ , entonces  $B'$  lo atribuiremos a la clase  $B_2$ .

El conjunto  $S_{n-1}$  tiene no menos de  $N(p_1, p_2; r - 1)$  elementos y para este conjunto el teorema es válido por hipótesis de inducción. Por consiguiente, en él se contiene o bien a) el  $(p_1, B_1)$ -subconjunto, o bien b) el  $(p_2, B_2)$ -subconjunto. Supongamos que tiene lugar el caso a). Esto significa que en  $S_{n-1}$  se contiene el  $p_1$ -conjunto  $T$ , cuyos  $(r - 1)$ -subconjuntos están contenidos todos en  $B_1$ . Pero,  $p_1 = N(q_1 - 1, q_2; r)$ ;  $T \subseteq S_n$ , y en este conjunto  $T$  existe o bien un  $(q_1 - 1)$ -subconjunto, cuyos  $r$ -subconjuntos integran todos  $A_1$ , o bien un  $q_2$ -subconjunto, cuyos  $r$ -subconjuntos integran todos  $A_2$ . Si tiene lugar el último caso, entonces obtendremos el  $q_2$ -conjunto que satisface las condiciones del teorema. Si en cambio, tiene lugar el primer caso, es decir, existe el  $(q_1 - 1)$ -subconjunto, cuyos  $r$ -subconjuntos integran todos  $A_1$ , entonces reunámoslo con el elemento fijo  $a_0$ . Obtendremos el  $q_1$ -conjunto integrado en  $S$ . Veamos sus  $r$ -subconjuntos. Si alguno de ellos no contiene  $a_0$ , será el  $r$ -conjunto que está contenido en  $A_1$ . Si él contiene  $a_0$ , entonces está compuesto por este elemento y el  $(r - 1)$ -subconjunto que integra  $B_1$ . Esto quiere decir que está integrado en  $A_1$ . Hemos obtenido el  $q_1$ -subconjunto del conjunto  $S_n$ , todos los  $r$ -subconjuntos del cual están contenidos en  $A_1$ .

Se ha examinado el caso en que el  $(p_1, B_1)$ -conjunto está contenido en  $S_{n-1}$ . El caso b) se demuestra de una manera análoga. El teorema de Ramsey queda demostrado.

A lo que parece para toda  $t$ -partición y para cualesquiera  $(q_1, q_2, \dots, q_t; r)$  convenientes, se puede determinar mín  $n = N(q_1, q_2, \dots, q_t; r)$ , cuya existencia está asegurada en virtud del teorema de Ramsey. Mas, este trabajo resultó ser extremadamente difícil, pues por ahora no se conoce ningún método para calcular estos números. Para  $t = r = 2$ , todos los números conocidos  $N(q_1, q_2; 2)$  se aducen en la Tabla 3.1 (si no se conocen los valores exactos, se dan las fronteras dentro de las cuales éstos están encerrados):

Los casos en que  $t > 2$  están poco estudiados por ahora. Se sabe, por ejemplo, que

$$\begin{array}{ll} N(3, 3, 3; 2) = 17; & N(5, 5, 5; 2) \geq 257; \\ N(4, 4, 4; 2) \geq 128 & N(6, 6, 6; 2) \geq 906. \end{array}$$

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28 ... 29	36
4	9	18	25 ... 28	34 ... 44			
5	14	25 ... 28	42 ... 55	57 ... 94			
6	18	34 ... 44	57 ... 94	102 ... 169			
7	23						
8	28 ... 29						
9	36						

Aún menos sabemos sobre los valores de los números de Ramsey para  $r > 2$ . Merece la atención el siguiente resultado importante:

$$13 \leq N(4, 4; 3) \leq 15.$$

Pese a las excepcionales dificultades y al avance lento, no cesan los esfuerzos que tienen por objeto determinar los números de Ramsey o de sus estimaciones (superiores e inferiores). Esto se explica por la peculiaridad del problema que admite numerosas interpretaciones y aplicaciones diversas. En la teoría de los grafos, por ejemplo, este problema se interpreta como un problema de coloración de las aristas de los grafos. El propio problema de buscar los números de Ramsey se considera, a menudo, para las clases aisladas de grafos.

Otra dirección, en la que se desarrolla la teoría de Ramsey, representa el estudio de las condiciones de existencia, es decir, de tales restricciones, bajo las cuales los planteamientos generalizados del problema resulten fundamentados, y las demostraciones, factibles.

Los problemas de la teoría de Ramsey se estudian ahora con un elevado grado de generalidad. Supongamos que el símbolo  $\mathcal{R}_k^r(l_1, \dots, l_r)$  significa lo siguiente: si los  $k$ -conjuntos de un  $n$ -conjunto  $S_n$  están partidos en  $r$  clases, entonces para cierto  $i$  existe un  $l_i$ -subconjunto  $L_i \subseteq S_n$  tal que todos los  $k$ -subconjuntos de  $L_i$  integran la  $i$ -ésima clase. En este caso el teorema de Ramsey se enuncia del modo siguiente:

**Teorema.** Para cualesquiera  $k, r, l_1, \dots, l_r$  naturales existe un  $N = N(k, r, l_1, l_r)$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $\mathcal{R}_k^r(l_1, \dots, l_r)$ .

En general, los teoremas de tipo Ramsey tienen la forma de las afirmaciones  $\mathcal{R}_k^r(A, B, C_1, \dots, C_r)$ , donde los símbolos  $A, B, C_1, \dots, C_r$  designan objetos (del conjunto) de estructura determinada. Los últimos pueden ser conjuntos con relaciones de orden sobre ellos, grafos e hipergrafos, espacios vectoriales finitos, conjuntos de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, álgebras de Bool y particiones de los conjuntos finitos. Las generalizaciones relacionadas con el caso de los conjuntos finitos conducen al análisis de las operaciones con números cardinales. Los resultados conseguidos en este camino por ahora no son grandes.



## CAPÍTULO 4 APARATO TABULAR DE MATRIZ DEL ANÁLISIS COMBINATORIO

En este capítulo se analizan los conceptos y métodos combinatorios que están relacionados con la representación de los sistemas de conjuntos finitos en forma de tablas. Sirve de base para tales representaciones tabulares el concepto general de sistemas de incidencia.

### 4.1. SISTEMAS DE INCIDENCIA Y MATRICES ESPECIALES

Se denomina *sistema de incidencia* una terna ordenada  $(M, S, \varphi)$ , donde  $\varphi$  es una correspondencia binaria entre los conjuntos  $M$  y  $S$  (véase § 1.2). Por ejemplo, un plano puede ser representado como sistema de incidencia, si tomamos en calidad de  $S$  el conjunto de puntos del plano, en calidad de  $M$ , el conjunto de rectas y en calidad de  $\varphi$ , el conjunto de pares  $(a, b) \in M \times S$  que satisfacen la condición "el punto  $b$  se dispone en la recta  $a$ ". La correspondencia binaria  $\varphi$  en el sistema de incidencia recibe el nombre de *relación de incidencia*. En la mayoría de los casos los elementos del conjunto  $M$  se interpretan como ciertos subconjuntos del conjunto  $S$ , mientras que  $\varphi$  es simplemente una relación que caracteriza la pertenencia de los elementos del conjunto  $S$  a los subconjuntos de la familia  $M$ . Si  $M = \{S_1, \dots, S_m\}$ ,  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , entonces a la relación  $\varphi$  le corresponderá biunívocamente la matriz  $A = [a_{ij}]$  de orden  $m \times n$ , donde  $a_{ij}$  (elemento de la  $i$ -ésima fila y de la  $j$ -ésima columna) es igual a la unidad, siempre que  $(S_i, s_j) \in \varphi$ , y a cero, en el caso contrario. En particular, cuando  $M = \{S_1, \dots, S_m\}$  se interpreta como un sistema de subconjuntos del conjunto  $S$ , entonces

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } s_j \in S_i; \\ 0, & \text{si } s_j \notin S_i. \end{cases}$$

Esta matriz se llama *matriz de incidencia* para la familia de subconjuntos  $M = \{S_1, \dots, S_m\}$  respecto del conjunto  $S$ . Las unidades dispuestas en la  $i$ -ésima fila expresan elementos del subconjunto  $S_i$ , y las unidades dispuestas en la  $j$ -ésima columna señalan los subconjuntos que contienen  $s_j$ . La matriz  $A$  da una descripción completa del sistema de incidencia  $(M, S, \varphi)$ . Es *binaria*, esto es, se compone de símbolos de los tipos. Para que los cálculos sean más cómodos, se ha elegido aquí, a título de elementos de la matriz, 0 y 1 (en adelante las matrices de esta índole se llamarán  $(0, 1)$ -matrices), aunque se eligen, a veces, otros pares de magnitudes, por ejemplo,  $+1$  y  $-1$ .

El dominio de aplicación de las matrices de incidencia es muy amplio. Kirchhoff, por ejemplo, las introdujo para investigar los circuitos eléctricos; A. Poincaré, en la topología, etc.

Los teoremas del análisis combinatorio se interpretan frecuentemente e, incluso, se demuestran con ayuda de las matrices de incidencia. Por ejemplo, en el § 3.2 se ha enunciado el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. De su análogo matricial sirve el

**Teorema de König [46].** En una matriz rectangular el número mínimo  $m$  de líneas (de filas y de columnas) que contienen todos los elementos no nulos, es igual al número máximo  $M$  de dichos elementos elegidos de un modo tal que de ellos cualesquiera dos no están dispuestos en una línea.

*Demostración.* Basta estudiar el caso en que viene dada una  $(0,1)$ -matriz rectangular  $A = [a_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, t$ . La demostración de que  $m = M$  consta de dos etapas; al principio se demuestra que  $m \geq M$ , luego que  $M \geq m$ . La primera desigualdad es obvia, pues ninguna línea contiene más de un elemento de los  $M$  elegidos. Demostremos la segunda desigualdad.

Supongamos que  $m$  líneas están compuestas por  $r$  filas y  $s$  columnas:  $m = r + s$ . Permutemos estas filas y columnas de un modo tal que ellas ocupen los primeros lugares. A cada  $j$ -ésima fila ( $i = 1, \dots, r$ ) pongámosle en correspondencia un conjunto de números de las columnas  $j$ , para las cuales  $a_{ij} = 1$ ,  $j > s$ . Los conjuntos obtenidos satisfacen las condiciones del teorema de P. Hall. Efectivamente, si esto no fuera así, es decir, si  $k$  de los conjuntos citados contienen  $v < k$  elementos, dichas  $k$  filas pueden ser sustituidas por  $v$  columnas y todas las unidades figurarán en el número menor de líneas, lo que contradice la condición de que  $m$  es el número mínimo. Por cuanto la condición del teorema de P. Hall se cumple, se pueden elegir  $r$  representantes distintos de  $r$  filas, es decir,  $r$  unidades de manera tal que haya dos unidades en una fila y ninguna, en las primeras  $s$  columnas. Razonando análogamente, se pueden obtener  $s$  representantes de  $s$  primeras columnas de un modo tal que estén ausentes en las primeras  $r$  filas. Este conjunto de  $r + s = m$  unidades está elegido de una manera tal que no hay dos de ellas que se dispongan en una línea. Esto quiere decir, que  $m \leq M$ , lo que se trataba de demostrar.

La demostración aludida aquí se apoya en el teorema de P. Hall. Este último puede demostrarse también apoyándose en el teorema de König. Sean un conjunto  $S$  y un sistema de sus  $n$  subconjuntos. Construyamos la  $(0, 1)$ -matriz de incidencia. Supongamos que todas las unidades de ésta se disponen en  $r$  filas y  $s$  columnas. Si  $r + s = n$ , entonces, según el teorema de König, existen  $n$  unidades, de las cuales cualesquiera dos no están en una misma línea, y ellas forman el s.r.d para  $n$  conjuntos. Si, en cambio,  $r + s < n$ , entonces la validez del teorema de P. Hall se perturba, puesto que para  $k = n - r$  filas las unidades figurarán sólo en  $s < n - r = k$  columnas.

Las matrices binarias se utilizan en el análisis combinatorio al investigar las estructuras de los conjuntos discretos. La teoría de las matrices binarias experimentó en los últimos años un desarrollo considerable precisamente merced al papel creciente (práctico y teórico) del análisis combinatorio.

Según sea el tipo de problemas combinatorios, en el proceso de su resolución aparecen diferentes tipos de matrices. Las operaciones sobre ellas se realizan, por supuesto, de acuerdo con las reglas generales de la teoría de matrices. Así, por ejemplo, a la par con las sumas y los productos ordinarios, están determinadas para ellas las sumas y los productos directos (de Kronecker). Recordemos que la *suma directa* de la matriz  $A = [a_{ij}]$  de  $n$ -ésimo orden con la matriz  $B$  de orden  $m$  se representa por una matriz de orden  $n + m$  que tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

y el *producto directo* de estas matrices es una matriz de orden  $nm$  que tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Más abajo estudiaremos ciertos tipos especiales de las matrices que con mayor frecuencia se usan en el análisis combinatorio.

**Matrices conmutables.** Son matrices de incidencia para el caso en que  $S = M = \{1, \dots, n\}$ , y la relación de incidencia  $i\varphi j$  significa que el elemento  $i$  se dispone en el  $j$ -ésimo lugar de cierta permutación fija de números  $1, \dots, n$ . Sea, por ejemplo, una permutación  $(5, 3, 4, 1, 2)$ . La matriz correspondiente será

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus filas corresponden a los números de los elementos de la permutación, y las columnas, a los números ordinales de los lugares.

Así pues, una matriz conmutable es la  $(0, 1)$ -matriz cuadrada, en la cual cada línea (fila o columna) contiene exactamente una unidad. La matriz conmutable posee la propiedad de que

$$PP^T = I,$$

donde  $P^T$  es una matriz transpuesta, e  $I$ , una matriz unidad. Esta propiedad se emplea con frecuencia a título de definición de la matriz conmutable.

Las matrices conmutables, siendo las más simples, son de interés en primer lugar por el hecho de que a través de ellas pueden expresarse otras matrices más complejas (véase más abajo el teorema de Birkhoff).

**Matrices de congruencia de dos en dos.** Estas son matrices de incidencia para el caso en que  $M = S$ , y la relación de incidencia  $\varphi$  es antisimétrica y satisface las condiciones:

a) para cualquier  $s \in S$ :  $(s, s) \notin \varphi$  (irreflexividad);

b) para cualesquiera diferentes  $s_i, s_j \in S$  ( $i \neq j$ ): o bien  $(s_i, s_j) \in \varphi$ , o bien  $(s_j, s_i) \in \varphi$ .

Tal relación puede interpretarse como resultado de un torneo circular con participación de  $|S|$  jugadores. La matriz de incidencia es la tabla de este torneo, en la que la diagonal está ocupada por ceros ( $a_{ii} = 0$ ). El premio del  $i$ -ésimo jugador y del  $j$ -ésimo se nota como  $a_{ij} = 1$ ,  $a_{ji} = 0$ .

Así pues, las matrices de congruencia de dos en dos son binarias, cuadradas, con ceros en la diagonal principal. Ellas satisfacen la ecuación matricial

$$A + A^T = J - I,$$

donde  $A$  es una matriz de congruencia de dos en dos,  $A^T$  es la matriz transpuesta  $A$ ,  $I$  es una matriz unidad y  $J$ , una matriz compuesta por ceros.

**Matrices de Hadamard.** Así se llaman las matrices cuadradas binarias  $H$  (abreviadamente de Hadamard), compuestas de unidades positivas y negativas, que satisfacen la ecuación matricial

$$H \cdot H^T = nI,$$

donde  $n$  es el orden de la matriz  $H$ ;  $I$  es la matriz unidad de  $n$ -ésimo orden;  $H^T$ , la matriz  $H$  transpuesta. De la definición proviene que cada dos filas de la matriz  $H$  son ortogonales, y, además, que  $|\det H| = n^{n/2}$  y  $H^{-1} = n^{-1}H^T$ , de donde

$$H \cdot H^T = H^T \cdot H = nI.$$

Si en una matriz de Hadamard multiplicamos cualquier línea (sea fila o columna) por  $-1$ , la matriz conserva sus cualidades de Hadamard. Las matrices obtenidas del modo citado se consideran equivalentes. Si  $H_1$  y  $H_2$  son equivalentes, entonces

$$H_2 = PH_1Q,$$

donde  $P$  y  $Q$  son matrices conmutables, en las cuales, sin embargo, el único elemento no nulo de la línea es igual a  $+1$ , o bien a  $-1$ . Multiplicando las filas o columnas por  $-1$ , podemos normalizar las matrices de Hadamard, es decir, reducirlas a una forma en que la primera fila y la primera columna están compuestas sólo por las unidades positivas. Las matrices de Hadamard normalizadas de órdenes 1 y 2 son

$$(1) \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En lo que atañe a las matrices de orden  $n \geq 3$ , resulta que si existen, entonces  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Efectivamente, conmutemos en la matriz de

Hadamard las columnas de un modo tal que en la segunda fila la primera mitad de términos conste sólo de unidades positivas, y la segunda mitad, de unidades negativas. Examinemos la tercera fila. Supongamos que en los primeros  $n/2$  lugares encontramos  $t$  unidades positivas y en los segundos  $t'$  unidades positivas. Entonces, por definición,

$$2t + 2t' = n;$$

$$2t - 2t' = 0,$$

de donde  $n = 4t$ . No obstante, la demostración de la existencia de las matrices en el sentido de su construcción eficaz es un proceso que avanza con lentitud, pese a la diversidad de los métodos inventados.

Observemos que los productos directos de las matrices de Hadamard son también matrices de Hadamard. Se sabe que estas matrices de orden  $n$  existen, en particular, en los siguientes casos (véase [47]):

1.  $n = 2^r$ ;
2.  $n = p^r + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ , donde  $p$  es un número primo;
3.  $n = (h - 1)^2 + 1$ , donde  $h$  es un producto de los números del tipo 1 y 2;
4.  $n = h(h + 3)$ , donde  $h$  y  $h + 4$  son productos de los números del tipo 1 y 2;
5.  $n = h(h - 1)$ , donde  $h$  es un producto de los números del tipo 1 y 2;
6.  $n = 92, 116, 156, 172$ ;
7.  $n = q(q + 2) + 1$ , donde  $q$  y  $q + 2$  son potencias de los números primos;
8.  $n$  es igual al producto de cualesquiera números mencionados más arriba.

Para el caso incierto mínimo de existencia de las matrices de Hadamard tenemos:  $n = 268$ .

**Matrices estocásticas.** Este tipo de matrices surgió para ser aplicado en el aparato combinatorio de la teoría de probabilidades. Una matriz se llama estocástica por filas (columnas), si sus elementos son no negativos y la suma de ellos en cada fila (columna) es igual a 1. Una matriz se llama dos veces estocástica, si es estocástica tanto por filas, como por columnas. No es difícil mostrar que una matriz dos veces estocástica es cuadrada. Un producto de las matrices dos veces estocásticas de igual orden será matriz dos veces estocástica. Efectivamente, si  $C = [c_{ij}]^n$ ,  $A = [a_{ij}]^n$ ,  $B = [b_{ij}]^n$ ,  $C = A \cdot B$ , entonces

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \sum_{j=1}^n b_{lj} = 1,$$

y, por analogía,  $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$ .

En una matriz cuadrada de  $n$ -ésimo orden, se llamará *transversal* a un juego de  $n$  elementos, en el que ningún par de ellos está dispuesto en una misma línea (fila o columna).

**Lema.** Una matriz dos veces estocástica tiene la transversal compuesta de los elementos no nulos.

*Demostración.* Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz dos veces estocástica. Incluyamos todos los elementos no nulos de la matriz en  $p$  columnas y  $q$  filas de un modo tal que la suma  $p + q$  asuma el valor mínimo posible. Con arreglo al teorema de König, el número máximo de elementos no nulos de  $A$ , de los cuales ningún par se dispone en una misma línea, es igual a  $p + q$ . Por cuanto todos los elementos no nulos de  $A$  pueden encerrarse dentro de  $n$  filas, entonces  $p + q \leq n$ . Por otra parte,  $n = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \leq p + q$ . Por consiguiente,  $p + q = n$ , y en la matriz se en-

contrará una transversal compuesta por elementos no nulos.

**Teorema de Birkhoff.** Para toda matriz dos veces estocástica de orden  $n$  es válido el desarrollo:  $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ , donde  $P_i$  son matrices conmutables,  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,  $k \leq n^2 - n + 1$ .

*Demostración.* De acuerdo con el lema, en la matriz  $A$  existe una transversal compuesta por elementos no nulos. Supongamos que el mínimo de dichos elementos es igual a  $\lambda_1 > 0$  ( $\lambda_1 \neq 1$ , pues, de lo contrario, la matriz  $A$  será conmutable y la afirmación del teorema se hará trivial):  $P_1$  es una matriz conmutable correspondiente a la transversal. Por cuanto la matriz  $(1 - \lambda_1)^{-1}(A - \lambda_1 P_1)$  es dos veces estocástica, entonces en la matriz  $A - \lambda_1 P_1$  existe una transversal compuesta de los elementos no nulos. Designemos con  $\lambda_2$  el mínimo de ellos, etc. La matriz  $A - \sum_{i=1}^j \lambda_i P_i$  contiene no menos de  $j$  elementos nulos, razón por la cual el proceso citado es finito y se dará por terminado no más tarde que el  $(n^2 - n + 1)$ -ésimo paso. Esto se debe a que después de realizarse el  $(n^2 - n + 1)$ -ésimo paso, la matriz  $A - \sum_{i=1}^{n^2-n+1} \lambda_i P_i$ , en la que las sumas de elementos en las filas y en las columnas son iguales, contendría no más de  $(n - 1)$  elementos no nulos, por lo cual todos los elementos de esta matriz serían nulos.

Observemos que la estimación del número  $k$  en el teorema de Birkhoff puede ser precisada:  $k \leq n^2 - 2n + 2$ , con la particularidad de que existen matrices de orden  $n$ , dos veces estocásticas, las cuales no son representables en forma de una combinación lineal de menos que  $n^2 - 2n + 2$  matrices conmutables.

Al resolver problemas de carácter combinatorio surge la necesidad de emplear, además, otros tipos de matrices especiales. No será nuestra aspiración enumerarlas y describirlas. Nos limitaremos sólo al análisis de algunos accesos generales que pueden ser aplicados a la investigación de tales matrices.

Ya hace tiempo que en las matemáticas se acostumbra a comenzar el

estudio de las propiedades de las clases de objetos por la búsqueda de las invariantes y el análisis de los mismos. Una de las invariantes más importantes de cualquier matriz es el permanente de ésta. Al permanente le dedicamos un párrafo especial de este capítulo (4.4).

Estudiemos otras direcciones notables en este sentido. Ultimamente en las investigaciones teóricas de las matrices binarias se pasa, con una frecuencia cada vez mayor, del análisis de los tipos particulares de las matrices al estudio de sus clases. Se utilizan en dicho estudio las nociones de rango de frontera, de  $\alpha$ -anchura y otras. Se denomina *traza* de una matriz a la suma de los elementos que constituyen su diagonal principal; el valor máximo para la traza, obtenido para toda clase de permutaciones de las filas y columnas de una matriz, recibe precisamente el nombre de *rango de frontera* (rango límite). Se llama  $\alpha$ -anchura de la matriz a un número mínimo de columnas que pueden elegirse en ella de una manera tal que la suma de sus valores en cada fila sea no inferior a  $\alpha$ .

He aquí uno de los procedimientos que se usa para elegir las clases de las matrices. Sea  $A$  una  $(0, 1)$ -matriz de dimensión  $m \times n$ . Las sumas de sus elementos por filas la denotamos con  $r_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  y por columnas, con  $s_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ . Es evidente que

$$\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n s_j = \tau.$$

Haciendo uso de las totalidades de las sumas de las filas y de las sumas de las columnas de la matriz  $A$ , formamos los vectores correspondientes:

$$R = (r_1, r_2, \dots, r_m); \quad S = (s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Al contrario, fijando los vectores  $R$  y  $S$ , cuyas componentes están representadas por los números no negativos, hallamos que ellos definen la clase de  $(m \times n)$ -matrices  $A$ , la cual se denotará con  $\mathcal{N}(R, S)$ . Para las clases  $\mathcal{N}(R, S)$  están determinadas las condiciones necesarias y suficientes del estado no vacío. Sin embargo, en esta parte del análisis combinatorio las investigaciones sólo acaban de iniciarse. Ni siquiera existe un método regular para calcular los números de todas las matrices de esta clase o, por lo menos, de las matrices normalizadas, es decir, tales en las que las líneas que constan solamente de ceros están tachadas y las líneas restantes están permutadas de un modo tal que

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m > 0; \quad s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n > 0.$$

Para las clases de matrices se estudian los valores máximos y mínimos de los permanentes, de los rangos de frontera, de la  $\alpha$ -anchura, etc.

## 4.2. RECTÁNGULOS Y CUADRADOS LATINOS

Así se denominan las disposiciones de los elementos por filas y por columnas, cuando los elementos en las líneas (tanto en las filas, como en columnas) no se repiten. La denominación "latinos" se debe, pro-

bablemente, a Euler quien usó, al estudiar la disposición de este tipo, las letras del alfabeto latino a título de sus elementos.

Sea dado un  $n$ -conjunto  $S$ . El problema de construcción sobre él (a base de sus elementos) de un  $(r \times s)$ -rectángulo latino se reduce a la construcción de una tabla  $(r \times s)$ -rectangular en la cual las líneas serán representadas, respectivamente, por las  $r$ - y  $s$ -permutaciones sin repetición de los elementos del conjunto  $S$  (evidentemente,  $r, s \leq n$ ). Por ejemplo, la disposición

2	1	5	7	3
1	3	2	4	5
7	4	1	8	2
5	2	3	1	6

representará un  $(4 \times 5)$ -rectángulo latino para  $S = \{1, 2, \dots, 8\}$ . En los  $(r \times n)$ -rectángulos latinos las filas son permutaciones, elegidas de un modo tal que los elementos en las columnas no se repitan. Por ejemplo,

1	2	3	4	5	6
3	1	2	6	4	5
2	4	6	5	3	1
5	3	4	1	6	2

es un  $(4 \times 6)$ -rectángulo latino para  $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ . Si la primera fila de un rectángulo latino es tal que sus elementos quedan dispuestos en un orden fijado de antemano (con mayor frecuencia como  $1, 2, \dots, n$ ), entonces el rectángulo se llama *normalizado*. El ejemplo que acabamos de aducir puede considerarse como ejemplo de rectángulo latino normalizado. Se analizan, a veces, rectángulos latinos que están normalizados no sólo por la primera fila, sino también por la primera columna.

Los rectángulos latinos que pueden obtenerse uno del otro mediante las permutaciones de las líneas y la reenumeración de los elementos se denominan *equivalentes*. Es fácil ver que para cada rectángulo latino existe un rectángulo equivalente normalizado por la primera fila y por la primera columna.

Resulta natural preguntar ¿cuántos rectángulos latinos del tipo dado pueden existir? Sea  $L(r, n)$  el número de todos los  $(r \times n)$ -rectángulos latinos y  $N(r, n)$ , el número de  $(r \times n)$ -rectángulos latinos normalizados. Es obvio que

$$L(r, n) = n!N(r, n);$$

con la particularidad de que

$$L(1, n) = n!; \quad N(1, n) = 1.$$

Por cuanto los rectángulos latinos normalizados de dos filas son, en ausencia, desórdenes, su número será igual al número de desórdenes:

$$N(2, n) = n! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = D_n,$$



y, respectivamente,

$$L(2, n) = n! N(2, n) = n! D_n.$$

Sin embargo, ya para el cálculo del número de rectángulos latinos de tres filas se necesitó superar dificultades mucho más grandes. Examinemos primeramente un tipo particular de tales rectángulos:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & & \dots & n & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \dots & & a_n \end{array}$$

y tratemos de determinar su número. El problema planteado de este modo es equivalente, en particular, al problema sobre el número de conmutadores, cuyos  $2n$  jacks se disponen por un círculo, están unidos dos a dos y, además, ninguno de dos jacks vecinos están unidos entre sí. Este problema se conoce en otra interpretación, a saber, como problema sobre el número de colocaciones de  $n$  cónyuges en una mesa redonda bajo la condición de que ningún par conyugal se sienta juntos. La preocupación inicial es, naturalmente, sobre las damas; ellas se acomodan de  $2n!$  maneras, quedándose vacantes las sillas a la derecha y a la izquierda de cada dama. Las sillas desocupadas se numeran  $1, 2, \dots, n$ . Ahora está claro que el primer conyuge no puede sentarse en las sillas primera y segunda; el segundo, en las sillas  $2^a$  y  $3^a$ , etc. hasta el  $n$ -ésimo conyuge, para el cual están "prohibidas" las sillas  $1^a$  y  $n$ -ésima. El problema se resuelve por la fórmula del método de inclusiones y exclusiones con las propiedades  $p_i: a_i = i$ , o bien  $i + 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ),  $a_n = n$  ó  $a_1$ . El número buscado es:

$$U_n = n! - 2n(n-1)! + \dots + (-1)^r \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} (n-r)! + \dots \\ \dots + (-1)^n \cdot 2.$$

En el caso general, el número de todos los rectángulos latinos de tres filas compuestos de  $n$  elementos se determina por la fórmula (véase [48]):

$$N(3, n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} D_{n-k} D_k U_{n-2k}.$$

Los números de  $(3 \times n)$ -rectángulos latinos resultaron ser muy grandes. Los rectángulos latinos están por ahora débilmente estudiados, lo que se debe, probablemente, a la complejidad de las demostraciones y los enormes valores de sus números. En lo que se refiere a los rectángulos latinos con un número mayor de filas, podemos decir que en este dominio, en general, es poco lo que se conoce (véase [49]). En relación con esto no disminuye la importancia de las fórmulas asintóticas. Partiendo de los resultados conocidos:

$$L(2, n) = n! D_n \sim (n!)^2 e^{-1}; \quad L(3, n) \sim (n!)^3 e^{-3};$$

se ha supuesto que

$$L(k, n) \sim (n!)^k e^{-\binom{k}{2}}.$$

Esta hipótesis para  $k < n^{1/3}$  fue demostrada por Yamamoto [50].

A pesar de que las tentativas de estimar superiormente el número de  $(k \times n)$ -rectángulos latinos posibles no han llevado todavía a resultados exactos, ya podemos ver que este número es muy grande y crece rápidamente con el aumento de  $k$ . Esto se confirma con el hecho de que puede obtenerse la estimación inferior empleando la idea de ampliación de los rectángulos latinos.

Ampliar el rectángulo latino significa agregarle filas y columnas de tal modo que el rectángulo siga siendo latino. Esto sólo será posible, si el número de filas y columnas no sobrepasa el número de elementos  $n$ . La demostración de la posibilidad de ampliar un rectángulo se realiza por una simple repetición de los razonamientos que conducen a la adición de una fila por debajo y una columna, a la derecha. Como límite de ampliación interviene el cuadrado latino de orden  $n$ .

Sea dado un rectángulo latino  $\mathcal{L}(r, n)$  de  $n$  elementos, los cuales se designarán con  $1, 2, \dots, n$ . Planteemos el problema de ampliar  $\mathcal{L}(r, n)$  hasta que se obtenga  $\mathcal{L}(r+1, n)$ . Veamos las columnas  $j = 1, 2, \dots, n$ , y a cada  $j$ -ésima columna pongámosle en correspondencia un conjunto  $S_j$  compuesto de  $n-r$  elementos que no han integrado la columna dada. Obtendremos una colección  $M = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ , donde cada conjunto  $S_i$  consta de  $n-r$  elementos.

El problema de ampliación de  $\mathcal{L}(r, n)$  hasta  $\mathcal{L}(r+1, n)$  se reduce ahora a la construcción de un s.r.d. para la colección  $M$ . Demostremos que tal s.r.d. existe. Efectivamente, tomemos  $\mathcal{L}(r, n)$ . Todo elemento  $i$  de  $n$  elementos se encuentra en él  $r$  veces. En los conjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_n$  el citado elemento se encuentra  $(n-r)$  veces. Elijamos cualesquiera  $k$  conjuntos de  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . En ellos habrá  $k(n-r)$  elementos, contando también los que se repiten. Pero, cada elemento se encuentra no más de  $n-r$  veces. Esto quiere decir que  $k$  conjuntos elegidos tienen no menos de  $k$  elementos distintos. La condición de existencia del s.r.d. está cumplida, lo que demuestra precisamente la posibilidad de la ampliación requerida.

La resolución del problema de ampliación de los rectángulos latinos permite dar una estimación inferior para el número de ellos. A saber, existen  $n!$  rectangulares latinos  $\mathcal{L}(1, n)$ , cada uno de los cuales puede ser ampliado por lo menos hasta  $(n-1)$  rectángulos latinos  $\mathcal{L}(2, n)$ . Por consiguiente, existen al menos  $n!(n-1)!$  rectángulos  $\mathcal{L}(2, n)$ . Razonando de esta manera, llegaremos a la conclusión de que existe por lo menos

$$n!(n-1)! \dots (n-r+1)!$$

rectángulos latinos  $\mathcal{L}(r, n)$ .

Los cuadrados latinos en los que ahora concentraremos nuestra aten

ción representan un caso particular de los rectángulos latinos  $\mathcal{L}(r, s)$  para  $r = s = n$ . En otras palabras, los cuadrados latinos son nada más que  $(n \times n)$ -arreglos de  $n$  elementos, donde las filas y columnas son permutaciones de dichos elementos. Por ejemplo, todos los 4 cuadrados latinos posibles dos veces normalizados de cuarto orden son:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	1	4	3	2	1	4	3	2	4	1	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	2	1	3	1	4	2
4	1	2	3	4	3	2	1	4	3	1	2	4	3	2	1

La existencia de los cuadrados latinos de cualquier orden se asegura no sólo por los razonamientos combinatorios generales, sino también por el hecho de que todo cuadrado latino puede interpretarse como la tabla de Cayley, es decir, la tabla de multiplicación en cierto casi grupo finito. Con el fin de calcular el número de cuadrados latinos y estimar este número superiormente hemos de superar, prácticamente, las mismas dificultades que tuvimos en el caso de los rectángulos latinos, en particular, las estimaciones inferiores tienen por expresión  $(r - n)$ :

$$n!(n - 1)! \dots 2!!!.$$

Los cálculos del número de cuadrados latinos han mostrado que esta estimación es muy aproximada. Designemos con  $L(n)$  el número de cuadrados latinos dos veces normalizados y con  $L(n)$ , el número de cuadrados latinos no equivalentes de orden  $n$ . Entonces, el número de todos los cuadrados latinos de  $n$ -ésimo orden es igual a  $n!(n - 1)!L(n)$ . Todos los números conocidos  $I(n)$  y  $\tilde{L}(n)$  se exponen en la siguiente tabla (véase [20]):

*Tabla 4.1*

$n$	$I(n)$				$\tilde{L}(n)$
1	1				1
2	1				1
3	1				1
4	4				2
5	56				2
6	9 408				22
7	16 942 080				563
8	535	281	401	856	1 676 257
9	377 597	570	964	258 816	

En la teoría de los cuadrados latinos los problemas que mayor interés provocan son los relacionados con el concepto de ortogonalidad. Dos cuadrados latinos se llaman *ortogonales*, si al superponer uno de ellos sobre el otro se obtienen todos los pares de elementos ordenados sin repetición.

Dicho de otro modo, dos cuadrados latinos de orden  $n$ :

$$A_1 = [a_{ij}^{(1)}]; \quad A_2 = [a_{ij}^{(2)}]; \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

se llaman ortogonales, si todos los  $n^2$  pares  $(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)})$  son distintos.

El estudio de la ortogonalidad de los cuadrados latinos tiene por origen el problema ampliamente conocido de Euler sobre 36 oficiales que llegaron de 6 regimientos. Cada regimiento asignaba 6 oficiales de rangos militares distintos. Se necesitaba incluir dichos oficiales en una formación de cuadro de un modo tal, que en ninguna línea hubiera repeticiones ni de rangos ni de nombres de regimientos. Dicho de otro modo, se planteaba el problema de construir dos cuadrados latinos ortogonales de sexto orden.

El problema sobre la construcción de un par de cuadrados latinos ortogonales de sexto orden no admitía resolución y Euler llegó a la conclusión de que tal par no existía. En una obra relacionada con este tema y publicada en 1782 Euler emitió la hipótesis de que la imposibilidad de hallar la solución se extendía también a los casos de  $n = 10$ ,  $n = 14$ , y, en general, de  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , es decir,  $n = 2, 6, 10, 14, 18, \dots$ .

Solamente pasados 118 años se dio la primera respuesta a la hipótesis de Euler. G. Tarry [51] confirmó la hipótesis a principios del siglo XX para  $n = 6$ , construyendo y arreglando una y otra vez todos los cuadrados latinos de sexto orden. La comprobación ulterior de la hipótesis se demoró de nuevo. Sólo para el año 1960 se demostró que los pares de cuadrados latinos ortogonales existían para cualquier orden, a excepción de  $n = 2$  y  $n = 6$ , que resultaron ser la única excepción (véase [53]).

Como generalización natural del concepto de par de cuadrados latinos ortogonales interviene el conjunto compuesto por más de dos cuadrados latinos ortogonales dos a dos. Tal conjunto también se llama ortogonal. Reenumeremos los elementos de los cuadrados de una manera tal que quede normalizada la primera fila de cada cuadrado (al reenumerar los elementos de un cuadrado, la propiedad de ortogonalidad queda intacta). Entonces, los primeros elementos de las segundas filas deben ser diferentes y no iguales a 1. Por consiguiente, el número de cuadrados latinos ortogonales dos a dos de orden  $n$  no puede ser superior a  $n - 1$ . Un conjunto ortogonal se denomina *completo*, si en él están contenidos exactamente  $n - 1$  cuadrados.

En la teoría de los cuadrados latinos ortogonales se distinguen dos grandes problemas: el problema de existencia de los pares y de las familias de cuadrados latinos ortogonales y el de su construcción. Estos dos problemas están estrechamente ligados, puesto que la demostración de la existencia con frecuencia también resulta ser construcción. El problema de existencia de los conjuntos de cuadrados latinos ortogonales resultó ser bastante difícil, y las demostraciones de los teoremas correspondientes, complejas y engorrosas. Damos a conocer aquí sólo algunos resultados.

1. No para todo cuadrado latino existe otro cuadrado latino que sea ortogonal al primero.

Este hecho, al igual que las condiciones de existencia, fue establecido en [52].

2. Si  $n = p^\alpha$ , donde  $p$  es un número primo y  $\alpha$ , un número natural, entonces para  $n \geq 3$  existe un conjunto completo de  $n - 1$  cuadrados latinos ortogonales.

*Demostración.* Para cualquier  $n = p^\alpha$  existe el campo de Galois. Supongamos que  $a_0 = 0$  y  $a_1 = 1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  son elementos del campo de Galois. Construyamos  $n - 1$  matrices de orden  $n$  del modo siguiente:

$$A = [a_{ij}^{(l)}]; \quad i, j = 1, 2, \dots, n - 1; \quad l = 1, 2, \dots, n - 1$$

donde

$$a_{ij}^{(l)} = a_l a_i + a_j.$$

Esta familia de matrices  $A_l$  será precisamente el conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales. En efecto:

a) cada una de las matrices construidas es un cuadrado latino, pues si cualquiera de ellas, digamos  $A_l$ , tiene dos elementos iguales en una misma fila, existen  $j$  y  $j'$  tales que

$$a_l a_i + a_j = a_l a_i + a_{j'}.$$

de donde

$$a_j = a_{j'}.$$

En cambio, si admitimos que dos elementos iguales figuran en una misma columna, entonces han de existir distintos  $i$  e  $i'$  tales que

$$a_l a_i + a_j = a_l a_{i'} + a_j;$$

y, por cuanto  $a_l \neq 0$ , tenemos  $a_i = a_{i'}$ , y, por lo tanto  $i = i'$ .

b) cada par de dichas matrices es ortogonal. Sea  $1 \leq l < f \leq n - 1$ , y supongamos que  $A_l$  no es ortogonal respecto de  $A_f$ , entonces existen  $i, i', j, j'$  tales que

$$(a_{ij}^{(l)}, a_{ij}^{(f)}) = (a_{i'j'}^{(l)}, a_{i'j'}^{(f)}),$$

es decir,

$$\begin{aligned} a_l a_i + a_j &= a_l a_{i'} + a_{j'}; \\ a_f a_i + a_j &= a_f a_{i'} + a_{j'}. \end{aligned}$$

De aquí

$$a_i(a_l - a_f) = a_{i'}(a_l - a_f),$$

y, por cuanto  $a_l \neq a_f$ , tenemos  $a_i = a_{i'}$ , de donde  $i = i'$ , y por lo tanto  $j = j'$ . El conjunto buscado está, de este modo, construido.

3. Enunciemos ahora una afirmación más general. Sean dados un número natural arbitrario  $n$  y su desarrollo en potencias naturales de los

distintos números primos:  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}$ . Sea

$$t = \min(p_i^{\alpha_i} - 1); \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Si  $t \geq 2$ , existe una familia de  $t$  cuadrados latinos ortogonales de orden  $n$ .

Efectivamente, se ha demostrado anteriormente que para cada  $n_i = p_i^{\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  existe una familia  $n_i - 1$  (y por tanto, también de  $t$ ) de cuadrados buscados. Para pasar al producto de las magnitudes se debe demostrar un teorema intermedio (la validez de la afirmación general se demuestra por la aplicación sucesiva de este teorema).

**Teorema.** Si se tienen dos familias, cada una de las cuales está compuesta por  $t$  cuadrados latinos ortogonales de órdenes  $n$  y  $n'$  respectivamente, existe una familia de  $t$  cuadrados latinos ortogonales de orden  $nn'$ .

*Demostración.* A toda familia de  $t$  cuadrados latinos ortogonales de orden  $n$  ( $t \geq 2$ ,  $n \geq 3$ ) se le puede poner en correspondencia una  $[n^2 \times (t + 2)]$  — tabla construida de los mismos  $n$  elementos (designados  $1, 2, \dots, n$ ) de un modo tal que cualquier par de columnas contenga todas las  $n^2$  2-muestras de elementos (tal tabla se llamará tabla de potencia 2). Permutemos en esta tabla sus filas de tal modo que en las primeras dos columnas (leyendo desde arriba) los pares se contengan en el siguiente orden:  $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), \dots, (n, 1), (n, 2), \dots, (n, n)$ . En este caso, las siguientes  $t$  columnas reescritas por turno desde arriba ( $n$  columnas en una fila) forman  $t$  cuadrados latinos de orden  $n$ . De hecho, la primera columna de la tabla está construida de una manera tal que en ninguno de los  $t$  cuadrados latinos figuren en una fila dos elementos iguales. La segunda columna de la tabla está construida de tal manera que tampoco figuren dos elementos iguales en las columnas de los cuadrados. Por ejemplo, la  $(9 \times 4)$ -tabla tiene la forma

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
2	1	2	3
2	2	3	1
2	3	1	2
3	1	3	2
3	2	1	3
3	3	2	1

corresponde a dos cuadrados latinos ortogonales:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

y

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Construyamos dos tablas correspondientes a dos  $t$ -familias de cuadrados latinos ortogonales de órdenes  $n$  y  $n'$ . Las dimensiones de estas tablas serán  $n^2 \times (t + 2)$  y  $(n')^2 \times (t + 2)$ , respectivamente. Elijamos en estas tablas la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima filas:

$$\begin{array}{cccc} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,t+2} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,t+2} \end{array}$$

y construyamos, usando dichas filas, una fila compuesta por los pares de elementos:

$$a_{i,1}a'_{j,1}, a'_{i,2}a'_{j,2}, \dots; a_{i,t+2}a'_{j,t+2}.$$

De este modo, se obtienen en total  $(nm')^2$  filas que forman una  $[(nm')^2 \times (t+2)]$ -tabla en la que cada dos columnas forman todos los pares de los siguientes  $nm'$  elementos:

$$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n'), \dots, (n, 1), (n, 2), \dots, (n, n').$$

A esta tabla le corresponden  $t$  cuadrados latinos ortogonales de orden  $nm'$ .

La monografía [20] contiene una información abundante sobre las cuestiones examinadas en este párrafo.

### 4.3. BLOQUE-ESQUEMAS

El tipo de construcciones combinatorias del cual se trata en este párrafo, surgió en la literatura matemática aproximadamente a mediados del siglo pasado. J. Steiner publicó en 1853 un pequeño artículo [54] en el que se trataba sobre el problema siguiente: ¿qué número de símbolos pueden dividirse en ternas de un modo tal que cualquier par resulte ubicado en una y sólo una terna?

Se ha hallado sin dificultad alguna que sólo los números  $n = 6k + 1$  y  $n = 6k + 3$ , es decir,  $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$  son la solución de este problema. En efecto, por cuanto cada elemento integra la terna junto con los otros dos,  $n - 1$  debe ser un número par, y, por consiguiente,  $n$ , un número impar, es decir,  $n \equiv 1 \pmod{2}$ . Además, en cada terna hay tres pares. Cada par aparece una sola vez. En total hay  $\binom{n-1}{2}$  pares. Este número ha de ser múltiplo de tres. De aquí,  $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ , es decir,  $n = 3, 7, 9, 13, 15, 19, \dots$ . Estas condiciones son necesarias. Steiner planteó una cuestión: ¿son ellas también suficientes? Reiss [55] dio en 1859 una respuesta afirmativa.

Ni Steiner ni Reiss sabían que un problema combinatorio análogo fue planteado y resuelto un poco antes, en 1847, por Kirkman [56]. Pasados tres años, Kirkman propuso otro problema combinatorio [57]: una profesora saca cada día a pasear a un grupo de 15 niñas; las forma en 5 filas de a 3 niñas en cada una; se requiere organizar las ternas de un modo tal que en el transcurso de 7 días cada alumna se encuentre con todas las demás una sola vez.

El sistema de ternas descrito en este problema lleva el nombre de Kirkman. En comparación con el sistema de ternas de Steiner, en éste está presente una condición adicional (la llamada condición de solubilidad): el conjunto de ternas ha de ser partido en  $\frac{n-1}{2}$  componentes (en el problema de Kirkman hay 7 componentes y cada una corresponde a un día

de la semana) de tal modo que cada uno de  $n$  elementos aparece exactamente una vez en las ternas de cada componente.

Surge la pregunta: ¿cuántos sistemas del tipo dado existen? Para las ternas de Steiner se sabe lo siguiente. Si  $n = 3, 7, 9$ , entonces existe solamente un tipo de tal sistema, a saber:

a) para  $n = 3$ , solamente el sistema de una terna

1 2 3

b) para  $n = 7$ , solamente de siete ternas

1	2	3		2	4	6		3	4	7
1	4	5		2	4	6		3	4	7
1	6	7		2	5	7		3	5	6

c) para  $n = 9$ , solamente el sistema de 12 ternas

1	2	3		2	4	9		3	4	8		4	6	7
1	4	5		2	4	9		3	4	8		4	6	7
1	6	8		2	5	6		3	5	7		4	6	7
1	7	9		2	7	8		3	6	9		5	8	9

Resultó que para  $n = 13$  existen dos sistemas de soluciones no isomorfas, es decir tales que no pueden ser obtenidos uno del otro por sustitución de los elementos o por permutación de las ternas. Estos sistemas constan de 22 ternas iguales

1	2	3		2	4	6		4	3	8		7	3	11		8	5	11
1	4	5		2	4	6		4	3	8		7	3	11		8	5	11
1	6	7		2	5	7		4	3	8		7	3	11		8	5	11
1	8	9		2	8	10		4	7	9		7	8	13		8	6	12
1	10	11		2	9	12		4	10	13		7	10	12		6	9	11
1	12	13		2	11	13		4	11	12		7	10	12		3	5	12

y cuatro no equivalentes: para el primer sistema

3	6	10		5	6	13
3	9	13		5	9	10

y para el segundo,

3	6	13		5	6	10
3	9	10		5	9	13.

Para el año 1925 fueron terminados los cálculos de los sistemas de ternas de Steiner para  $n = 15$ ; tales sistemas diferentes resultaron ser 80. Por lo que sabe, no se volvieron a calcular las ternas de Steiner para  $n > 15$ . En lo que atañe al número de sistemas no isomorfos de ternas de Steiner, éste crece indefinidamente con el aumento de  $n$  (véase [58]).

La solución del problema de Kirkman (conocida desde el año 1921) es



1	2	5	1	3	9	1	4	15	1	6	11
3	14	15	2	8	15	2	9	11	2	7	12
4	6	12	4	11	13	3	10	12	3	8	13
7	8	11	5	12	14	5	7	13	4	9	14
9	10	13	6	7	10	6	8	14	5	10	15
1	8	10	1	7	14	1	12	13			
2	13	14	2	4	10	2	3	6			
3	4	7	3	5	11	4	5	8			
5	6	9	6	13	15	7	9	15			
11	12	15	8	9	12	10	11	14			

Los métodos de construcción de los sistemas de ternas son, en lo principal, recursivos, es decir, se construyen sistemas "iniciales" de ternas para los valores pequeños de los parámetros, y después se emplean los métodos que se apoyan en esta reserva que ya se tiene. He aquí algunos de estos métodos.

Si existen dos sistemas de ternas de Steiner,  $A$  y  $B$ , de órdenes  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente, puede construirse un sistema de Steiner más, el  $C$ , de orden  $v = v_1 \cdot v_2$ , que contiene subsistemas isomorfos a los dados.

Sea  $(a_i, a_j, a_k)$  una terna del sistema  $A$  y sea  $(b_r, b_s, b_u)$  una terna del sistema  $B$ . Construyamos el sistema de ternas  $C$  a base de los elementos  $c_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, v_1; j = 1, 2, \dots, v_2$ ) que forman las ternas  $(c_{ir}, c_{js}, c_{ku})$ , si está cumplida alguna de las condiciones siguientes: 1)  $r = s = u$ ,  $(a_i, a_j, a_k) \in A$ ; 2)  $i = j = k$ ,  $(b_r, b_s, b_u) \in B$ ; 3)  $(a_i, a_j, a_k) \in A$ ,  $(b_r, b_s, b_u) \in B$ . Un sistema isomorfo al sistema  $A$  será el primero de ellos a condición de que:  $r = s = u = 1$ , y de sistema isomorfo a  $B$  servirá el segundo con la condición de que  $i = j = k = 1$ .

En 1893 Moore [59] propuso el método de construcción de las ternas de Steiner basado en las ideas expuestas más arriba.

Sean dados los sistemas de Steiner:  $S_2$  de orden  $v_2$ , que está integrado por  $S_3$  de orden  $v_3$ , y  $S_1$  de orden  $v_1 > 1$ ; entonces, se puede construir un sistema de Steiner  $S$  de orden  $v = v_3 + v_1(v_2 - v_3)$  que tenga subsistemas isomorfos a  $S_1, S_2, S_3$ .

Tomemos un conjunto de  $v = v_3 + v_1(v_2 - v_3)$  elementos y representémoslo en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 M_0 &: a_1 && a_2 \dots a_{v_3}; \\
 M_1 &: b_{11} && b_{12} \dots b_{1, v_2 - v_3}; \\
 M_2 &: b_{21} && b_{22} \dots b_{2, v_2 - v_3}; \\
 & \dots && \dots \\
 M_{v_1} &: b_{v_1, 1} b_{v_1, 2} \dots b_{v_1, v_2 - v_3}.
 \end{aligned}$$

Formemos las ternas rigiéndonos por las siguientes reglas.

1. Pongamos los elementos de  $M_0$  en una correspondencia biunívoca con los elementos de  $S_3$  y elijamos todas las ternas  $(a_i, a_j, a_k)$ , si ellas corresponden a las ternas del sistema  $S_3$ .

2. Pongamos los elementos del par de conjuntos  $M_0$  y  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, v_1$  en una correspondencia biunívoca con el sistema  $S_2$  de un modo tal que  $M_0$  corresponda a su subsistema  $S_3$ . Las ternas compuestas por los elementos de  $M_0$  ya se han encontrado según la regla antecedente. Las demás ternas han de contener no más de un elemento de  $M_0$ , y, por consiguiente, tienen la forma:  $(a_m, b_{ij}, b_{ik})$  ó  $(b_{ij}, b_{ik}, b_{ir})$ . Por supuesto, ellas deben corresponder a las ternas restantes del sistema  $S_2$ .

3. Definamos el sistema  $S_1$  sobre los números  $1, 2, \dots, v_1$ . Si  $(j, i, r)$  es una terna de este sistema, formemos todas las ternas de la forma  $(b_{jx}, b_{ky}, b_{rz})$ , donde  $x + y + z \equiv 0 \pmod{v_2 - v_3}$ .

Las reglas citadas dan todas las ternas del sistema  $S$  de orden  $v = v_3 + v_1(v_2 - v_3)$ .

En lo que se refiere a las ternas de Kirkman, podemos decir que se han encontrado métodos, con ayuda de los cuales ellas se construyen para los órdenes (véase [60])

$$v = 15, 15 \cdot 3^n, 3^n, 2^{2n} - 1.$$

Pueden considerarse también ternas de otros tipos, diferentes de las de Steiner y Kirkman. Así, por ejemplo, un cuadrado latino genera el conjunto de  $n^2$  ternas ordenadas, donde cada terna  $(i, j, k)$  corresponde a que en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna se dispone un elemento  $k$ ;  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . La condición de que una totalidad de ternas  $(i, j, k)$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ ) forma un cuadrado latino consiste en que cualquier par de componentes de la terna ha de encontrarse una y sólo una vez.

Introducidos los sistemas de ternas de Steiner y Kirkman, los problemas en el dominio de las muestras combinatorias, a lo que parece, deberían concentrarse en las siguientes direcciones:

a) en la elaboración de los métodos de construcción eficaz de los diversos sistemas, en primer lugar, de las ternas de Steiner y Kirkman;

b) en las generalizaciones de los problemas de ternas para los sistemas de 4-, 5-, 6-, etc. conjuntos. Aunque dichos problemas siguen siendo actuales hoy día (véase [61]), tal camino de desarrollo paulatino fue perturbado. Tuvo lugar un salto lógico, cosa no tan rara en las matemáticas. La superación de las dificultades se empezó a buscar en la vía de construcción de una teoría más general.

Actualmente entre los sistemas de incidencia los que mayor interés presentan son los bloque-esquemas (esquemas en bloque). El estudio de estos se efectúa con gran actividad, lo que se explica tanto por las necesidades de la práctica, como por los intereses científicos puros.

En forma simplificada el origen de los bloque-esquemas puede ser descrito del modo siguiente. Los resultados del experimento realizado a un mismo tiempo en condiciones determinadas se escriben en forma de columna (bloque). Los resultados reiterativos, obtenidos en otras condiciones (cambiadas), proporcionan bloques nuevos. La colección de los bloques da

una tabla bidimensional llamada bloque-esquema (en forma abreviada BD, que proviene de la expresión inglesa "block-design").

De la elaboración estática de los resultados nace un enfoque al problema de planificación del experimento, es decir, de formación de su esquema (plan) con el fin de obtener resultados óptimos con un número mínimo de pruebas.

Para el análisis combinatorio, entre un gran número de problemas concernientes a los bloque-esquemas los que mayor interés representan son los problemas de existencia y clasificación, los que estudian las propiedades de los diferentes tipos de bloque-esquemas, los métodos de construcción de los mismos, la correlación, la elaboración de las cuestiones contiguas de la matemática discreta, de las geometrías finitas, de los grupos finitos, etc. Estos problemas teóricos se analizan intensamente desde el fin de los años 30 y el principio de los 40.

Sea un  $v$ -conjunto de elementos  $m_1, m_2, \dots, m_v$ . Los elementos de dicho conjunto están distribuidos entre  $b$  bloque-subconjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_b$ , la intersección de los cuales no es obligatoriamente un vacío. El número de elementos en el bloque  $M_j$  lleva el nombre de volumen del bloque y se denota con  $k_j$ . Los elementos pueden aparecer en varios bloques. Sea  $r_i$  el número de apariciones del elemento  $m_i$  (es decir, el número de bloques que contienen  $m_i$ ),  $i = 1, 2, \dots, v$ ; por fin, introduzcamos el número de repeticiones (pares no ordenados) de los elementos:  $\lambda_p$  ( $p = 1, 2, \dots, (v/2)$ ). En tal caso suele decirse que el conjunto de bloques  $M_1, \dots, M_b$  forma un *bloque-esquema* con los parámetros  $v, b, r_i, k_j, \lambda_p$  (si en lugar de los pares se analizan las ternas o  $t$ -muestras de elementos, entonces la disposición correspondiente se denomina *configuración táctica*). Así pues, un bloque-esquema se caracteriza por los parámetros  $v, b, r_i, k_j, \lambda_p$ .

Pueden haber varios tipos diferentes de bloque-esquemas. Por eso introduzcamos el principio de la clasificación de los bloque-esquemas tal como se formó hasta el presente. Ante todo, un bloque-esquema se llama *completo*, si en cada bloque están contenidos todos los elementos del conjunto, es decir,  $k_j = v, j = 1, 2, \dots, b$ , e *incompleto*, si  $k_j < v, j = 1, 2, \dots, b$ . Los cuadrados latinos pueden servir de ejemplo de los bloque-esquemas completos.

Los bloque-esquemas incompletos se dividen, a su vez, en dos grandes clases: la clase de bloque-esquemas incompletos equilibrados (en la forma abreviada BIB-esquemas, lo que viene del inglés "balanced incomplete block design") y la clase de bloque-esquemas incompletos parcialmente equilibrados (PBIB, del inglés "partially balanced incomplete block design").

Un bloque-esquema se llama BIB-esquema, si  $k_1 = k_2 = \dots = k_b = k < v$ ;  $r_1 = \dots = r_v = r$ , y  $\lambda_p = \lambda$  para cualquier  $p$ ; dicho de otro modo, en un BIB-esquema todos los elementos tienen un mismo número de repeticiones, todos los bloques son de igual volumen y cada

par de elementos aparece en un mismo número  $\lambda = \text{const}$  de bloques. Los PBIB-esquemas se diferencian en que en ellos  $\lambda \neq \text{const}$ . Debido a esta circunstancia se genera un gran número de diferentes tipos de PBIB-esquemas, lo que crea dificultades considerables en la investigación de ellos.

Se denomina bloque-esquema incompleto parcialmente equilibrado con  $m$  clases, o, en forma más breve, PBIB( $m$ )-esquema a un bloque-esquema, en el que el conjunto de todos los  $\binom{v}{2}$  pares de sus elementos puede ser partido en  $m$  clases disjuntas (un par de elementos referente a la  $i$ -ésima clase se denominará  $i$ -conexo), de un modo tal que

a) cualquier par de elementos  $i$ -conexos esté contenido exactamente en  $\lambda_i$  bloques ( $i = 1, 2, \dots, m$ );

b) para cualquier elemento exista exactamente  $n_i$  elementos que sean  $i$ -conexos con el primero ( $i = 1, 2, \dots, m$ );

c) para todo par de elementos  $i$ -conexos,  $\lambda$  y  $\beta$ , el número de elementos,  $j$ -conexos con  $\alpha$ , y, al mismo tiempo,  $l$ -conexos con  $\beta$ , es igual a  $p_{jl}^i$ , con la particularidad de que  $p_{jl}^i = p_{lj}^i$  ( $i, j, l = 1, 2, \dots, m$ ).

Por consiguiente, los parámetros de un PBIB( $m$ )-esquema son los números

$$v, b, k, r, \lambda_i, n_i, p_{jl}^i \quad (i, j, l = 1, 2, \dots, m).$$

Con el objeto de contribuir a concebir un gran número de construcciones combinatorias nuevas y, a veces, complejas, proponemos al lector el esquema de la clasificación primaria de los bloque-esquemas señalando las continuaciones posibles (fig. 4.1).

La teoría moderna de los bloque-esquemas es enorme en cuanto al número y volumen de las investigaciones reales, a menudo dispersadas y débilmente organizadas. Más abajo se expondrán los fundamentos de esta teoría sin pretender interpretar los hechos plenamente.

Al principio de este capítulo ya se ha considerado en forma general el método de representación matricial de la estructura de un conjunto. Apliquémoslo a los bloque-esquemas. Sea un bloque-esquema con los parámetros  $v, b, k, r^{1)}$ . Pongamos

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el } i\text{-ésimo elemento se encuentra en el } j\text{-ésimo bloque} \\ 0, & \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, v; \quad j = 1, 2, \dots, b.$$

La  $(v \times b)$ -matriz  $N = \|n_{ij}\|$  se llama matriz de incidencia del bloque-esquema dado; en este caso cada fila de la matriz  $N$  contiene  $r$  unidades y cada columna contiene  $k$  unidades ( $\lambda_p$  es igual al producto escalar de

<sup>1)</sup> No vamos a escribir el parámetro  $\lambda$ , si no se indica de qué, precisamente, bloque-esquema (equilibrado o parcialmente equilibrado) se trata en el caso a considerar.

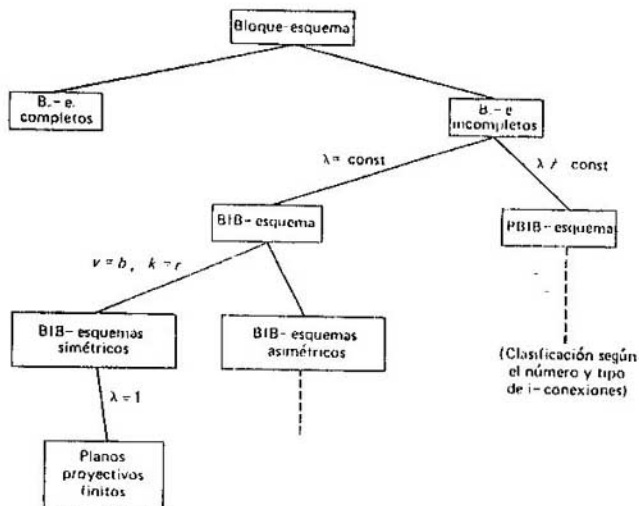


Fig.4.1.

(dos filas). Por ejemplo, un BIB-esquema con los parámetros  $v = 6$ ,  $b = 10$ ,  $k = 3$ ,  $r = 5$ ,  $\lambda = 2$  tiene la siguiente representación matricial (matriz de incidencia):

Bloque-esquema

1	1	1	1	1	2	3	2	3	2
2	3	4	5	2	3	4	4	5	4
3	4	5	6	6	5	6	5	6	6

Matriz

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1

He aquí un ejemplo más: supongamos que para un 9-conjunto se examina el siguiente sistema de subconjuntos:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (1, 2, 3); & B_2 &= (4, 5, 6); & B_3 &= (7, 8, 9) & B_4 &= (1, 4, 7); \\
 B_5 &= (2, 5, 8); & B_6 &= (3, 6, 9); & B_7 &= (1, 5, 9); & B_8 &= (2, 6, 7); \\
 B_9 &= (3, 4, 8); & B_{10} &= (1, 6, 8); & B_{11} &= (2, 4, 9) & B_{12} &= (3, 5, 7).
 \end{aligned}$$

No es difícil ver que este sistema es un BIB-esquema con los parámetros  $v = 9$ ,  $b = 12$ ,  $k = 3$ ,  $r = 4$ ,  $\lambda = 1$ . Escribamos el bloque-esquema, como antes, en forma de una  $(k \times b)$ -tabla rectangular:

1	4	7	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	5	8	4	5	6	5	6	4	6	4	5
3	6	9	7	8	9	9	7	8	8	9	7

La matriz de incidencia de este bloque-esquema es

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0

Pese a que la matriz parece ser engorrosa, las matrices binarias de incidencia son en la práctica muy simples para las operaciones. Del análisis de sus estructuras, podemos obtener directamente una serie de propiedades, incluidas las relaciones entre los parámetros. Por ejemplo, para los bloque-esquemas tenemos en general

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{j=1}^h k_j.$$

lo que es obvio. En particular, para los BIB-esquemas tenemos

$$bk = vr; \quad (1)$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1). \quad (2)$$

La primera de las relaciones expresa un simple cálculo del número de elementos en el bloque-esquema (es decir, el número de todas las unidades en la matriz de incidencia). En la segunda relación los razonamientos son los siguientes: cada elemento se encuentra  $r$  veces y está siempre contiguo de  $k-1$  elementos. Este mismo elemento se encuentra  $\lambda$  veces haciendo un par con cada uno de las  $v-1$  elementos.

Veamos las relaciones entre los parámetros del PBIB( $m$ )-esquema. Es evidente que subsiste, como antes, la igualdad (1). Establezcamos algunas otras igualdades:

$$\sum_{i=1}^m n_i = v-1; \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i n_i = r(k-1);$$

$$\sum_{l=1}^m p_{jl}^i = \begin{cases} n_j, & \text{si } i \neq j; \\ n_j - 1, & \text{si } i = j; \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \quad (3)$$

$$n_i p_{jl}^i = n_j p_{il}^j = n_l p_{ij}^l; \quad i, j, l = 1, 2, \dots, m.$$

La primera de las relaciones es obvia. La segunda es una modificación de (2) y se demuestra por razonamientos análogos. En la siguiente igualdad

$\sum_{l=1}^m p_{jl}^i$  significa el número de elementos  $j$ -conexos con cualquiera de los dos elementos  $i$ -conexos. Es igual, por consiguiente, a  $n_j$  (si  $i \neq j$ ), o bien a  $n_j - 1$ , (si  $i = j$ ). En lo que se refiere a la última relación, esta se

demuestra del modo siguiente: tomemos un elemento fijo  $\alpha$ . Por definición, existen  $n_i$  elementos  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_i}$ ,  $i$ -conexos con  $\alpha$ , y, además,  $n_j$  elementos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_j}$ ,  $j$ -conexos con  $\alpha$ . Construyamos una tabla binaria

$$\begin{pmatrix} b_{\gamma_1, \beta_1}^{\beta_1} & \dots & b_{\gamma_1, \beta_{n_i}}^{\beta_{n_i}} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{\gamma_{n_j}, \beta_1}^{\beta_1} & \dots & b_{\gamma_{n_j}, \beta_{n_i}}^{\beta_{n_i}} \end{pmatrix}$$

en la cual

$$b_{\gamma_j, \beta_i}^{\beta_i} = \begin{cases} 1, & \text{si } \beta_i \text{ y } \gamma_j \text{ son } i\text{-conexos;} \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Calculemos el número de unidades en cada columna de la matriz:

$$\sum_{j=1}^{n_j} b_{\gamma_j, \beta_i}^{\beta_i} = p_{j,i}^i;$$

y en cada columna:

$$\sum_{j=1}^{n_j} b_{\gamma_j, \beta_i}^{\beta_i} = p_{i,i}^i;$$

De los dos métodos de cálculo de todas las unidades en la matriz obtenemos

$$n_i p_{j,i}^i = n_j p_{i,i}^i.$$

Las relaciones (1), (2) y (1), (3) son condiciones necesarias para que exista los BIB- y PBIB(m)-esquemas, respectivamente.

Sea  $N = [n_{ij}]$  una  $(v \times b)$  matriz de incidencia de un bloque-esquema incompleto equilibrado con los parámetros  $v, b, r, k, \lambda$ . En este caso  $N$  satisface la siguiente ecuación matricial

$$NN^T = (r - \lambda)I + \lambda J,$$

donde  $N^T$  es la matriz transpuesta de  $N$ ;  $I$  es la matriz unidad de orden  $v$ ;  $J$  es una matriz integrada plenamente por unidades, también de orden  $v$ .

Efectivamente, calculemos el producto

$$N \cdot N^T = B = [b_{ij}]; \quad i, j = 1, 2, \dots, v.$$

El elemento  $b_{ij}$  es igual al producto escalar de la  $i$ -ésima fila de  $N$  por la  $j$ -ésima columna de  $N^T$ , por consiguiente,

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^b n_{il} n_{jl} = \begin{cases} r, & \text{si } i = j \\ \lambda, & \text{si } i \neq j; \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, v.$$

De aquí

$$B = \begin{pmatrix} r & & \\ & r & \lambda \\ & \lambda & \dots & r \end{pmatrix} = rJ + \lambda(J - I) = (r - \lambda)I + \lambda J.$$

Para la matriz  $B$  puede hallarse el valor de su determinante:

$$\det B = (r - \lambda)^{v-1}(v\lambda - \lambda + r).$$

Para obtener este resultado basta sustraer la primera columna de todas las demás columnas, y a continuación, agregar la suma de todas las filas, partiendo de la segunda, hacia la primera fila. En este caso, por arriba de la diagonal principal se dispondrán sólo los ceros:  $a'_{11} = r + (v - 1)\lambda$ ;  $a'_{22} = \dots = a'_{vv} = r - \lambda$ , lo que nos da el resultado buscado. Por cuanto de que  $k < v$  se deduce que  $\lambda = r \frac{k-1}{v-1} < r$ , entonces  $\det B \neq 0$ . Haciendo uso de (2), tenemos

$$\det B = (r - \lambda)^{v-1}rk \neq 0.$$

De este modo, el rango de la matriz  $B$  es igual a  $v$ . Por otra parte, el rango de  $N$  (y el de  $N^T$ ) no sobrepasa  $b$ . Según se sabe por la teoría de las matrices, el rango de un producto no es superior a los rangos de los factores. De aquí se deduce una desigualdad importante

$$b \geq v,$$

llamada desigualdad de Fisher, la cual sirve también de condición necesaria para la existencia de un BIB-esquema.

Del análisis de la matriz de incidencia  $N$  y de la matriz  $B = N \cdot N^T$  pueden deducirse una serie de teoremas referentes a los tipos particulares de los bloque-esquemas (véase [62]).

Las matrices de incidencia no son el único método de describir los bloque-esquemas; otro método análogo es el de aplicación de las formas cuadráticas. Este último método es singularmente interesante, porque la teoría de las formas cuadráticas está suficientemente elaborada. En efecto, la correlación  $N \cdot N^T = (r - \lambda)I + \lambda J$  se reencuadra en las formas cuadráticas. Introduzcamos las variables indeterminadas:  $x_1, x_2, \dots, x_v$ , correspondientes a los elementos de los bloque-esquemas, y asignamos a cada bloque  $b_j$  la forma

$$L_j = \sum_{i=1}^v n_{ij}x_i, \quad j = 1, 2, \dots, v,$$

donde  $n_{ij}$  es la multiplicidad del elemento  $i$  en el bloque  $b_j$ . Entonces, a la ecuación matricial  $N \cdot N^T = (r - \lambda)I + \lambda J$  se le pondrá en correspondencia la forma cuadrática:

$$\sum_{i=1}^b L_i^2 = (r - \lambda) \sum_{i=1}^v x_i^2 + \lambda \left( \sum_{i=1}^v x_i \right)^2.$$

En la teoría del análisis combinatorio y en las aplicaciones del mismo los bloque-esquemas desempeñan un papel de importancia. Varias de las estructuras combinatorias conocidas representan tipos particulares de los



bloque-esquemas o son equivalentes a los últimos. Aclaremos esto con un ejemplo.

Según lo dicho con anterioridad, los cuadrados latinos resultan ser bloque-esquemas completos. Las ternas de Steiner son, en esencia, BIB-esquemas, para los cuales  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ . Para ellos las correlaciones (1) y (2) entre parámetros adquieren la forma

$$3b = vr; \quad 2r = v - 1;$$

de donde

$$v = 2r + 1; \quad b = \frac{r(2r + 1)}{3}$$

y, por consiguiente,

$$r \equiv 0, 1 \pmod{3}; \quad v \equiv 1, 3 \pmod{6}.$$

Las matrices de Hadamard  $H$  son equivalentes a los tipos particulares de los bloque-esquemas. Efectivamente, tomemos la matriz  $H$  de orden  $n \geq 3$ . Se conoce (véase § 4.1) que  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Normalicemos  $H$ , es decir, multiplicando las filas y las columnas correspondientes por  $-1$ , reduzcámosla a una forma, en la cual la primera fila y la primera columna estarán compuestas de unidades positivas. Tal matriz  $H$  de orden  $n = 4t \geq 8$  resulta ser equivalente al BIB-esquema simétrico con los parámetros

$$v = b = 4t - 1; \quad k = r = 2t - 1; \quad \lambda = t - 1.$$

En efecto, a toda matriz normalizada  $H$  se le puede poner en correspondencia una  $(0, 1)$ -matriz  $A$  de orden  $v = 4t - 1$ , en cada línea de la cual se tienen  $k = 2t - 1$  unidades. El método de esta operación consiste en que en la matriz normalizada  $H$  se tachan la primera fila y la primera columna, y en la matriz restante todos los menos uno se sustituyen por ceros. La matriz  $A$  satisface la relación

$$A \cdot A^T = tI + (t - 1)J$$

y representa, pues, una matriz de incidencia de un bloque-esquema incompleto equilibrado en el que  $r - \lambda = t$ , y  $\lambda = t - 1$ . Los razonamientos son fácilmente invertidos, lo que precisamente demostrará nuestra afirmación.

En el § 4.2, al demostrar el teorema de existencia de la familia de cuadrados latinos ortogonales, se ha mostrado que la construcción de tal familia es equivalente a la conformación de una tabla ortogonal de fuerzas. Resulta, no obstante, que la existencia de la última origina la existencia de un bloque-esquema de determinado tipo. Expliquemos este hecho más detalladamente, pero, antes demos a conocer la definición general de la tabla ortogonal.

Sea dada una  $(m \times N)$ -matriz  $A$  con elementos del conjunto  $S = \{0,$

1, 2, ..., s - 1}. Existen en total  $s^t$  diferentes columnas de longitud  $t$  con los elementos del conjunto mencionado. Si en cada submatriz de  $t$  filas de la matriz  $A$  la columna  $(x_1, x_2, \dots, x_t)^T$  aparece  $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$  veces, donde el número  $\lambda$  es positivo y no varía al realizarse las permutaciones de  $x_1, x_2, \dots, x_t$ , entonces la matriz  $A$  se llama *tabla parcialmente equilibrada de fuerza  $t$*  con  $N$  columnas,  $m$  filas,  $s$  símbolos y los parámetros  $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$ , o, en una forma más breve, tabla  $(N, m, s, t)$  con los parámetros  $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_t)$ . Si  $\lambda = \text{const}$  para todas las columnas  $(x_1, x_2, \dots, x_t)$ , entonces la tabla  $(N, m, s, t)$  se denomina *tabla ortogonal de índice  $\lambda$* .

Aduzcamos, a título de ejemplo, una tabla ortogonal  $(18, 7, 3, 2)$  de índice  $\lambda = 2$  con los símbolos 0, 1, 2:

Tabla 4.2

Números de las filas	Números de las columnas																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1
3	0	1	2	1	2	0	0	1	2	2	0	1	2	0	1	1	2	0
4	0	1	2	2	0	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0	1	2	0
5	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	0	1	2	2	0	1
6	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2
7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

Si separamos de esta tabla las tres primeras columnas y la última fila obtendremos una tabla parcialmente equilibrada  $(15, 6, 3, 2)$  con los parámetros

$$\lambda(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & \text{si } x_1 \neq x_2; \\ 1, & \text{si } x_1 = x_2. \end{cases}$$

La existencia de  $k$  cuadrados latinos biunívocamente ortogonales de orden  $s$  es equivalente a la existencia de una tabla ortogonal  $(s^2, k + 2, s, 2)$  de índice  $\lambda = 1$ .

Efectivamente, sea que tenemos una tabla ortogonal  $(s^2, k + 2, s, 2)$  y supongamos que los elementos en esta tabla están designados con los números 1, 2, ...,  $s$ . Permutemos las columnas en la tabla de una manera tal que los elementos de las columnas en las primeras dos filas se encuentren en orden

$$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, s), \dots, (s, 1), (s, 2), \dots, (s, s).$$

Para cada  $l = 3, 4, \dots, k + 2$  construyamos la tabla  $A_l = (s^2, s, s, 2)$  del

modo siguiente: la primera columna  $A_l$  consta de los primeros  $s$  elementos de la fila  $l$  de la tabla inicial; la segunda columna, de los siguientes  $s$  elementos, etc. hasta la última compuesta por los últimos  $s$  elementos de la misma fila. Las tablas  $A_1, A_2, \dots, A_{k+2}$ , conformadas del modo indicado, forman un conjunto compuesto por  $k$  cuadrados latinos biunívocamente ortogonales de orden  $s$ . El hecho de que la tabla  $A_l$  no contiene dos elementos iguales en la columna lo muestra el examen de la primera fila de la tabla inicial. Una propiedad análoga de las filas se ve del examen de la segunda fila. Si  $l \neq j$ , entonces,  $A_l$  y  $A_j$  son ortogonales, lo que se desprende del método de construcción de las filas correspondientes. La demostración como es fácil comprobar es convertible.

Las investigaciones científicas en el dominio de los bloque-esquemas se agrupan actualmente alrededor del problema de existencia (o no existencia) de los tipos aislados de los bloque-esquemas, del estudio de sus propiedades y de la búsqueda de los métodos de su construcción. La teoría combinatoria se encuentra en este respecto sólo al principio de su desarrollo. Para el estudio ulterior de este tema podemos recomendar al lector las capítulos 10—16 del libro [4].

Las investigaciones modernas en el dominio de las disposiciones combinatorias y de los bloque-esquemas requieren, en particular, la utilización de la teoría de los números, la teoría de las matrices, la teoría de los cuerpos convexos, etc.

#### 4.4. PERMANENTES

Este concepto ha adquirido en el análisis combinatorio moderno una importancia teórica y práctica tan grande que consideramos necesario dedicarle un párrafo especial aparte.

Sean dados un conjunto  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  y cierta familia de sus subconjuntos  $M = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ . El teorema de P. Hall da las condiciones necesarias y suficientes para que la familia  $M$  posea sistemas de representantes distintos y una frontera inferior para el número de tales sistemas. Sin embargo, en muchos problemas del análisis combinatorio surge la necesidad de obtener estimaciones más exactas de este número. Este objetivo se consigue por introducción de una nueva noción, permanente de la matriz, y estudiando las propiedades del mismo.

Sea una matriz  $A = [a_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , cuyos elementos están representados por números reales. Se denomina *permanente* de la matriz citada la expresión (el número)

$$\text{per } A = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)},$$

en la que la sumación se realiza respecto de todos los encajes  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, m\}$  en  $\{1, 2, \dots, n\}$ . En este caso se supone, naturalmente, que  $m \leq n$ .

Sea  $A$  una matriz de incidencia para  $M$  respecto de  $S$ , entonces  $\text{per } A$  será el número de sistemas de representantes distintos, de los cuales dispone la familia de subconjuntos  $M$ .

Los permanentes fueron introducidos en 1812, casi simultáneamente, en las memorias de Binet [63] y Cauchy [64] en relación con el desarrollo de la teoría de determinantes como tipo especial de las funciones simétricas de signo variable. El término "permanente" apareció por primera vez en la obra de Muir [65], donde están enunciadas algunas propiedades del permanente.

Es evidente que el permanente es invariante respecto a las permutaciones de las filas y columnas en la matriz  $A$ ; la multiplicación de los elementos de cualquier fila de la matriz  $A$  por un escalar  $a$  sustituye  $\text{per } A$  por  $a \text{ per } A$ ; el desarrollo de Laplace en menores respecto a las filas es válido también para los permanentes.

Una lista  $(a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{m\sigma(m)})$  de elementos de la matriz  $A$ , en la cual ningún par se encuentra en una línea (fila o columna) se denominará *transversal*. El permanente de la matriz  $A$  representa, de este modo, una suma de todas las  $n!(n - m)$  transversales de los productos de los elementos de la matriz  $A$ , dispuestos en una misma transversal.

La determinación de permanente y de sus propiedades señalan que la noción de permanente es próxima a la de determinante. Sin embargo, si la técnica de cálculo de los determinantes está actualmente bien elaborada, el cálculo de los permanentes es un problema técnicamente difícil, cuya resolución requiere nuevos avances. Hoy día sabemos sólo un método que consiste en la aplicación de la fórmula de inclusiones y exclusiones.

Denotemos con  $A_r$  una matriz que se obtiene de la matriz  $A$  reemplazando  $r$  de sus columnas por columnas compuestas de ceros. Sea  $S(A_r)$  el producto de las sumas de las filas  $A_r$ , y  $\sum S(A_r)$ , las sumas  $S(A_r)$  respecto de todas las selecciones para  $A_r$ . En este caso es válida la siguiente fórmula de Ryser:

$$\text{per } A = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{n-m+i}{i} \sum S(A_{n-m+i}).$$

En efecto, designemos con  $M$  el conjunto de todas las  $m$ -permutaciones  $(j_1, \dots, j_m)$  con repeticiones de los números naturales  $1, 2, \dots, n$ . Supongamos que el peso de tal permutación es igual a  $\prod_{i=1}^m a_{ij_i}$ , y la propiedad  $p_i$  significa que dicha permutación no contiene el número entero  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Supongamos ahora que  $A_r$  se obtuvo de  $A$  por sustitución de las columnas con los números  $i_1, i_2, \dots, i_r$  por las compuestas de ceros. Entonces, la suma de los pesos de las permutaciones de  $M$  que poseen cada una de las propiedades  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}$  es igual a

$$V(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}) = S(A_r).$$

Por consiguiente,

$$V(r) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} V(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}) = \sum S(A_r).$$

La función per  $A$  es igual a la suma de los pesos de los elementos de  $M$  que satisfacen las  $n - m$  propiedades  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Al hacer uso de la fórmula del método de inclusiones y exclusiones, llegamos a la fórmula de Ryser aducida más arriba. Para una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  esta fórmula adopta la forma

$$\text{per } A = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum S(A_i).$$

Si  $J$  es una matriz de orden  $n$ , compuesta íntegramente por unidades, entonces per  $J = n!$ , y a título de corolario, obtenemos la identidad

$$n! = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n.$$

Si consideramos la matriz  $J - I$ , donde  $I$  es la matriz unidad, tenemos

$$\text{per}(J - I) = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!} = D_n,$$

donde  $D_n$  es el número de desórdenes. Valiéndonos de la fórmula de Ryser, podemos obtener otra fórmula para el número de desórdenes:

$$D_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^i (n-i-1)^{n-1}.$$

Existe una conexión interesante entre el permanente de una matriz cuadrada  $A = [a_{ij}]$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) de orden  $n$  y los permanentes y determinantes de sus submatrices principales. Designemos con  $Q_{k,n}$  el conjunto de todas las sucesiones crecientes  $\vec{j} = (j_1, \dots, j_k)$  de longitud  $k$  de los números naturales  $1, 2, \dots, n$ :  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ . Sea  $\vec{j} \in Q_{k,n}$ ; con  $A[\vec{j}]$  denotemos una submatriz  $[a_{j_s j_t}]$  ( $r, s = 1, 2, \dots, k$ ) de la matriz  $A$ , y con  $A(\vec{j})$ , una submatriz de la matriz  $A$  de orden  $(n - k)$ , complementaria a  $A[\vec{j}]$ .

Resulta válida la siguiente relación (véase [66]):

$$\text{per } A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\vec{j} \in Q_{k,n}} \text{per } A(\vec{j}) \det A[\vec{j}]. \quad (1)$$

Efectivamente, no es difícil notar que la expresión en el segundo miembro de esta fórmula representa una suma de los productos de los elementos de la matriz  $A$  dispuestos en una misma transversal con ciertos coeficientes enteros. Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\vec{j} \in Q_{k,n}} \text{per } A(\vec{j}) \det A[\vec{j}] = \sum_{\sigma \in \sigma_n} d_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)},$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las sustituciones  $\sigma$  del grupo simétrico  $\mathfrak{S}_n$  de grado  $n$ . Demostremos que  $d_\sigma = 1$  para cualquier sustitución  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Con ello quedará demostrada la fórmula (1). Desarrollemos  $\sigma$  en producto de ciclos:  $\sigma = (c_1) \dots (c_m)$ , y notemos que la expresión  $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$  figura en aquellos y sólo aquellos productos per  $A(j)$  det  $A[j]$  del segundo miembro de la fórmula (1), para los cuales existen los números naturales  $l_1, \dots, l_i$  ( $1 \leq l_1 \leq \dots < l_i \leq m, 1 \leq i \leq m$ ) tales que  $\{j_1, \dots, j_k\} = \bigcup_{p=1}^m \tilde{c}_p$ , donde  $\tilde{c}_p$  es el conjunto de números naturales que forman la notación del  $l_p$ -ésimo ciclo. Por consiguiente

$$\begin{aligned} d_\sigma &= \sum_{i=1}^m \sum_{j \in Q_{i,m}} (-1)^{|l_1, \dots, l_i|} \dots (-1)^{|l_1, \dots, l_i|} \dots \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j \in Q_{i,m}} (-1)^{i+1} = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^{i+1} = 1, \end{aligned}$$

donde  $|l_1, \dots, l_i|$  es la longitud sumaria de los ciclos  $c_{l_1}, \dots, c_{l_i}$ . La afirmación está demostrada.

Observemos que la identidad (1) puede ser escrita en la siguiente forma

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{j \in Q_{k,n}} \det A[j] \text{ per } A[j].$$

He aquí dos identidades de MacMahon [72] que pueden obtenerse como simples consecuencias de la fórmula (1):

$$\text{per } A = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k! \sum_{N/N_1, \dots, N_k} \prod_{i=1}^k \det A[N_i], \quad (3)$$

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k! \sum_{N/N_1, \dots, N_k} \prod_{i=1}^k \text{per } A[N_i]. \quad (4)$$

La suma se toma aquí respecto de todas las particiones del conjunto  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  en  $k$  partes  $N_1, \dots, N_k$ . En efecto, sustituyendo per  $A(j)$  en el segundo miembro de la fórmula (1) por la expresión correspondiente según la misma fórmula y haciendo así un número finito de veces, llegamos, tras algunas transformaciones sencillas, a (3). La identidad (4) se demuestra de un modo análogo empleando la fórmula (2). Las dificultades que existen con los cálculos de los permanentes condujeron a la aparición de desigualdades, las cuales desempeñaron un papel fundamental en la investigación de toda una serie de problemas del análisis combinatorio: problemas de Van der Waerden sobre el mínimo del permanente de una matriz dos veces estocástica, problemas de estimación del número de ternas de Steiner no isomorfas y de rectángulos latinos, problemas sobre el número de recubrimientos de un grafo dimensional reticular por dímeros, etc.

Cronológicamente la primera desigualdad no trivial para los permanentes fue obtenida en 1961 por Marcus y Newman [18]. Sea  $A$  una  $(m \times n)$ -matriz, y sea  $B$  una  $(n \times m)$ -matriz. Entonces

$$|\text{per}(A \cdot B)|^2 \leq \text{per}(A \cdot A^T) \cdot \text{per}(B \cdot B^T),$$

con la particularidad de que la igualdad se consigue, si y sólo si existe una fila nula en  $A$ , o bien una columna nula en  $B$ , o bien  $A = DPB^T$  para cierta matriz diagonal  $D$  y la matriz conmutadora  $P$ . El signo  $T$  denota la operación de transposición de la matriz. Para una matriz cuadrada de orden  $n$  de aquí se deduce (si ponemos  $B = I$ ):

$$|\text{per} A|^2 \leq \text{per}(A \cdot A^T).$$

La igualdad se verifica, si y sólo si  $A$  tiene una fila nula o bien  $A = DP$ .

En 1980 Egórychev [67], haciendo uso de la representación del permanente en forma de un discriminante mixto, introdujo en la teoría de permanentes las desigualdades clásicas de Alexándrov y Brunn-Minkowski que se emplean en la geometría. Debido a ello él tuvo éxito en demostrar la validez de la conocida hipótesis de Van der Waerden<sup>1)</sup>.

Aducimos estas desigualdades para los permanentes, dejando al lado su fuente originaria, es decir, la teoría geométrica de los discriminantes mixtos de A. D. Alexándrov, desarrollada por él en los años 30 y utilizada para estudiar los volúmenes de los cuerpos convexos en el espacio euclidiano.

Nos harán falta algunos hechos del álgebra lineal. Sea  $L$  un espacio lineal de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ , y sea  $\varphi$  una forma bilineal simétrica en  $L$ . Suele decirse que  $(L, \varphi)$  es un *espacio con métrica*. Se denomina *signatura* de  $\varphi$  a la terna  $(k_1, k_2, k_3)$ , donde  $k_1$  es el número de valores propios positivos de una matriz de la forma  $\varphi$  en cierta base,  $k_2$ , el número de valores propios negativos, y  $k_3$ , el número de valores propios nulos de la matriz mencionada. El teorema de Sylvester (la ley de inercia) afirma que dicha terna no depende de la base. Se dice que el espacio con métrica  $(L, \varphi)$  es el *espacio de Minkowski*, si la signatura de  $\varphi$  es igual a  $(1, n-1, 0)$ .

**Lema 1.** Un espacio con métrica  $(L, \varphi)$  es el de Minkowski, si y sólo si se cumple la condición  $\Phi$ : existe un vector  $a \in L$  tal que  $\varphi(a, a) > 0$ , y para cualquier  $b \in L$  de  $\varphi(a, b) = 0$ ,  $b \neq 0$ , se deduce que  $\varphi(b, b) < 0$ .

*Demostración.* Recordemos que el vector  $a \in L$  se denomina regular, si existe tal  $b \in L$  que  $\varphi(a, b) \neq 0$ . Un subespacio  $M \subseteq L$  es regular, si lo es cualquier vector no nulo suyo. Supongamos ahora que  $(L, \varphi)$  es un espacio con métrica, para el cual se cumple la condición  $\Phi$ . Por cuanto el vector  $a$  es regular, podemos descomponer  $L = \{a\} \oplus L_a$ , donde  $\{a\}$  es la cápsula lineal de  $a$ , y  $L_a$  el complemento ortogonal de  $a$  (véase [69]). Cons-

<sup>1)</sup> D. I. Falikman [68] obtuvo independientemente la solución del problema de Van der Waerden (sin demostrar la unicidad de la matriz minimizadora).

truyamos en  $L_a$  una base ortogonal  $b_2, \dots, b_n$ . Entonces  $a, b_2, \dots, b_n$  será la base ortogonal en  $L$ , donde  $\varphi(a, a) > 0$ , y  $\varphi(b_i, b_i) < 0$ , cualquiera que sea  $i \in \{2, \dots, n\}$ , es decir,  $(L, \varphi)$  es el espacio de Minkowski. Lo recíproco, evidentemente, también tiene lugar (partimos del hecho de que en un espacio con métrica existe una base ortogonal). El lema está demostrado.

Sea  $(L, \varphi)$  un espacio con métrica. Un vector  $a \in L$  se llama *positivo* (*negativo*), si  $\varphi(a, a) > 0$  ( $\varphi(a, a) < 0$ ), e *isótropo*, si  $\varphi(a, a) = 0$ .

**Teorema.** (Desigualdad de Cauchy—Buniakovski para el espacio de Minkowski). Sea  $(L, \varphi)$  un espacio de Minkowski;  $a$ , un vector positivo y  $b$ , un vector arbitrario. Entonces

$$\varphi^2(a, b) \geq \varphi(a, a) \cdot \varphi(b, b) \quad (5)$$

y la igualdad tiene lugar, cuando y sólo cuando  $b = \lambda a$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Si  $b = \lambda a$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces en (5) tiene lugar la igualdad. Si  $\varphi(b, b) \leq 0$ , entonces, evidentemente, (5) se verifica. Supongamos que  $b \notin \{a\}$ ,  $\varphi(b, b) > 0$ ; en este caso examinemos un plano  $P = [a, b]$ . Demostraremos que en  $P$  hay un vector negativo. Si para cierto  $y \in P$ ,  $y \neq 0$ , se verifica  $\varphi(y, y) = 0$ , entonces, según el lema 1, tenemos  $\varphi(a, y) \neq 0$ . De aquí resulta que la expresión  $\varphi(a + \lambda y, a + \lambda y) = \varphi(a, a) + 2\lambda\varphi(a, y)$  será inferior a cero con  $\lambda$  correspondiente, es decir, se ha encontrado un vector negativo en  $P$ . Supongamos ahora que para todo  $x \in P$ ,  $x \neq 0$ , tiene lugar  $\varphi(x, x) > 0$ . En este caso  $P$  es un subespacio regular. Por eso se construye una descomposición en la suma directa:  $L = P \oplus P_1$ , donde  $P_1$  es un complemento ortogonal de  $P$ . Tomemos las bases ortogonales;  $\{e_1, e_2\}$  en  $P$  y  $\{e_3, \dots, e_n\}$  en  $P_1$ . La unión de ellas es una base ortogonal para  $L$ . En esta base  $\varphi(e_1, e_1) > 0$ ,  $\varphi(e_2, e_2) > 0$ , por consiguiente, la signatura de  $L$  es  $(k_1, k_2, k_3)$  con  $k_1 \geq 2$ , lo que contradice la afirmación de que  $(L, \varphi)$  es un espacio de Minkowski. Así pues, la suposición de partida no es cierta y en  $P$  siempre existe un vector negativo. Examinemos ahora la expresión  $\varphi(a + \lambda b, a + \lambda b) = \varphi(a, a) + 2\lambda\varphi(a, b) + \lambda^2\varphi(b, b)$ ; para cierto  $\lambda$  ella es negativa, por lo cual el trinomio cuadrado de  $\lambda$  cuenta con raíces reales. Por consiguiente, su discriminante no es negativo:

$$\varphi^2(a, b) - \varphi(a, a) \cdot \varphi(b, b) \geq 0,$$

lo que demuestra (5). El caso de igualdad se analiza con ayuda de los razonamientos análogos y se sugiere que el lector lo haga como un ejercicio. El teorema queda demostrado.

**Teorema** (desigualdad de Alexándrov-Egórychev para permanentes). Sea  $a_{ij} \geq 0$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Entonces se verifica la desigualdad

$$\text{per}^2 \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} a_{1,n-1} a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} a_{n,n-1} a_{n,n} \end{bmatrix} \geq$$



$$\geq \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n-1} \end{bmatrix} \cdot \text{per} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n} & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n} & a_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Las matrices que están en el segundo miembro difieren sólo por las dos últimas columnas: en una matriz la última columna repite la penúltima, en la otra, viceversa. Si  $a_{ij} > 0$  para  $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n-2$ , entonces la igualdad se consigue, cuando y sólo cuando para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  tiene lugar  $a_{i,n-1} = \lambda a_{i,n}$ , donde  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Para demostrar el teorema se requieren dos lemas de D. I. Falikman [68].

**Lema 2.** Sea  $\varphi(x, y)$  una función bilineal simétrica en el espacio vectorial  $V$  tal, que existe un vector no nulo  $a \in V$ , el cual posee la propiedad de que  $\varphi(a, a) = 0$ , y para todo  $x \in V, x \neq \lambda a$  ( $\lambda \in \mathbf{R}$ ) se afirma que de la igualdad  $\varphi(x, a) = 0$  se deduce que  $\varphi(x, x) < 0$ . Entonces, si  $b, c \in V, B, c \neq 0$ , y  $\varphi(b, c) = 0, \varphi(b, b) > 0$ , entonces  $\varphi(c, c) < 0$ .

*Demostración.* Si para cierto  $x \in V$  se cumple la condición  $\varphi(x, a) = 0$ , entonces  $\varphi(x, x) \leq 0$ . De la desigualdad  $\varphi(b, b) > 0$  se deduce  $\varphi(b, a) \neq 0$ . Pongamos  $\eta = -\varphi^{-1}(b, a) \cdot \varphi(c, a)$ . Entonces  $\varphi(c + \eta b, a) = 0$ , y, por consiguiente,

$$0 \geq \varphi(c + \eta b, c + \eta b) = \varphi(c, c) + \eta^2 \varphi(b, b).$$

Si  $\eta \neq 0$ , entonces  $\varphi(c, c) \leq -\eta^2 \cdot \varphi(b, b) < 0$ . En cambio, si  $\eta = 0$ , tenemos  $\varphi(c, a) = 0$ . Los vectores  $c$  y  $a$  no son colineales, puesto que de lo contrario de la condición  $\varphi(b, c) = 0$  se desprendería que  $\varphi(b, a) = 0$ , lo que no es cierto. Por eso,  $\varphi(c, c) < 0$  también en este caso.

**Lema 3.** Sea  $\varphi(x, y) = \text{per} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & x_1 y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & x_n y_n \end{bmatrix}$ , donde  $a_{ij} > 0$  para  $i, j$  tales que  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-2, n \geq 2$ .

Entonces, si  $b, c \in \mathbf{R}^n, b, c \neq 0, \varphi(b, c) = 0, \varphi(b, b) > 0$ , se tiene que  $\varphi(c, c) < 0$ .

La demostración del lema la realizaremos por inducción respecto de  $n \geq 2$ . Cuando  $n = 2, \varphi(x, y) = \text{per} \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_2 + x_2 y_1$ . Tenemos:  $0 = \varphi(b, c) = b_1 c_2 + b_2 c_1, \varphi(b, b) = 2b_1 b_2 > 0$ . Por consiguiente,  $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$  y  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ . Al multiplicar ambos miembros de la igualdad  $-b_1 c_2 = b_2 c_1$  por  $b_1 c_2$ , obtenemos  $-b_1^2 c_2^2 = b_1 b_2 c_1 c_2$ . Por consiguiente,  $c_1 c_2 < 0$ , y  $\varphi(c, c) = 2c_1 c_2 < 0$ .

Supongamos ahora que  $n > 2$ , y que para todos los  $k$  naturales:  $2 \leq k \leq n-1$  y la afirmación del lema es válida. Pongamos  $a = (0, \dots, 0, 1)$ . Entonces

$$\varphi(a, a) = \text{per} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Elijamos un vector arbitrario  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi(x, a) = 0$ , y los vectores  $x$  y  $a$  no son colineales, es decir,  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ . Entonces  $\varphi(x, x) < 0$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi(x, a) &= \text{per} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & x_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & x_n & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \text{per} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & x_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-2} & x_{n-1} & \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\varphi(x, x) = \text{per} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-2} & x_1 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & x_n & x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n-2} a_{ni} \varphi_i(x', x'),$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_i(x', x') &= \\ &= \text{per} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n-2} & x_1 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n-2} & x_{n-1} & x'_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Está claro que  $\varphi_i(x', a'_i) = \varphi(x, a) = 0$ , y, además,  $\varphi_i(a'_i, a'_i) > 0$  (puesto que  $a_{ij} > 0$  para  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n-2$ ), donde  $a'_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n-1,i})$ . Por consiguiente, de acuerdo con la hipótesis de inducción,  $\varphi_i(x', x') < 0$ , de donde  $\varphi(x, x) < 0$ . La aplicación del lema anterior finaliza la demostración del lema 3.

Demostremos ahora (6). Supongamos al principio que todos los elementos de la matriz  $A = [a_{ij}]$  son positivos. Para la función  $\varphi$ , construida en el lema 3, existe un vector positivo  $a = (1, \dots, 1)$ . De acuerdo con el lema 3, de que  $\varphi(a, b) = 0, b \neq 0$ , se desprende  $\varphi(b, b) < 0$ . Por eso, según el lema 1, el par  $(\mathbb{R}^n, \varphi)$  es un espacio de Minkowski, y la desigualdad (6) es la desigualdad de Cauchy—Buniakovski (5) para dicho espacio.

El caso en que entre los elementos  $a_{ij}$  pueden encontrarse elementos nulos se desprende del examinado más arriba con ayuda de un paso límite. Sin embargo, en estas circunstancias no es obligatorio que el signo de igualdad tenga lugar sólo cuando los vectores  $b$  y  $c$  son colineales. El caso general en que (6) se convierte en una igualdad ha sido analizado por A. A. Panov [70].

En 1926 Van der Waerden [71] planteó una cuestión; ¿cuál será el valor mínimo de la función del permanente sobre el conjunto  $\Omega_n$  de todas las matrices dos veces estocásticas de orden  $n$ ? La respuesta positiva a esta pregunta era conocida como hipótesis de Van der Waerden. Se suponía que si  $A$  era una matriz dos veces estocástica de orden  $n$ , entonces per

$A \geq n^{-n} \cdot n!$ , con la particularidad de que la igualdad se consigue, cuando y sólo cuando  $A$  es la matriz  $J_n$ , todos los elementos de la cual son iguales a  $n^{-1}$ . La demostración de la validez de la hipótesis ha sido obtenida en 1980. Comencemos su exposición por una serie de lemas auxiliares (véase [18]). Introduzcamos algunas nociones preliminares.

Una matriz no negativa de orden  $n$  la llamaremos *parcialmente descomponible* si contiene una submatriz nula de dimensión  $k \times (n - k)$ . En otras palabras, la matriz  $A$  es parcialmente descomponible, si existen matrices conmutables  $P$  y  $Q$  de tal índole que

$$PAQ = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

donde  $B$  y  $D$  son matrices cuadradas. Si la matriz no contiene submatriz nula de dimensión  $k \times (n - k)$  para ningún  $k = 1, \dots, n - 1$ , se denominará *bien indescomponible*.

Observemos que si  $A$  es una matriz dos veces estocástica parcialmente descomponible, se encontrarán matrices conmutables  $P$  y  $Q$  tales que  $PAQ$  se descomponga en una suma directa de las matrices dos veces estocástica.

En efecto, supongamos que

$$PAQ = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

donde  $B$  y  $D$  son matrices cuadradas, y el orden  $D$  es igual a  $k$ . Denotemos con  $s(X)$  la suma de los elementos en la matriz  $X$ . Puesto que  $PAQ$  es una matriz dos veces estocástica, la suma de los elementos dispuestos en sus primeras  $n - k$  columnas, es igual a  $n - k$ , es decir,  $s(B) = n - k$ . Análogamente,  $s(D) = k$ . Por consiguiente,  $s(C) = s(PAQ) - s(B) - s(D) = n - (n - k) - k = 0$ . Por cuanto  $C$  es no negativa, tenemos  $C = 0$ . Es obvio que las matrices  $B$  y  $D$  son dos veces estocásticas.

**Lema 4.** Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ . Para que cada transversal suya contenga cero, es necesario y suficiente que en  $A$  exista una submatriz nula de dimensión  $r \times t$ , donde  $r + t = n + 1$ .

La validez de la afirmación se deduce del teorema de König (véase § 4.1).

Denotemos con  $A_{ij}$  una submatriz de la matriz  $A$  obtenida por supresión de la  $i$ -ésima fila y de la  $j$ -ésima columna.

**Lema 5.** Una matriz no negativa  $A$  de orden  $n \geq 2$  es bien indescomponible, cuando y sólo cuando para todos los  $i, j = 1, \dots, n$  se verifica la desigualdad: per  $A_{ij} > 0$ .

*Demostración.* Según el lema 4 per  $A_{ij} = 0$ , cuando y solo cuando la submatriz  $A_{ij}$ , y, por tanto, la matriz  $A$  contienen una submatriz nula de dimensión  $r \times t$ , donde  $r + t = (n - 1) + 1$ . Dicho de otro modo, per  $A_{ij} = 0$ , si y sólo si  $A$  es parcialmente descomponible.

La matriz dos veces estocástica  $A$  de orden  $n$  se llamará *minimizadora*, siempre que per  $A = \min_{B \in \Omega} B$ .

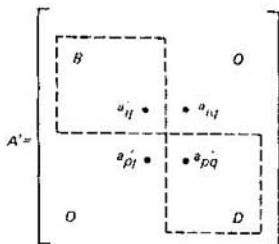


Fig. 4.2.

**Lema 6.** La matriz minimizadora es bien indescomponible.

*Demostración.* Sea  $A \in \Omega_n$  una matriz minimizadora y supongamos que  $A$  es parcialmente descomponible. En este caso existirán matrices conmutables  $P$  y  $Q$  tales que  $PAQ$  será una suma directa de las matrices  $B \in \Omega_{n-k}$  y  $D \in \Omega_k$ . Denotemos  $A' = PAQ$ . Está claro que  $A' \in \Omega_n$ ,  $A'$  es una matriz minimizadora. Elijamos en la transversal de la matriz  $A'$ , compuesta por los elementos no nulos, los elementos  $a'_{ij}$  y  $a'_{pq}$  que pertenecen a las matrices  $B$  y  $D$ , respectivamente. Tenemos:  $a'_{ij} \neq 0$ ,  $a'_{pq} \neq 0$ ,  $a'_{iq} = a'_{pj} = 0$ , per  $A'_{ij} > 0$  y per  $A'_{pq} > 0$ . Del lema 4 se deduce que per  $A'_{iq} = \text{per } A'_{pj} = 0$ . Veamos la matriz  $A'(\varepsilon)$ :  $a'_{ij}(\varepsilon) = a'_{ij} - \varepsilon$ ,  $a'_{pq}(\varepsilon) = a'_{pq} - \varepsilon$ ,  $a'_{iq}(\varepsilon)a'_{pj}(\varepsilon) = \varepsilon$ ,  $a'_{ri}(\varepsilon) = a'_{ri}$ , si  $r \neq i, p$ , o bien  $t \neq j, q$ . Está claro que  $A'(\varepsilon) \in \Omega_n$ , cuando los valores de  $\varepsilon > 0$  son suficientemente pequeños. Nos convencemos inmediatamente de que  $\frac{d}{d\varepsilon} \text{per } A'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -\text{per } A'_{ij} + \text{per } A'_{iq} - \text{per } A'_{pq} + \text{per } A'_{ij} = -\text{per } A'_{ij} - \text{per } A'_{pq} < 0$ . Por consiguiente, per  $A'(\varepsilon) < \text{per } A'$ , cuando los valores de  $\varepsilon > 0$  son suficientemente pequeños. Esto contradice el hecho de que la matriz  $A'$  es minimizadora.

**Lema 7.** Si una matriz  $A \in \Omega_n$  es minimizadora y si  $a_{pq} > 0$ , entonces per  $A_{pq} = \text{per } A$ .

*Demostración.* Estudiemos el siguiente conjunto de las matrices de dimensión  $n \times n$ :  $C(A) = \{X = [x_{ij}] | x_{ij} \geq 0 \text{ para cualesquiera } i, j = 1, \dots, n; x_{ij} = 0 \text{ para } (i, j) \in Z\}$ , donde  $Z = \{(i, j) | a_{ij} = 0\}$ . Consideramos  $C(A)$  como un conjunto de puntos en un espacio euclidiano de dimensión  $n^2 - |Z|$ ; en este caso  $A$  será un punto interior de dicho conjunto. En  $C(A)$  tenemos un problema suave (véase [11]):

$$\text{per } X \rightarrow \inf$$

con restricciones

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n; \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n-1$$



por construcción. Esta submatriz tiene las dimensiones  $(n - k) \times (n - l - 1)$ . De aquí y de la desigualdad (10):  $n - k + n - l - 1 = n + (n - k - l - 1) \geq n$ , puesto que  $n - k - l - 1 \geq 0$ . Lo último contradice la plena descomponibilidad de la matriz  $A$ . Esto quiere decir que la igualdad  $\lambda_0 = 0$  es imposible. Al dividir las relaciones (8) por  $\lambda_0$ , obtenemos

$$\text{per } A_{ij} = \bar{\lambda}_i + \bar{\mu}_i \text{ para cualesquiera } (i, j) \notin Z \\ i, j \in \{1, \dots, n\}$$

(aquí tomamos  $\bar{\mu}_n = 0$ ).

Permutando, si es necesario, las filas y columnas de la matriz  $A$ , logremos que se cumplan las desigualdades:  $\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_n$ ,  $\bar{\mu}_1 \leq \bar{\mu}_2 \leq \dots \leq \bar{\mu}_n$ . Descomponiendo per  $A$  respecto de la primera fila y la última columna, y empleando el hecho de que la suma de los elementos en cualquier fila (columna) de la matriz  $A$  es igual a la unidad, obtendremos

$$\lambda_1 + \bar{\mu}_n \geq \sum_{\substack{j=1 \\ (1, j) \notin Z}}^n a_{1j} \text{ per } A_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \text{ per } A_{1j} \text{ per } A_{1j} = \text{per } A = \\ = \sum_{i=1}^n a_{in} \text{ per } A_{in} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i, n) \notin Z}}^n a_{in} \text{ per } A_{in} \geq \bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_n.$$

Por consiguiente,  $\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_n = \text{per } A = \text{Per } A_{1j} = \text{per } A_{in}$  para todos los  $i, j$  tales que  $(1, j) \notin Z$ ,  $(i, n) \notin Z$ .

Supongamos que para todos los  $i, j$  tales que  $j \geq j_1$ ,  $i \leq i_1$ ,  $(i, j) \notin Z$  ya se ha demostrado que  $\text{per } A_{ij} = \text{per } A$ . Veamos la  $(i_1 + 1)$ -ésima fila de la matriz  $A$ . Si existe  $\bar{j} \geq j_1$  tal que  $(i_1 + 1, \bar{j}) \notin Z$ , entonces para todo  $j \geq \bar{j}$  tal que  $(i_1 + 1, j) \notin Z$ , tenemos:  $\text{per } A_{i_1+1, j} = \text{per } A$  (por suposición) y para todo  $j < \bar{j}$  tal que  $(i_1 + 1, j) \notin Z$  tenemos:  $\text{per } A_{i_1+1, j} = \bar{\lambda}_{i_1+1} + \bar{\mu}_j \leq \bar{\lambda}_{i_1+1} + \bar{\mu}_{\bar{j}} = \text{per } A_{i_1+1, \bar{j}} = \text{per } A$ . Por consiguiente,  $\text{per } A = \sum_{j=1}^n a_{i_1+1, j} \text{ per } A_{i_1+1, j} \leq \text{per } A$ , y para todos los  $j$  tales que  $(i_1 + 1,$

$j) \notin Z$ , se verifica la igualdad

$$\text{per } A_{i_1+1, j} = \text{per } A.$$

Los razonamientos análogos son lícitos también para la  $(j_1 - 1)$ -ésima columna de la matriz  $A$ . En cambio, si para cualesquiera  $j \geq j_1$  y  $i \leq i_1$  se verifica:

$$(i_1 + 1, j) \in Z \text{ y } (i, j_1 - 1) \in Z, \text{ es decir, } a_{i_1+1, j} = 0 \text{ y } a_{i, j_1-1} = 0,$$

entonces

$$\bar{\lambda}_{i_1+1} + \bar{\mu}_{j_1-1} \geq \sum_{j=1}^{j_1-1} a_{i_1+1, j} \text{ per } A_{i_1+1, j} = \text{per } A = \\ = \sum_{i=i_1+1}^n a_{i, j_1-1} \text{ per } A_{i, j_1-1} \geq \bar{\lambda}_{i_1+1} + \bar{\mu}_{j_1-1},$$

y, por consiguiente, para cualesquiera  $i, j$  tales que  $(i, j_1 - 1) \notin Z$ ,  $(i_1 + 1, j) \notin Z$ , tenemos:  $\text{per } A_{i, j_1 - 1} = \text{per } A_{i_1 + 1, j} = \text{per } A$ .

Así pues, si  $(i, j) \notin Z$ , entonces  $\text{per } A_{ij} = \text{per } A$ , lo que se trataba de demostrar.

**Lema 8** (desigualdad de London). Si  $A$  es una matriz minimizadora en  $\Omega_n$ , para cualesquiera  $i, j = 1, \dots, n$  se verifica la desigualdad  $\text{per } A_{ij} \geq \text{per } A$ .

*Demostración.* Para toda matriz conmutadora  $P = [p_{ij}]$  y el número  $\theta \in [0, 1]$  pongamos  $f_p(\theta) = \text{per}((1 - \theta)A + \theta P)$ . Por cuanto  $A$  es la matriz minimizadora, entonces  $f'_p(0) \geq 0$  para cualquier matriz conmutadora  $P$ . Sea  $\sigma$  una permutación correspondiente a  $P$ . Tenemos

$$\begin{aligned} f'_p(0) &= \sum_{r,t=1}^n (-a_{rt} + p_{rt}) \text{per } A_{rt} = \sum_{r,t=1}^n p_{rt} \text{per } A_{rt} - n \text{per } A = \\ &= \sum_{j=1}^n \text{per } A_{r\sigma(r)} - n \text{per } A \geq 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{r=1}^n \text{per } A_{r\sigma(r)} \geq n \text{per } A \quad (11)$$

para toda permutación  $\sigma$ . Según el lema 6, la matriz  $A$  es bien indescomponible, por lo cual, de conformidad con el lema 5, cualquier elemento de  $A$  se dispone en cierta transversal, cuyos elementos restantes son todos positivos. Dicho de otro modo, para cualquier par  $(i, j)$  existe tal permutación  $\sigma$  que  $j = \sigma(i)$ , y  $a_{r\sigma(r)} > 0$ , cuando  $r = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$ . Pero, en virtud del lema 7, esto significa que  $\text{per } A_{r\sigma(r)} = \text{per } A$  para  $r = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$ . Por cuanto  $j = \sigma(i)$ , obtenemos de (11):  $\text{per } A_{ij} \geq \text{per } A$ , lo que se trataba de demostrar.

Ahora, siguiendo los razonamientos de Egórychev, señalemos cómo se puede demostrar, al hacer uso de la desigualdad (6), la validez de la suposición de Van der Waerden.

Sea  $A$  una matriz minimizadora. Probemos que  $\text{per } A_{ij} = \text{per } A$  para cualesquiera  $i, j = 1, \dots, n$ . Supongamos lo contrario: existe al menos un solo par  $r, s \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\text{per } A_{rs} > \text{per } A$ . Por cuanto la matriz  $A$  es dos veces estocástica, existe  $t \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $a_{rt} > 0$ . Entonces, en virtud de la desigualdad (6) y del lema 8, tenemos

$$\begin{aligned} \text{per}^2 A &\geq \left( \sum_{k=1}^n a_{ks} \text{per } A_{kt} \right) \left( \sum_{k=1}^n a_{kt} \text{per } A_{ks} \right) > \\ &> \left( \sum_{k=1}^s a_{ks} \text{per } A \right) \left( \sum_{k=1}^n a_{kt} \text{per } A \right) = \text{per}^2 A \end{aligned}$$

(el carácter estricto de la desigualdad en este caso se desprende de que  $a_{rt} > 0$  y  $\text{per } A_{rs} > \text{per } A > 0$ ).

Demostremos ahora que si  $A$  es una matriz minimizadora, entonces  $a_{ij} = n^{-1}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Supongamos que la columna de la matriz  $A$

de número  $n$  se diferencia de  $(n^{-1}, \dots, n^{-1})^T$ . Por cuanto  $A$  no se descompone en una suma directa de matrices no nulas, cada elemento de la  $n$ -ésima columna de  $A$  es inferior a la unidad. Por consiguiente, entre los primeros  $n - 1$  elementos de cada fila de la matriz  $A$  hay por lo menos un elemento no nulo. Pasando de  $A$  a una matriz que se obtiene a partir de  $A$  sustituyendo la  $i$ -ésima y  $j$ -ésima columnas de su semisuma ( $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, n - 1$ ), obtendremos, al hacer un número finito de pasos, la matriz  $A'$  en la que todos los elementos de las primeras  $n - 1$  columnas son positivos, mientras que la  $n$ -ésima columna coincide con la  $n$ -ésima columna de la matriz  $A$ , con la particularidad de que  $\text{per } A' = \text{per } A$ , puesto que, hecho cualquier paso, el permanente no varía (lo que se desprende de la fórmula de descomposición del permanente de una matriz respecto de las columnas y de la igualdad de todos los permanentes de las submatrices de  $(n - 1)$ -ésimo orden).

Designemos con  $A_j(b)$  una matriz obtenida de  $A'$  como resultado de la sustitución de la  $j$ -ésima columna por la columna  $b$ . Ya hemos aclarado que en la desigualdad

$$\text{per}^2 A' \geq \text{per } A'_n(a'_n) \text{ per } A'_n(a_n)$$

se realiza la igualdad. El carácter positivo de las componentes  $a'_1, \dots, a'_{n-1}$  da el derecho de afirmar que  $a_n = \lambda_i a'_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ). Por cuanto las sumas de componentes de los vectores son todas iguales a 1, entonces  $a_n = a'_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ). Como la matriz  $A'$  es dos veces estocástica llegamos a que  $a'_1 = \dots = a'_{n-1} = a_n = (n^{-1}, \dots, n^{-1})^T$ , lo que es una contradicción. Por consiguiente, todas las columnas de la matriz  $A$  son iguales a  $(n^{-1}, \dots, n^{-1})^T$  y esto demuestra nuestra afirmación.

Veamos el problema sobre las estimaciones superiores para los permanentes. En 1960 Ryser supuso que en la clase de  $(0, 1)$ -matrices de orden  $mk$ , cada línea de las cuales contiene  $k$  unidades, el valor máximo del permanente se logra en la suma directa de matrices de orden  $k$ , compuestas por unidades. J. Minc enunció en 1963 una suposición más general de que si  $A$  era una  $(0, 1)$ -matriz de orden  $n$  que tiene  $r_1, \dots, r_n$  sumas respecto de las filas, entonces  $\text{per } A \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{\frac{1}{r_i}}$ . De esta desigualdad se deduce

inmediatamente la hipótesis de Ryser.

La desigualdad de Minc la demostró por primera vez (en 1973) Bregman [73]. Más abajo aducimos una demostración más sencilla de esta desigualdad que se debe a Schrijver [74].

**Lema 9.** Para los números reales no negativos  $x_1, \dots, x_r$  es válida la desigualdad

$$\left( r^{-1} \sum_{i=1}^r x_i \right)^{\sum_{i=1}^r x_i} \leq \prod_{i=1}^r x_i^{x_i}$$

(en esta fórmula se supone que  $0^0 = 1$ ).



*Demostración.* Al hacer uso de la convexidad de la función  $y = x \log_2 x$ , obtenemos

$$r^{-1} \sum_{i=1}^r x_i \log_2 \left( r^{-1} \sum_{i=1}^r x_i \right) \leq r^{-1} \sum_{i=1}^r x_i \log_2 x_i,$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado del lema.

Sea  $A = [a_{ij}]$  una  $(0, 1)$ -matriz cuadrada de orden  $n$ , y sea  $S$  un conjunto de todas las permutaciones  $\pi$  de los números  $1, \dots, n$  tales que  $\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = 1$  entonces

$$\prod_{\substack{i,j \\ a_{ij}=1}} \text{per}(A_{ij})^{\text{per}A} = \prod_{\pi \in S} \prod_{i=1}^n \text{per} A_{i\pi(i)}, \quad \prod_{i=1}^n r_i^{\text{per}A} = \prod_{\pi \in S} \prod_{i=1}^n r_i.$$

La validez de estas identidades se confirma con facilidad mediante una comprobación directa. Aprovechémoslas para demostrar la desigualdad de Minc. Apliquemos el método de inducción matemática completa respecto de  $n$ . Del lema 9 tenemos

$$\begin{aligned} (\text{per} A)^{n \text{per}A} &= \prod_{i=1}^n (\text{per} A)^{\text{per}A} = \prod_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^n a_{ij} \text{per} A_{ij} \right)^{\sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per}A_{ij}} \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^n \left( r_i^{\text{per}A} \prod_{j: a_{ij}=1} (\text{per} A_{ij})^{\text{per}A_{ij}} \right) = \prod_{\pi \in S} \left[ \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) \left( \prod_{i=1}^n \text{per} A_{i\pi(i)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Apliquemos ahora la hipótesis de inducción a cada una de las matrices  $A_{i\pi(i)}$ :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \text{per} A_{i\pi(i)} &\leq \prod_{i=1}^n \left( \prod_{\substack{j \neq i \\ a_{j\pi(i)}=0}} (r_j!)^{\frac{1}{r_j}} \right) \left( \prod_{\substack{j \neq i \\ a_{j\pi(i)}=1}} (r_j - 1)!^{\frac{1}{(r_j-1)}} \right) = \\ &= \prod_{j=1}^n \left( \prod_{\substack{i \neq j \\ a_{j\pi(i)}=0}} (r_j!)^{\frac{1}{r_j}} \right) \left( \prod_{\substack{i \neq j \\ a_{j\pi(i)}=1}} (r_j - 1)!^{\frac{1}{(r_j-1)}} \right) = \prod_{j=1}^n \left[ r_j!^{\frac{n-r_j}{r_j}} (r_j - 1)! \right]. \end{aligned}$$

La última igualdad se ha obtenido por cálculo de los factores  $(r_j!)^{1/r_j}$  y  $(r_j - 1)!^{1/(r_j-1)}$ . Siendo fijos  $\pi$  y  $j$ , el número de índices  $i$ , para los cuales  $i \neq j$ , es igual a  $n - r_j$  si  $a_{j\pi(i)} = 0$ , y a  $r_j - 1$ , si  $a_{j\pi(i)} = 1$ . Así pues,

$$\begin{aligned} (\text{per} A)^{n \text{per}A} &\leq \prod_{\pi \in S} \left[ \left( \prod_{i=1}^n r_i \right) \left( \prod_{j=1}^n r_j!^{\frac{n-r_j}{r_j}} (r_j - 1)! \right) \right] = \\ &= \prod_{\pi \in S} \left( \prod_{i=1}^n r_i^{\frac{n}{r_i}} \right) = \left( \prod_{i=1}^n r_i! \frac{1}{r_i} \right)^{n \text{per}A}, \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

Volvamos a las aplicaciones de las desigualdades a los permanentes.

Denotemos con  $L(r, n)$  el número de  $(r \times n)$ -rectángulos latinos compuestos por los elementos de un conjunto  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . Analicemos algún rectángulo latino de dimensión  $t \times n$ ,  $1 \leq t < r$ . De cuántas maneras puede ser extendido hasta que se obtenga un  $(t+1) \times n$ -rectángulo latino? Está claro que el número de tales métodos es igual a  $\text{per } A$ , donde  $A$  es la matriz de incidencia del sistema de subconjuntos  $(S_1, \dots, S_n)$ , donde  $S_i$  es un subconjunto de aquellos elementos de  $S$  que no se encuentran en la  $i$ -ésima columna del rectángulo a extender ( $i = 1, \dots, n$ ).

En cada fila de la matriz  $A$  están contenidas  $n-t$  unidades; la matriz  $(n-t)^{-1}A$  será dos veces estocástica. Aplicando las desigualdades de Minc y de Van der Waerden, obtendremos

$$\frac{n!}{n^n} (n-t)^n \leq \text{per } A \leq (n-t)!^{n-t}.$$

Cuando  $t=1$ ,  $\text{per } A = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!} = D_n$ , lo que constituye el número de desórdenes sobre  $n$  elementos. Por consiguiente,

$$\frac{(n!)^{r-1}}{n^{n(r-2)}} D_n \prod_{i=2}^{r-1} (n-t)^n \leq L(r, n) \leq n! D_n \prod_{i=2}^{r-1} (n-t)!^{n-t}.$$

Si ponemos  $r=n$ , obtendremos  $L(n, n) \geq (n!)^{2n} n^{-n^2} > (e^{-2}n)^{n^2}$ . Se ha aprovechado aquí la conocida desigualdad:  $n! > e^{-n}n^n$ . Wilson [58] utilizó la desigualdad reducida  $L(n, n) > (e^{-2}n)^{n^2}$  para determinar la frontera inferior del número  $N(v)$  de ternas no isomorfas de Steiner de orden  $v$  y obtuvo la siguiente estimación:

$$N(v) \geq (e^{-5}v)^{v^2/6}.$$

Examinemos en conclusión las aplicaciones de los permanentes a los problemas de dímeros que surgieron en la física y química. Llamemos  $n$ -ladrillo a un paralelepípedo  $k$ -dimensional ( $k \geq 2$ ) de volumen  $n$ , en el cual las longitudes de las aristas son de números enteros:  $a_1, \dots, a_k$ . Sea  $n$  par. Se plantea una cuestión: ¿cuántos son los métodos para componer un  $n$ -ladrillo, sirviéndose de 2-ladrillos (dímeros)? Denotemos este número con  $N$ . Dividamos el  $n$ -ladrillo en cubos unitarios y numeremos los:  $1, 2, \dots, n$ . Supongamos que  $A = [a_{ij}]$  es una matriz de incidencia que caracteriza la disposición mutua de los cubos:  $a_{ij} = 1$  ó  $0$ , lo que depende de si tienen o no aristas comunes los cubos marcados con los números  $i$  y  $j$  ( $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$ ).

Se afirma que  $N^2 = \text{per } A$ . Efectivamente, a todo par ordenado de particiones del  $n$ -ladrillo en dímeros le corresponde una transversal biunívoca de la matriz  $A$  compuesta por unidades. Por ejemplo, sea  $n=6$ ,  $k=2$ ,  $a_1=2$ ,  $a_2=3$ . La matriz de incidencia tendrá la forma siguiente:

1	2	3
4	5	6

Fig. 4.3.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	1	0	1	0

Fig. 4.4.

1	2	3
4	5	6

1	2	3
4	5	6

Al par ordenado de particiones del ladrillo en la fig. 4.4, le corresponde b.univocamente la permutación

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y la transversal de la matriz  $A$  compuesta por unidades contorneadas en la fig. 4.3.

Observemos que todas las sumas respecto de las filas y columnas de la matriz de incidencia  $A$  son iguales a  $2k$ , a excepción de aquellas que corresponden a los cubos en la superficie. Veamos, en lugar del  $n$ -ladrillo un ladrillo toroidal correspondiente, el cual se obtiene por pegadura de las aristas opuestas del ladrillo original. La matriz de incidencia  $A'$  del ladrillo toroidal tiene  $2k$  unidades en cada fila y en cada columna. Valiéndonos de la desigualdad de Mine, obtendremos:  $\text{per } A' \leq (2k)!^{n/2k}$ , y, por consiguiente,  $N \leq (2k)!^{n/4k}$ .

Hammersley [75] mostró que si  $a_i \rightarrow \infty$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , la magnitud  $n^{-1} \ln N$  tiende a cierto límite  $\lambda_k$ . De este modo,

$$\lambda_k \leq \frac{1}{2} \ln [(2k)!]^{1/2k} < \frac{1}{2} \ln k.$$

La aplicación de la desigualdad de Van der Waerden a la matriz  $A'$  nos conduce a la estimación por debajo:  $\lambda_k \geq \frac{1}{2} \ln \frac{2k}{e}$  (véase ([75])). Por consiguiente,

$$\lambda_k \sim \frac{1}{2} \ln \frac{2k}{e} (1 + o(1)) \quad \text{para } k \rightarrow \infty.$$

## 5.1. EVIDENCIA EN LAS INTERPRETACIONES DE LOS SISTEMAS DISCRETOS

Los sistemas discretos, a cuyos métodos de estudio se dedica este libro, existen en una diversidad exclusivamente grande. La apreciación del carácter discreto de tal o cual sistema se forma o bien debido a la comprensión de la existencia separada y discreta de los elementos del sistema dado, o bien se predetermina por el carácter discreto de la información recibida (por ejemplo, lecturas de los instrumentos). Correspondientemente, los métodos matemáticos de investigación de los sistemas semejantes se caracterizan por la misma diversidad.

Los modelos matemáticos de los sistemas discretos son, con mayor frecuencia, conjuntos de símbolos dispuestos en la forma discreta, habitualmente de puntos, unidos con líneas, si esto está determinado por las condiciones del problema.

A los modelos combinatorios se les atribuye una evidencia máxima posible no sólo para facilitar la comprensión de tal o cual problema. Los medios ilustrativos o didácticos del análisis combinatorio contribuyen frecuentemente a crear las posibilidades para resolver los problemas. De ejemplo puede servir el teorema de Ramsey (véase § 3.3).

Recordemos que el teorema de Ramsey generaliza la idea de partición de los conjuntos. Sea  $P_r(S) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t$  una partición del conjunto de todos los  $r$ -subconjuntos del conjunto  $S$ . Supongamos, luego, que vienen dados números enteros  $q_i$  tales que  $1 \leq r \leq q_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, t$ . Si existe un  $q_i$ -subconjunto de  $S$ , cuyos  $r$ -subconjuntos se contienen todos en  $A_i$ , entonces se le llama  $(q_i, A_i)$ -subconjunto del conjunto  $S$ . El teorema de Ramsey afirma que existe un número mínimo natural  $N(q_1, q_2, \dots, q_t, r)$ , a partir del cual (es decir, para  $n \geq N$ ) el conjunto  $S$  contiene un  $(q_i, A_i)$ -subconjunto para cierto  $i = \{1, 2, \dots, t\}$ .

Veamos un caso particular del teorema de Ramsey en que  $r = 2$ . La interpretación geométrica en este caso se expresa así:  $n$  elementos corresponden a  $n$  puntos en un plano; a un par de puntos corresponde un segmento que une dichos puntos; la inclusión del segmento en el subconjunto  $A_i$  se marca pintándolo de  $i$ -ésimo color ( $i = 1, 2, \dots, t$ ). El teorema de Ramsey garantiza la existencia, para  $n \geq R(p, q; 2)$ , de  $p$  puntos unidos entre sí sólo con segmentos del primer color, o bien de  $q$  puntos unidos sólo con segmentos del segundo color.

La misma idea sirve de base para la aplicación del teorema de Ramsey a los polígonos convexos. Se analizan los  $n$ -conjuntos de puntos en un plano tales que ninguna combinación de tres puntos se dispone en una

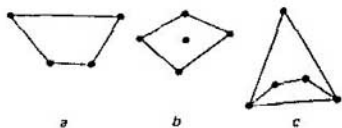


Fig. 5.1.

misma recta. Resulta que empleando los puntos de dicho conjunto como vértices, podemos construir cualquier polígono convexo de  $m$  lados, siempre que  $n$  sea suficientemente grande.

**Teorema.** Para un número entero dado  $m$  existe un número entero mínimo  $N_m$  tal que cualesquiera  $N_m$  puntos en el plano, de los cuales ninguna combinación de tres se dispone en una misma recta, contienen  $m$  puntos que forman un polígono convexo de  $m$  lados.

*Demostración.* Observemos, para iniciar, que entre cualesquiera 5 puntos se pueden elegir 4 que representen los vértices de un cuadrilátero convexo. La demostración se observa fácilmente en la fig. 5.1. Según se ve, incluso el caso "degenerado" (fig. 5.1, c) da un cuadrilátero convexo (en el interior de un triángulo).

Ahora, es lícita la afirmación de que si entre  $m$  puntos en consideración cualesquiera 4 son vértices de un cuadrilátero convexo, entonces dichos  $m$  puntos forman un polígono convexo de  $q$  lados. En efecto, supongamos que existe, a lo sumo, un polígono convexo de  $q$  lados ( $q < m$ ). Sirviéndonos de las diagonales trazadas a partir de un mismo vértice, dividamos este polígono en triángulos y en este caso  $(m - q)$  puntos caerán en el interior de los triángulos, lo que contradice la condición de convexidad de todos los cuadriláteros. Esto quiere decir que  $q = m$ , el polígono de  $m$  lados será convexo.

Analicemos ahora la afirmación general. Sea  $m \geq 4$ ;  $n \geq N(m, 5; 4)$ . Partiremos los 4-conjuntos (hay en total  $\binom{n}{4}$  de tales conjuntos) en convexos y no convexos. Entonces, según el teorema de Ramsey, o bien: a) existe un pentágono con todos los cuadriláteros no convexos, lo que contradice lo demostrado anteriormente; o bien b) existe un polígono de  $m$  lados cuyos cuadriláteros son todos convexos, y, por consiguiente, de conformidad con lo demostrado anteriormente, este polígono de  $m$  lados es convexo.

Las interpretaciones geométricas existen para casi todos los objetos combinatorios. Por ejemplo, para los cuadrados latinos la interpretación geométrica se construye del modo siguiente. Cada uno de los  $n^2$  elementos de un cuadrado latino se considera como un punto sobre la diversidad de 2-coordenada. Por el conjunto de puntos que forman el cuadrado latino tracemos tres  $n$ -familias de líneas que pasan: 1) por las filas, 2) por las columnas, 3) por los elementos iguales. Estas familias forman una 3-red

con  $n^2$  nodos. Inversamente, cada 3-red de esta índole puede interpretarse como cuadrado latino.

La condición de equivalencia de los cuadrados latinos en la interpretación que se considera aparece como conservación de las 3-redes al reenumerar las líneas de cada familia. A veces se admite la sustitución recíproca de las familias, con lo cual se amplía el concepto de equivalencia. Diremos, por fin, que la interpretación geométrica fue, evidentemente, la causa por la cual surgió el concepto de ortogonalidad en aplicación a los cuadrados latinos.

Una aplicación sucesiva y reiterada de las interpretaciones ilustrativas condujo a que se hayan separado clases de modelos matemáticos que poseen sus propios medios de investigación claramente distinguibles a saber, la axiomática, la terminología, los símbolos y los medios lógicos de demostración. En nuestro caso dichos medios se representan, con preferencia, por las geometrías y los grafos finitos. La tarea del capítulo presente consiste en introducir al lector en estas ramas extensas de las matemáticas, en interés del objetivo fundamental del libro.

## 5.2. IDEAS GEOMÉTRICAS FINITAS

Para los sistemas que se estudian en el análisis combinatorio se emplean geometrías finitas. Este término se usa para designar sistemas compuestos por un número finito de elementos, entre los cuales están establecidas las relaciones de incidencia. A los elementos, no definibles en general, se les asignan nombres geométricos: "puntos"  $P$  y "líneas"  $L$ . La relación de incidencia  $I$  se lee así: "un punto  $P$  se dispone en la línea  $L$ ", o bien "la línea  $L$  contiene el punto  $P$ ". Para dichas relaciones se introducen, además, axiomas del tipo que tienen los axiomas geométricos.

Las precisiones y explicaciones adicionales o bien las modificaciones de las enunciaciones iniciales conducen a diferentes tipos de geometrías finitas y a las partes de la geometría contiguas y próximas a las citadas geometrías. Así, por ejemplo, surgen las relaciones con los problemas de la topología combinatoria, la geometría discreta, la geometría proyectiva, la teoría geométrica de los números, la teoría de los grafos, la geometría combinatoria, etc.

**Sobre los espacios proyectivos.** Se conoce, por ejemplo, que la totalidad de todos los espacios de una estructura incidente  $\{P, L, J\}$ , que acabamos de mencionar, donde los elementos  $P$  se llaman puntos, los elementos  $L$ , líneas, y  $J$ , relaciones de incidencia, es un espacio proyectivo.

Existen diferentes métodos de construcción axiomática de un espacio proyectivo. El más empleado es la modificación del sistema de axiomas propuesta en 1899 por D. Hilbert con el fin de fundamentar la geometría elemental. Todo espacio proyectivo se considera como una colección de elementos de tres géneros: puntos, rectas y planos, entre los cuales se

establece la relación de incidencia, fundamental para la geometría proyectiva, que se caracteriza por axiomas adecuados. Estos axiomas se diferencian del grupo correspondiente de axiomas de la geometría elemental en que en los primeros se requiere que cada dos rectas dispuestas en un mismo plano tengan un punto común, y en cada recta se tengan al menos tres puntos distintos. Para obtener una geometría más sustancial, la totalidad citada de axiomas se completa con axiomas de orden y continuidad (para un espacio proyectivo real), con el axioma de Pappus (para la geometría proyectiva sobre un cuerpo conmutativo), con el postulado de Fano, etc.

Examinemos a continuación más detalladamente dos métodos de construir espacios proyectivos. En primer lugar puede tratarse de la realización de un espacio proyectivo como un conjunto de rectas en un espacio lineal. Sea  $L$  un espacio lineal sobre un campo  $K$ , y denotemos con  $\dim L$  la dimensión de  $L$ . El conjunto  $P(L)$  de rectas (es decir, de subespacios lineales unidimensionales) en  $L$  lleva el nombre de *espacio proyectivo* asociado con  $L$ , y las propias rectas en  $L$  se llaman puntos de  $P(L)$ . El número  $\dim L - 1$  es la dimensión de  $P(L)$  y se denota  $\dim P(L)$ . Los espacios proyectivos y bidimensionales se denominan *recta proyectiva* y *plano proyectivo*, respectivamente.

Un conjunto de la forma  $P(A)$ , donde  $A \subseteq L$  se llama *subespacio proyectivo* en  $P(L)$ . Es evidente que  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cap P(A_2)$ , es decir, una familia de espacios proyectivos está cerrada respecto de las intersecciones. Por eso, en el conjunto de subespacios proyectivos  $P(A)$  que contienen el conjunto dado  $S \subseteq P(L)$  hay un subespacio menor, que se representa por la intersección de todos los subespacios de este tipo. Este último lleva el nombre de *cápsula proyectiva de  $S$* , se denota con  $\overline{S}$ , y coincide con  $P(A)$ , donde  $A$  es la cápsula lineal de todas las rectas correspondientes a los puntos  $s \in S$  en  $L$ . Se puede mostrar, que si  $P_1$  y  $P_2$  son dos subespacios proyectivos finitos en el espacio proyectivo  $P$ , entonces

$$\dim(P_1 \cap P_2) + \dim(\overline{P_1 \cap P_2}) = \dim P_1 + \dim P_2.$$

En adelante nos harán falta dos espacios proyectivos concretos que se denominan configuraciones de Desargues y de Pappus.

**Configuración de Desargues.** Sea  $A$  una familia de puntos en un espacio proyectivo. El símbolo  $\overline{A}$  designará su cápsula proyectiva. En un espacio proyectivo tridimensional examinemos el seis ordenado de puntos  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ . Se supone que los puntos son distintos de dos en dos y que  $a_1a_2a_3$  y  $b_1b_2b_3$  son, en esencia, unos planos. Luego, supongamos que las rectas  $a_1b_1, a_2b_2$  y  $a_3b_3$  se intersecan en un solo punto  $p$ , distinto de  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  (fig. 5.2). En este caso diremos que los triángulos  $(a_1a_2a_3)$  y  $(b_1b_2b_3)$  son perspectivas respecto del punto  $p$  y cada uno de ellos es una proyección del otro realizada desde el centro  $p$ , si ellos se disponen en diferentes planos. Entonces, para todo par de índices  $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, 3\}$  las rectas  $a_ia_j$  y  $b_ib_j$  no coinciden, pues en el caso contrario

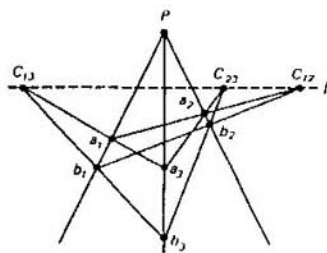


Fig. 5.2.

tendríamos  $a_i = b_i$ , puesto que  $a_i$  y  $b_i$  son puntos de intersección de estas rectas con la recta  $pa_ib_i$ . Además, las rectas  $a_1a_2$  y  $b_1b_2$  se disponen en el plano común  $pa_1a_2$ . Por eso, ellas se intersecan en un punto que se designará con  $c_{ij}$ . Los puntos  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{23}$  son puntos de intersección de las prolongaciones de los pares de los lados correspondientes de los triángulos  $(a_1a_2a_3)$  y  $(b_1b_2b_3)$ .

Diremos que los triángulos  $(a_1a_2a_3)$  y  $(b_1b_2b_3)$  son perspectivos respecto de la recta  $l$ , siempre que los puntos  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{23}$  se disponen en la recta  $l$ .

**Teorema de Desargues.** Si dos triángulos son perspectivos respecto de cierto punto, son perspectivos respecto de una recta.

**Configuración de Pappus.** Examinemos en un plano proyectivo dos rectas diferentes  $l_1$ ,  $l_2$  y dos ternas de puntos distintos  $a_1, a_2, a_3$  y  $b_1, b_2, b_3$  (fig. 5.3) dispuestos en las rectas de dos en dos. Para cualquier par de índices  $\{i, j\} \in \{1, 2, 3\}$  tales que  $i < j$  designemos con  $c_{ij}$  el punto de intersección de las rectas  $a_ib_j$  y  $a_jb_i$ .

**Teorema de Pappus.** Los puntos  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{23}$  se disponen en una misma recta.

El lector puede encontrar la demostración de los teoremas de Desargues y de Pappus, como también otros pormenores, en el libro [69].

En segundo lugar, los espacios proyectivos pueden construirse por adición a un espacio afín de los "puntos infinitos alejados". Merced a este procedimiento se logra la uniformidad en las enunciaciones y demostraciones de toda una serie de teoremas de la geometría analítica y de algunos

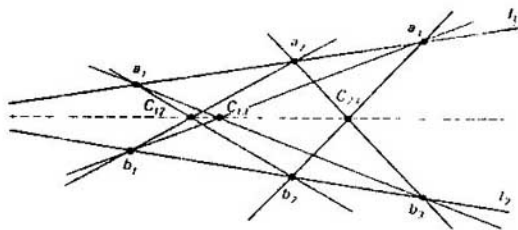


Fig. 5.3.



otros resultados geométricos. Este método condujo a la creación de la geometría proyectiva clásica. A medida que se desarrollaba el método axiomático fueron creadas diferentes descripciones axiomáticas de los espacios proyectivos. Las investigaciones ulteriores han mostrado que los sistemas geométricos que obedecen a dichos axiomas tienen su propio significado y la teoría de ellos resulta ser muy profunda (véanse [4, 21, 76 y 77]). Desde entonces por *espacio proyectivo clásico* se entiende, por lo común precisamente tal sistema geométrico. Por ejemplo, un espacio tridimensional se define como un conjunto, cuyos elementos se llaman *puntos*, provisto de dos sistemas de subconjuntos cuyos elementos se llaman *rectas* y *planos*, respectivamente. En este caso han de cumplirse los siguientes axiomas de incidencia:

1. Dos puntos distintos pertenecen a una recta única.
2. Tres puntos distintos, no dispuestos en una recta, pertenecen a un plano único.
3. Una recta y un plano tienen un punto común.
4. La intersección de dos planos contiene una recta.
5. Existen cuatro puntos que no se disponen en un plano y que son tales que cualesquiera tres de ellos no se disponen en una recta.
6. Cada recta consta no menos que de tres puntos.

En lo que sigue examinaremos sólo las geometrías proyectivas clásicas, denominándolas, para simplificar, *geometrías proyectivas*.

Un *plano proyectivo clásico* se define como un conjunto, cuyos elementos se llaman *puntos*, provisto de un sistema de subconjuntos cuyos elementos se llaman *rectas*. En este caso han de cumplirse los siguientes axiomas:

1. Dos puntos diferentes pertenecen a una recta única.
2. La intersección de dos rectas es no vacía.
3. Existen tres puntos que no se disponen en una recta.
4. Cada recta consta por lo menos de tres puntos.

El conjunto  $P(L)$ , donde  $L$  es un espacio lineal sobre el campo  $K$  de dimensión 4 ó 3, junto con los sistemas de planos proyectivos y rectas en ellos, tal como fueron definidos más arriba, satisfacen los axiomas del espacio proyectivo clásico tridimensional y del plano proyectivo clásico, respectivamente. No obstante, no todo espacio proyectivo clásico o plano es isomorfo a uno de nuestros espacios  $P(L)$ . Más aún, resulta que existen planos proyectivos clásicos no isomorfos incluso a ningún plano del tipo  $P(L)$ , donde  $L$  es un espacio proyectivo tridimensional sobre algún cuerpo. La razón de ello radica en que en los planos proyectivos del tipo  $P(L)$  el teorema de Desargues sigue siendo válido, mientras que existen planos que no son de Desargues, donde el teorema no se cumple. Entencemos sin demostración el resultado siguiente:

**Teorema 1.** Tres propiedades del plano proyectivo clásico son equivalentes:

- a) en dicho plano se cumple el teorema plano de Desargues;

b) dicho plano puede encajarse en un espacio proyectivo clásico;

c) existe un espacio lineal tridimensional  $L$  sobre cierto campo  $K$ , definido de un modo unívoco, exactamente hasta un isomorfismo tal, que nuestro plano es isomorfo a  $P(L)$ .

El teorema de Pappus puede fallar incluso en los planos de Desargues. Al denominar una afirmación correspondiente axioma de Pappus, podemos formular el siguiente teorema que también se da sin demostración.

**Teorema 2.** Si en un plano proyectivo clásico se cumple el axioma de Pappus, el plano es de Desargues. El plano clásico de Desargues satisface el axioma de Pappus, cuando y sólo cuando el cuerpo asociado con el plano es conmutativo, es decir, el plano citado es isomorfo a  $P(L)$ , donde  $L$  es un espacio lineal tridimensional sobre el campo.

En todo espacio proyectivo clásico de dimensión superior a dos queda válido el teorema de Desargues. El teorema de Desargues permite la coordinatización de un espacio proyectivo clásico con ayuda de cierto cuerpo asociativo  $K$ . De este modo, el estudio de los espacios proyectivos clásicos, cuya dimensión es superior a dos, se reduce a un problema algebraico, a saber, a la teoría de los cuerpos asociativos. En los planos proyectivos el teorema de Desargues puede no tener lugar y la reducción al álgebra mencionada no se consigue en el caso general. Con este motivo el estudio de los planos proyectivos clásicos es de interés especial y la teoría de ellos se desarrolla exitosamente desde el principio de nuestro siglo.

**Planos proyectivos finitos.** Es fácil comprobar que la definición de plano proyectivo clásico propuesta más arriba es equivalente a la siguiente.

Se denomina plano proyectivo a un conjunto de puntos y rectas, entre los cuales queda establecida una relación de incidencia que obedece a los siguientes requisitos.

1. Dos puntos distintos son incidentes, con una y sólo una recta.
2. Dos rectas distintas son incidentes al menos con un punto.
3. Existen cuatro puntos en una posición general, es decir, tales que cualesquiera tres de ellos no son incidentes con una recta.

Efectivamente, para convencerse de esta afirmación, basta demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 3.** Cada recta contiene no menos de tres puntos.

*Demostración.* Del axioma 3 se deduce que existen cuatro puntos  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , de los cuales ninguna combinación de tres se dispone en una misma recta. A estos puntos les corresponden seis rectas distintas que los unen de dos en dos a saber,  $l_1: a_1a_2b_1$ ;  $l_2: a_1a_3b_2$ ;  $l_3: a_1a_4b_3$ ;  $l_4: a_2a_3b_3$ ;  $l_5: a_2a_4b_2$ ;  $l_6: a_3a_4b_1$ . Aquí,  $b_1, b_2$  y  $b_3$  son puntos de intersección de estas rectas. Partiendo de que todas las seis rectas son distintas se obtiene con facilidad que todos los puntos  $b_1, b_2, b_3$  son distintos y todos ellos se diferencian de los puntos  $a_i$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$ . Cada una de las rectas  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) contiene por lo menos tres puntos. Si una recta arbitraria  $l$  no

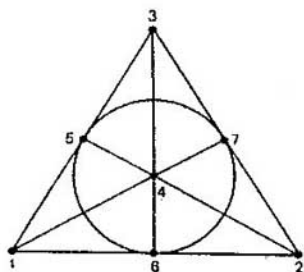


Fig. 5.4.

contiene  $a_1$ , se interseca con las rectas  $l_1, l_2, l_3$  en tres puntos diferentes. Si  $l$  no contiene  $a_2$ , corta las rectas  $l_1, l_4, l_5$  en tres puntos distintos. En cambio, si la recta  $l$  contiene tanto  $a_1$ , como  $a_2$ , entonces  $l = l_1$ , mas la recta  $l_1$  contiene en todo caso tres puntos diferentes  $a_1, a_2$  y  $b_1$ . El teorema queda demostrado.

Observemos que del axioma 1 se desprende que dos rectas diferentes son incidentes no más que con un punto. En la fig. 5.4 se expone un plano proyectivo finito que contiene siete puntos y el mismo número de rectas, con la particularidad de que además de los lados y las mediatrices del triángulo equilátero tenemos que considerar como "recta" la circunferencia inscrita. Este plano proyectivo concreto se denomina, a menudo, configuración de Fano. Otro ejemplo de plano proyectivo ya ha sido examinado, precisamente el  $P(L)$ , cuando  $L$  es un espacio lineal sobre el campo de dimensión 3.

El axioma 3 en la definición de plano proyectivo sirve, principalmente, para desechar los planos "degenerados" tales, por ejemplo, como un plano vacío, una serie rectilínea de puntos (en particular, una recta), un haz de rectas (en particular, un punto), una serie rectangular de puntos por uno de los cuales están trazadas varias rectas y un haz de rectas, cortado por una recta.

Introduzcamos unas definiciones más. Un subconjunto  $\pi'$  de puntos y de rectas del plano proyectivo  $\pi$  se llama *subplano*, si, junto con cada dos puntos (rectas),  $\pi'$  contiene una recta (un punto) incidente con ellos. Dos planos se denominan *isomorfos*, si entre sus puntos y sus rectas puede establecerse una correspondencia biunívoca que conserva la incidencia. Específico para los planos proyectivos resulta ser el concepto de dualidad. Dos planos se llaman *duales*, si entre los puntos (rectas) de un plano y las rectas (puntos) del otro puede establecerse una correspondencia biunívoca que conserva la incidencia. Un plano dual al plano dado puede obtenerse al declarar "puntos" las rectas del plano dado, y "rectas", los puntos de él, conservando las incidencias existentes. No es difícil convencerse de que un plano isomorfo a un plano que es dual del plano  $\pi$ ,

será dual con relación a  $\pi$ . Un plano, dual respecto del dual, es isomorfo al plano de partida. La aplicación isomorfa de un plano sobre sí mismo lleva el nombre de *colineación*. La aplicación unívoca (no forzosamente biunívoca) de los puntos y de las rectas del plano  $\pi$  sobre los puntos y las rectas del plano  $\pi'$  con la conservación de la incidencia recibe el nombre de homomorfismo.

**Teorema 4.** Sea  $n \geq 2$  un número entero arbitrario. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades del plano proyectivo:

- a) cierta recta contiene exactamente  $n + 1$  puntos;
- b) cierto punto pertenece exactamente a  $n + 1$  rectas;
- c) cada recta contiene exactamente  $n + 1$  puntos;
- d) cada punto se dispone exactamente en  $n + 1$  rectas;
- e) en el plano  $\pi$  hay exactamente  $n^2 + n + 1$  puntos;
- f) en el plano  $\pi$  hay exactamente  $n^2 + n + 1$  rectas.

*Demostración.* Sean  $a_1, a_2, a_3, a_4$  cuatro puntos, de los cuales ninguna combinación de tres se dispone en una misma recta. A estos puntos les corresponden seis diferentes rectas que los unen dos a dos (véase la demostración del teorema 3). Supongamos ahora que se cumple la propiedad a), es decir, en  $\pi$  existe una recta  $l$  que contiene exactamente  $n + 1$  puntos, digamos, para concretar,  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ . Si  $b$  es un punto que no está dispuesto en  $l$ , entonces las rectas  $bc_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$ , son distintas, pues, si  $\overline{bc_i} = \overline{bc_j}$  para ciertos  $i \neq j$ , entonces  $b$  está situado en  $l$ , lo que contradice la hipótesis. Luego, cada recta, que pasa por  $b$ , corta  $l$ , y, por consiguiente, ha de ser una de las  $n + 1$  rectas  $\overline{bc_i}, i = 1, 2, \dots, n + 1$ . Por lo menos dos puntos de los cuatro  $a_1, a_2, a_3, a_4$  no se disponen en la recta  $l$ , y, por eso, tal punto  $b$  existe. Sea, ahora,  $b$  un punto que yace exactamente en  $n + 1$  rectas:  $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$ . Si  $l^*$  es una recta que no pasa por  $b$ , entonces  $l^*$  corta  $m_1, \dots, m_{n+1}$  en los puntos  $d_1, \dots, d_{n+1}$ , que son todos diferentes, por cuanto  $b$  es el único punto que yace más que en una de las rectas  $m_1, \dots, m_{n+1}$ . Si en  $l^*$  existiera un punto más  $d_{n+2}$ , entonces existiría una recta  $\overline{bd_{n+2}}$  que no coincide con ninguna recta  $m_j, j = 1, 2, \dots, n + 1$ , puesto que de lo contrario la recta  $\overline{bd_{n+2}}$  contendría cierto punto  $d_j, j \neq n + 2$ , y, entonces,  $\overline{bd_{n+2}} = \overline{bd_{n+2}d_j} = \overline{d_{n+2}d_j} = l^*$ , lo que contradice la suposición de que  $b$  no está situado en la recta  $l^*$ .

Nuestra recta inicial  $l$  contenía exactamente  $n + 1$  puntos; por consiguiente, cada punto que no yace en  $l$ , está situado exactamente en  $n + 1$  rectas; a los puntos de esta índole se relacionan por lo menos dos puntos de cuatro:  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , por ejemplo,  $a_1$  y  $a_2$ . Por eso, cada recta que no pasa por  $a_1$  ó  $a_2$  contiene exactamente  $n + 1$  puntos, es decir, cada recta, salvo, quizás, la recta  $l_1: a_1a_2b_1$  contiene exactamente  $n + 1$  puntos. Entonces,  $l_2: a_1a_3b_2$  contiene exactamente  $n + 1$  puntos, y el punto  $b_3$  que no yace en  $l_2$ , está situado exactamente en  $n + 1$  rectas; por consiguiente,

$l_1$ , que no contiene  $b_3$ , también debe contener  $n + 1$  puntos. Así pues, la propiedad a) lleva consigo la propiedad c).

Pero, para cualquier punto  $b$  puede encontrarse una recta que no pasa por este punto, y por esta razón existen (igual que anteriormente) exactamente  $n + 1$  rectas que pasan por  $b$ , con lo que quedan demostradas las propiedades b) y d).

Demostremos ahora la propiedad e), partiendo de a). Sea  $b_0$  un cierto punto del plano  $\pi$ , y supongamos que  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$  representan  $n + 1$  rectas que pasan por  $b_0$ . Estas rectas contienen todos los puntos del plano  $\pi$ , con la particularidad de que cada una de ellas contiene otros  $b_0$  y  $n$  puntos. El punto  $b_0$  es el único, perteneciente a cualesquiera dos de las rectas  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ . Por consiguiente, el plano  $\pi$  contiene  $1 + (n + 1)n = n^2 + n + 1$  puntos. Confirmemos ahora la propiedad f). Sea  $l_0$  una recta del plano  $\pi$ , y supongamos que  $b_1, \dots, b_{n+1}$  son  $n + 1$  puntos de la recta  $l_0$ . Cada uno de estos puntos yace en  $l_0$  y en otras  $n$  rectas. De este modo, obtenemos todas las rectas del plano  $\pi$ ; en total tenemos, por consiguiente,  $1 + (n + 1)n = n^2 + n + 1$  puntos. Así pues, de la propiedad a) se deducen todas las demás propiedades mencionadas en el teorema.

En virtud de la dualidad, de b) también se deducen todas las propiedades restantes. Es evidente que de c) se deduce a), y de d) se deduce b). Si es cierta la propiedad e) y cierta recta consta de  $m + 1$  puntos, donde  $m$  es un número natural, entonces el plano  $\pi$  se compone de  $m^2 + m + 1 = n^2 + n + 1$  puntos, de donde  $m = n$ , es decir, de e) se desprende a). Análogamente, de f) se deduce la propiedad b). El teorema está demostrado.

Convengamos en llamar *orden* de un plano proyectivo finito al número  $n$ , si cada recta de este plano contiene  $n + 1$  puntos. Observemos que el plano es de orden  $n$ , si posee cualquiera de las seis propiedades citadas en el teorema 4. El orden mínimo de los planos proyectivos finitos es igual a 2. El plano finito "más pequeño" es la configuración de Fano, cada recta de la cual contiene exactamente 3 puntos. La configuración se expone en la fig. 5.4. En total dicho plano contiene 7 ( $= 2^2 + 2 + 1$ ) puntos y el mismo número de rectas. Las rectas en este plano son:  $l_1$ : 1, 2, 6;  $l_2$ : 1, 3, 5;  $l_3$ : 2, 3, 7;  $l_4$ : 1, 4, 7;  $l_5$ : 3, 4, 6;  $l_6$ : 2, 4, 5;  $l_7$ : 5, 6, 7.

Ya en este ejemplo más sencillo se revelan las posibilidades de interpretar los planos proyectivos finitos. A saber, un plano proyectivo finito de orden 2 resulta ser un sistema de ternas de Steiner de orden 7. Hemos de notar que este sistema es un bloque-esquema con los parámetros  $v = b = 7$ ,  $k = r = 3$ ,  $\lambda = 1$ . En el caso general los planos de orden  $n$  representan bloque-esquemas, cuyos parámetros tienen la forma:  $v = b = n^2 + n + 1$ ,  $k = r = n + 1$ ,  $\lambda = 1$ , es decir, bloque-esquemas incompletos equilibrados simétricos. Viceversa, los bloque-esquemas con tales parámetros son planos

proyektivos simétricos finitos, puesto que, evidentemente, se cumplen todos los axiomas. Establezcamos una conexión útil más entre los planos proyectivos finitos y las familias completas de cuadrados latinos ortogonales.

**Teorema 5.** Sea  $n \geq 3$  un número entero arbitrario. Un plano proyectivo de orden  $n$  existe, cuando y sólo cuando puede construirse una familia completa de  $n - 1$  cuadrados latinos ortogonales de orden  $n$ .

*Demostración.* Sea dado un plano proyectivo finito  $\pi$  de orden  $n$ . Veamos en él una recta  $l$ . En esta recta se tienen, como sabemos,  $n + 1$  puntos:  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ . Supongamos que  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son los demás  $n^2$  puntos del plano  $\pi$  que no están situados en  $l$ . Cada punto  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n + 1$ ) yace en  $n$  rectas, sin tener en cuenta la recta  $l$ . Numeremos arbitrariamente con números naturales de 1 hasta  $n$  todas las  $n$  rectas que pasan por el punto  $a_j$ . Procedamos de este modo para todo  $j = 1, 2, \dots, n + 1$ . Supongamos que la recta  $b_i a_j$  está numerada con un número natural  $a_{ij}$ . Entonces,  $A = [a_{ij}]$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n^2$ ;  $j = 1, 2, \dots, n + 1$ , es una  $n^2 \times (n + 1)$ -tabla de elementos  $1, 2, \dots, n$ .

Las filas de cualquier  $(n^2 \times 2)$ -subtabla elegida de  $A$  representan  $n^2$  pares de los elementos  $1, 2, \dots, n$ . Si suponemos que  $a_{ij} = a_{i'j}$  y  $a_{ik} = a_{i'k}$ , donde  $i \neq i'$ ;  $j \neq k$ , entonces  $b_i a_j = b_{i'} a_j$ , y  $b_i a_k = b_{i'} a_k$ . Mas, en este caso la recta  $b_i b_{i'}$  contiene tanto el punto  $a_j$ , como el  $a_k$ , es decir, la recta  $b_i b_{i'}$  coincide con la recta  $l$ , lo que contradice nuestra suposición. Esto quiere decir que la matriz  $A = [a_{ij}]$  es una  $n^2 \times (n + 1)$ -tabla ortogonal de fuerza 2, la cual, según lo demostrado en el capítulo 4, es equivalente al conjunto completo de  $n - 1$  cuadrados latinos ortogonales de orden  $n$ .

Demostremos la afirmación inversa. Sea dado un conjunto completo de  $n - 1$  cuadrados latinos ortogonales de orden  $n$ . Pasemos de éste, como lo hicimos en el cap. 4, a una tabla

$$A = [a_{ij}]; \quad i = 1, 2, \dots, n^2; \quad j = 1, 2, \dots, n + 1.$$

A cada una de  $n^2$  filas de la tabla  $A$  pongamos en correspondencia los puntos  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , y a las columnas, los puntos  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ . Definamos la recta  $l_i$  como compuesta por los puntos  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ . Por todo punto  $a_j$  tracemos  $n$  rectas  $l_{ij}$  que contienen aquellos puntos  $b_i$ , donde en la  $j$ -ésima columna figura el número  $i$ . Se obtiene un plano proyectivo finito de orden  $n$ , en el cual se tienen  $n^2 + n + 1$  rectas y el mismo número de puntos, con la particularidad de que cada recta contiene exactamente  $n + 1$  puntos y cada punto yace en  $n + 1$  rectas. Efectivamente, sean  $l_{ij}$  y  $l_{i'j}$  dos rectas, y, además  $i \neq i'$ . Estas rectas son incidentes con uno y sólo con un punto  $a_j$ . Las rectas  $l_{ij}$  y  $l$  también son incidentes con uno y sólo con un punto. Esto demuestra el requisito 3 en la definición de plano proyectivo. Los cuatro puntos:  $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$  satisfacen el requisito 3 de la definición de plano proyectivo, lo que quiere decir que

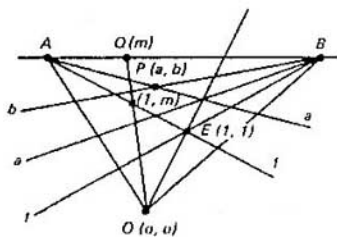


Fig. 5.5.

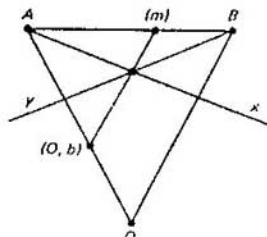


Fig. 5.6.

el plano construido  $\pi$  es realmente un plano proyectivo de orden  $n$ . El teorema queda completamente demostrado.

**Introducción de las coordenadas.** Elijamos en un plano proyectivo  $\pi$  cuatro puntos  $A, B, O, E$  en la posición general (véase fig. 5.5). Llamemos haz  $A$  a un conjunto de rectas que pasan por el punto  $a$ . Pongamos a cada recta del haz  $A$  en correspondencia aquella recta del haz  $B$  con la que ella se encuentra en la recta  $OE$ . Atribuyamos a cada una de las rectas del haz  $A$  (a excepción de  $AB$ ) un símbolo especial  $a$  y asignemos el mismo símbolo a la recta correspondiente del haz  $B$ . Agreguemos a la recta  $AO$  símbolo  $0$  y a la recta  $AE$ , el símbolo  $1$ . Las rectas  $BO$  y  $BE$  recibirán los mismos símbolos. De este modo se define cierto conjunto de símbolos  $M = \{0, 1, \{a\}\}$ .

Supongamos que el punto  $P$  no pertenece a la recta  $AB$  (fig. 5.5). Por dicho punto pasa una recta de cada haz  $A$  y  $B$ , a saber, las rectas  $AP$  y  $BP$ . Supongamos que a la recta  $AP$  se le asigna el símbolo  $a$ , y a  $BP$ , el símbolo  $b$ . Entonces, al punto  $P$  le ponemos en correspondencia un par ordenado de símbolos  $(a, b)$  de  $M$ , que se denominarán coordenadas de este punto. Es fácil ver que la correspondencia entre los puntos que no están situados en  $AB$  y los pares  $(a, b)$  será biunívoca. Además, los puntos dispuestos en  $OE$  tendrán iguales ambas coordenadas. Asignemos ahora las coordenadas a los puntos de la recta  $AB$  distintos de  $A$ . Con este fin unamos el punto  $Q$  (véase fig. 5.5) con  $O$  y veamos donde la recta  $QO$  se cortará con  $AE$ . La segunda coordenada del punto de intersección se tomará por la coordenada del punto  $Q$ .

Observemos que mediante la misma construcción pueden obtenerse coordenadas cartesianas en un plano real habitual. El punto  $A$  debe considerarse como punto impropio del eje  $y$ , el punto  $B$ , como punto impropio del eje  $x$ ,  $O$  se toma por origen de coordenadas y  $E$ , como el punto  $(1, 1)$ .

Definamos sobre el conjunto  $M$ , obtenido como resultado de la coordenatización, una operación ternaria, es decir, a cada terna ordenada de elementos  $x, m, b$  de  $M$  le ponemos en correspondencia un cierto elemento

$$y = x \cdot m \circ b$$

dispuesto en  $M$ . Este elemento  $y$  se define a base de los elementos  $x, m, b$ , como segunda coordenada del punto de intersección de la recta  $x$  del haz  $A$  con la recta  $(m), (0, b)$  (fig. 5.6). Es evidente que por medio de este procedimiento  $y$  se define de un modo unívoco.

**Teorema 6.** Cualquier forma de prefijar cuatro puntos  $A, B, O, E$  en una posición general determina una operación ternaria con las siguientes propiedades:

1.  $0 \cdot m \circ c = a \cdot 0 \circ c = 0$ .
2.  $1 \cdot m \circ 0 = m \cdot 1 \circ 0 = m$ .
3.  $a \cdot m \circ z = C$  resoluble unívocamente respecto de  $z$ .
4.  $x \cdot m_1 \circ b_1 = x \cdot m_2 \circ b_2$  resoluble unívocamente respecto de  $x$ .
5. El sistema

$$a_1 = m \circ b - c_1; a_2 \cdot m \circ b = c_2; a_1 = a_2$$

define unívocamente un par  $(m, b)$ .

*Demostración.* Al elegir cuatro puntos  $A, B, O, E$ , de los cuales ninguna combinación de tres yace en una recta del plano  $\pi$ , formamos un anillo ternario con la operación  $x \cdot m \circ b$ , al igual que lo hicimos más arriba. Las propiedades 1 y 2 se deducen inmediatamente de la definición. La propiedad 3 significa que una recta que liga los puntos  $(m)$  y  $(a, c)$  corta  $OB$  en un punto bien determinado  $(0, z)$ . El significado de la exigencia 4 consiste en que dos rectas:  $y = x \cdot m_1 \circ b_1$  e  $y = x \cdot m_2 \circ b_2$  con diferentes direcciones  $m_1$  y  $m_2$  se intersecan en el único punto finito. La exigencia 5 dice que si  $(a_1, c_1)$  y  $(a_2, c_2)$  son dos puntos finitos para  $a_1 \neq a_2$ , entonces existe una recta única  $y = x \cdot m \circ b$ , que pasa por estos dos puntos.

El conjunto  $M$  con la operación ternaria que posee las propiedades 1... 5 del teorema 6 lleva el nombre de *terna*. Si una terna dada está construida sobre el plano  $\pi$  según la regla descrita anteriormente, se llamará terna del plano  $\pi$ .

Aduzcamos el resultado siguiente sin demostrarlo.

**Teorema 7.** Dada una terna  $M$ , puede determinarse con su ayuda un plano proyectivo con los puntos  $(a, c), (m), A$ , y con las rectas  $y = x \cdot m \circ b, x = a, l_\infty$ , donde  $a, b, c, m$  representan toda clase de elementos de  $M$ , mientras que  $A$  y  $l_\infty$  son ciertos símbolos auxiliares; la incidencia se define del modo siguiente:  $(a, c)$  es incidente con  $y = x \cdot m \circ b$ , cuando y sólo cuando  $c = a \cdot m \circ b$ ;  $(a, c)$  es incidente con  $x = a$  para todo  $c$ ;  $(m)$  es incidente con  $y = x \cdot m \circ b$  para todo  $b$ ;  $(m)$  es incidente con  $l_\infty$ , cualquiera que sea  $m$ ;  $A$  es incidente con  $x = a$  para cualesquiera  $a$ , y, además, con  $l_\infty$ .

Introduzcamos, para el plano dado  $\pi$ , las operaciones naturales: adición y multiplicación, que se definen partiendo de una de las ternas de este plano, según las reglas siguientes:

$$\begin{aligned} a + b &= a \cdot 1 \circ b; \\ ab &= a \cdot b \circ 0. \end{aligned}$$



El conjunto  $M$  con la adición y multiplicación definidas del modo citado recibe el nombre de *cuerpo natural* del plano  $\pi$ .

Ha de notarse que un cuerpo natural no define, hablando en general, la terna que lo engendra, y el teorema, análogo al teorema 7, no tiene lugar en este caso.

Así pues, los planos proyectivos finitos admiten diferentes interpretaciones: mediante ternas, bloque-esquemas y familias completas de cuadrados latinos ortogonales. Sin embargo, la teoría de los planos finitos todavía está lejos de ser elaborada. Ni siquiera existe la respuesta completa a la pregunta sobre el volumen de los objetos combinatorios de esta clase, como también sobre las condiciones, bajo las cuales los planos finitos pueden existir y no existir.

Se conoce que un plano proyectivo finito existe, si su orden  $n$  tiene la forma  $p^\alpha$ , donde  $p$  es un número primo, y  $\alpha$ , un número natural. En efecto, se ha demostrado (véase cap. 4) que si  $n = p^\alpha$ ,  $n \geq 3$ , entonces existe una familia completa de  $n - 1$  cuadrados latinos ortogonales. Mientras tanto, la existencia de tal conjunto es equivalente a la existencia del plano proyectivo finito que se busca.

De los demás resultados señalaremos los siguientes: a) el plano finito no existe, si  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  y si la parte de  $n$ , libre del cuadrado, tiene por lo menos un factor  $p \equiv 3 \pmod{4}$ ; b) la condición necesaria de existencia de un plano proyectivo finito cuyo orden tiene la forma  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  consiste en la existencia de los números enteros  $x$  y  $y$  tales, que  $n = x^2 + y^2$  (teorema de Bruck—Ryser). No damos aquí las demostraciones por ser éstas demasiado complejas. De los resultados citados se desprende, en particular, que los planos para  $n = 6, 12, 14$  están ausentes. La cuestión referente a  $n = 10, 18$  y  $20$ , queda por ahora abierta. Para que el lector perciba lo difícil del problema, indiquemos, como ejemplo, que la construcción de un plano de orden 10 requiere la construcción de una familia de 9 cuadrados latinos ortogonales dos a dos del mismo orden.

Una dirección importante en el desarrollo de la teoría de los planos proyectivos finitos la representan el cálculo del número de planos de un orden dado y el estudio de sus tipos diferentes. Para el año 1956 quedó demostrado que cuando  $n < 9$  ( $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ ) existe el único plano proyectivo de orden  $n$ , a saber, el de Desargues. Tres planos construidos por Veblen y Wedderburn en 1907, junto con el plano de Desargues construido un año antes por Veblen y Bassi son los únicos que hoy día se conocen para el orden 9. No se han obtenido planos nuevos, como tampoco se ha demostrado que ellos no existen en general. En esta dirección se emprenden varias investigaciones. Parece que estamos a punto de terminar la resolución de la cuestión sobre la existencia de los planos proyectivos de orden 10.

### 5.3. SOBRE LOS GRAFOS

En el lenguaje de la teoría de los grafos se describen con éxito muchos tipos de los problemas combinatorios. Las representaciones gráficas son en este caso no simplemente ilustraciones, sino que también permiten obtener nuevos resultados. En este párrafo daremos una información indispensable de la teoría de los grafos que se emplea en la obra dada.

Se denomina *grafo orientado* una terna  $G = (X, A, \varphi)$  compuesta de un conjunto no vacío  $X$ , cuyos elementos llevan el nombre de *vértices* de un conjunto  $A$  de *arcos* (llamados también), a veces, flechas y de una función  $\varphi: A \rightarrow X \times X$ , la cual a todo arco  $a \in A$  se le hace corresponder un par ordenado  $(p, q)$  de vértices denominados  *finales* de dicho arco. Un arco, cuyos finales  $(p, p)$  se encuentran en un mismo vértice, lleva el nombre de *lazo*. Un grafo privado de tales lazos se llama *grafo sin lazo*.

En la fig. 5.7. están expuestos cuatro grafos orientados; cada uno con cuatro vértices. Todos estos grafos no tienen lazos. Además, son *simples*: lo último significa por definición que cualquier par de vértices  $p, q$  se une mediante un arco a lo sumo. En los grafos orientados *simples* el único arco (si existe) con las finales,  $p, q$  se designará mediante  $pq$ .

Describamos dos familias importantes de los grafos orientados simples, cada uno de los cuales depende del parámetro  $n$ . Un camino *simple* de longitud  $n$  consta de  $n + 1$  vértices:  $x_1, \dots, x_{n+1}$  y  $n$  arcos que unen los vértices vecinos:  $x_k x_{k+1}$ . El *contorno simple* de longitud  $n$  consta de  $n$  diferentes vértices:  $x_1, \dots, x_n$  y  $n$  arcos del tipo  $x_k x_{k+1}$  para  $k < n$ , y, además,  $x_n x_1$  (en particular, un contorno simple de longitud 1 es un lazo con vértice  $x_1$ ). Todos los caminos de longitud  $n$  son isomorfos, como lo son también todos los contornos simples de longitud  $n$  (véase la definición más abajo). En la fig. 5.7, *a* está expuesto un trayecto simple de longitud 3, y en la fig. 5.7, *b*, un ciclo simple de longitud 4.

Se denomina *isomorfismo* de los grafos orientados  $G = (X, A, \varphi)$  y  $G^* = (X^*, A^*, \varphi^*)$  a un par de biyecciones  $\beta: X \rightarrow X^*$  y  $j: A \rightarrow A^*$  tal que en  $G$  el arco  $a$  va del vértice  $p$  al vértice  $q$ , cuando y sólo cuando en  $G^*$  el arco  $j(a)$  va del vértice  $\beta(p)$  al vértice  $\beta(q)$ . En otras palabras,  $\varphi(a) = (p, q)$  en  $G$  es equivalente a la condición  $\varphi^*(j(a)) = (\beta(p), \beta(q))$  en  $G^*$ . Dos grafos orientados se llaman isomorfos, si entre ellos existe un isomorfismo. Es natural identificar los grafos orientados isomorfos.

Todo grafo orientado  $G = (X, A, \varphi)$  define en el conjunto de sus vértices una relación binaria de *sucesiones*  $\sigma$ . Por definición,  $p\sigma q$  significa que  $\varphi(a) = (p, q)$  para cierto  $a \in A$ . Viceversa, toda relación binaria  $\rho$  en el conjunto  $X$  define un grafo orientado simple  $G(\rho) = (X, A(\rho), \psi)$ , en el que  $A(\rho) = \{(p, q) | p \in X, q \in X, p\sigma q\}$  y  $\psi(pq) = (p, q)$ . De aquí se deduce inmediatamente que la clase de conjuntos con una relación binaria  $(x, \rho)$  se encuentra en una correspondencia biyectiva natural con la clase de grafos orientados simples.

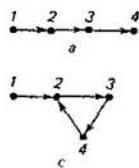


Fig. 5.7.

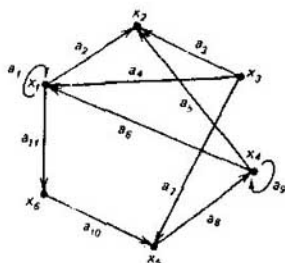
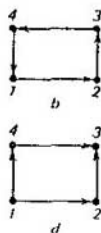


Fig. 5.8.

Se llama *grafo no orientado* (o, simplemente, *grafo*) la terna  $G = (X, E, \Theta)$  compuesta de un conjunto no vacío  $X$  (cuyos elementos llevan el nombre de *vértices*), el conjunto  $E$  de aristas y la función  $\Theta$  que a cada arista  $a \in E$  le pone en correspondencia un par no ordenado de vértices  $(p, q) = (q, p)$  que se denominan extremos de dicha arista. La arista  $(p, q)$  se llama *lazo*.

Los conceptos, introducidos para los grafos orientados, pueden ser extendidos a los grafos no orientados, si consideramos que una arista no orientada  $(p, q)$  corresponde a un par de arcos  $pq$  y  $qp$ .

Una *cadena simple* de longitud  $n$  consta de  $n + 1$  diferentes vértices  $x_1, \dots, x_{n+1}$  y de  $n$  aristas que unen los vértices vecinos. Un *ciclo simple* de longitud  $n$  consta de  $n$  diferentes vértices:  $x_1, \dots, x_n$  y  $n$  aristas del tipo  $(x_k, x_{k+1})$  para  $k < n$ , y, además, de una arista  $(x_n, x_1)$ .

El grafo orientado  $G$  puede también considerarse como un par  $G = (X, \Gamma)$ , formado por el conjunto  $X$  y la aplicación multiforme del conjunto  $X$  en sí mismo (es decir, por la aplicación de  $X$  en el conjunto  $P(X)$  de todos los subconjuntos del conjunto  $X$ ). Para el grafo expuesto en la fig. 5.8 tenemos:  $\Gamma(x_3) = \{x_2, x_5\}$ ;  $\Gamma(x_2) = \emptyset$ . Con  $\Gamma^{-1}(x_k)$  se designará el conjunto de vértices  $x_k$  del grafo, para los cuales en  $G$  existe un arco  $(x_k, x_i)$ . Sea  $X_q = \{x_1, \dots, x_q\}$ . Entonces, por  $\Gamma(X_q)$  se entiende la unión  $\Gamma(x_1) \cup \dots \cup \Gamma(x_q)$ . La aplicación  $\Gamma(\Gamma(x_i))$  se escribe como  $\Gamma^2(x_i)$ . Análogamente, una aplicación "triple"  $\Gamma(\Gamma(\Gamma(x_i)))$  se escribe como  $\Gamma^3(x_i)$ , etc. Por ejemplo, para nuestro grafo orientado tenemos

$$\Gamma^2(x_1) = \Gamma(\Gamma(x_1)) = \Gamma(\{x_1, x_2, x_6\}) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\};$$

$$\Gamma^3(x_1) = \Gamma(\Gamma(\Gamma(x_1))) = \Gamma(\{x_1, x_2, x_5, x_6\}).$$

Un grafo  $(X', A')$  se llama *subgrafo* del grafo  $(X, A)$ , si  $X'$  y  $A'$  están contenidos en  $X$  y  $A$ , respectivamente. Se denomina *subgrafo de esqueleto* (*grafo parcial*)  $G_p$  del grafo  $G = (X, A)$  al grafo  $(X, A_p)$ , para el cual  $A_p \subseteq A$ . De este modo, el subgrafo de esqueleto tiene también el mismo conjunto de vértices que el grafo  $G$ , pero el conjunto de arcos del

subgrafo  $G_p$  es un subconjunto del conjunto de arcos del grafo inicial. Sea un grafo  $G = (X, \Gamma)$ . Se llama *subgrafo generado*  $G_s$  al grafo  $(X_s, \Gamma_s)$ , para el cual  $X_s \subseteq X$  y  $\Gamma_s(x_i) = \Gamma(x_i) \cap X_s$  para cada vértice  $x_i \in X_s$ . Así pues, un subgrafo generado consta de un subconjunto de vértices  $X_s$ , de un conjunto de vértices del grafo inicial y de todos aquellos arcos del grafo  $G$ , cuyas vértices extremales y originales pertenecen al subconjunto  $X_s$ . En la fig. 5.9, *a, b* se exponen un subgrafo generado, un subgrafo de esqueleto y un subgrafo, respectivamente, con la particularidad de que este último no es ni generado ni subgrafo de esqueleto del grafo  $G$ , expresado en la fig. 5.8.

Sea  $G = (X, A)$  un grafo orientado con un conjunto de vértices  $X$  y un conjunto de arcos  $A$ . Si queremos menospreciar el carácter orientado de los arcos del conjunto  $A$ , entonces un grafo no orientado, correspondiente a  $G$ , se denotará con  $\bar{G} = (X, A)$  y se llamará *sosia (doble) no orientado* del grafo  $G$ . Un grafo no orientado  $G$  se denomina *conexo*, si cada par de sus vértices puede ser unido con una cadena. Un grafo finito, que no es conexo, puede partirse en un número finito de subgrafos finitos llamados *componentes*. Un grafo no orientado  $G$  se llama *completo*, si para cada par de sus vértices existe una arista que los une. Un grafo completo sobre  $n$  vértices suele designarse con  $K_n$ . Un grafo no orientado se denomina *bipartido*, si el conjunto de sus vértices puede ser partido en tales dos subconjuntos  $X_1$  y  $X_2$  que cada arista tenga uno de sus extremos en  $X_1$ , y el otro en  $X_2$ ; aquí  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Un grafo bipartido  $G = (X_1 \cup X_2, A)$  se llama *completo*, si para cualesquiera dos vértices  $x_i \in X_1$  y  $x_j \in X_2$  existe una arista  $(x_i, x_j) \in A$ . Si  $|X_1| = n$ , y  $|X_2| = m$ , el grafo completo no orientado  $G = (X_1 \cup X_2, A)$  se denota con  $K_{n,m}$ . Un grafo orientado  $G$  se llama *conexo (bipartido, respectivamente)*, si lo es su sosia no orientada  $\bar{G}$ .

Se llama *grado* del vértice en un grafo no orientado al número de aquellas aristas de cuyo extremo sirve el vértice.

Examinemos un grafo no orientado  $G = (X, A)$  sin lazos. Elijamos una arista  $a = (x, y) \in A$ . Sustituyamos el vértice  $y$  en todas las aristas  $b \in (A \setminus \{a\})$  por el vértice  $x$  y denotemos con  $A'$  el conjunto obtenido de aristas. Diremos que el grafo  $G' = (X \setminus \{y\}, A')$  se ha obtenido del grafo  $G$  como resultado de contraer la arista  $a$  al vértice  $x$ . Un grafo  $G$  se denomina *planario*, si puede ser dibujado en un plano de un modo tal que dos aristas arbitrarias del grafo no se intersequen. En la fig. 5.10 están expuestos el grafo completo  $K_5$  y el grafo completo bipartido  $K_{3,3}$ , los cuales, como se sabe, no son planarios. Estos dos grafos tienen gran importancia en la teoría de los grafos planarios y se conocen como grafos de Kuratovski, por cuanto fue él el primero en establecer que un grafo no orientado  $G$  no es planario, si y sólo si contiene un subgrafo contraído al grafo  $K_5$  ó al  $K_{3,3}$ .

**Matriz de adyacencia.** Sea dado un grafo orientado simple  $G$  con los vértices  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Se llama *matriz de adyacencia* de dicho grafo a

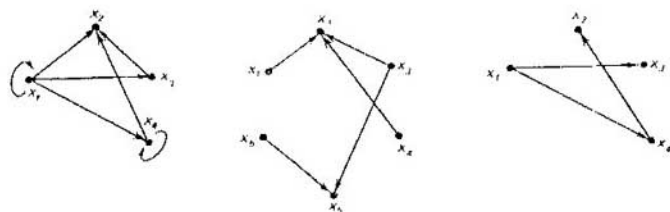


Fig. 5.9.

una matriz cuadrada  $B = [b_{ij}]$  de orden  $n$ , donde

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si en } G \text{ existe el arco } (x_i, x_j); \\ 0, & \text{si en } G \text{ no hay arco } (x_i, x_j). \end{cases}$$

Así pues, la matriz de adyacencia del grafo expuesto en la fig. 5.8. tiene la forma siguiente

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de adyacencia define completamente la estructura del grafo. Por ejemplo, la suma de todos los elementos de la fila  $x_i$  de la matriz  $B$  da el número de arcos que tienen el vértice  $x_i$  como su vértice original, y la suma de elementos de la columna  $x_i$  da el número de arcos en los que  $x_i$  figura como vértice final. El conjunto de columnas que tienen 1 en la fila  $x_i$  es un conjunto  $\Gamma(x_i)$ , y el conjunto de filas que tienen 1 en la columna  $x_i$  coincide con el conjunto  $\Gamma^{-1}(x_i)$ .

Elevemos al cuadrado la matriz de adyacencia. Sea  $b_{jk}^{(2)}$  un elemento de la matriz  $B^2$ , entonces,  $b_{jk}^{(2)} = \sum_{i=1}^n b_{ij}b_{ik}$ . El sumando  $b_{ij}b_{ik}$  es igual a 1, cuando y sólo cuando ambos números  $b_{ij}$  y  $b_{ik}$  son iguales a 1; de lo contrario, es igual a 0. De la igualdad  $b_{ij} = b_{jk}$  se desprende la existencia del

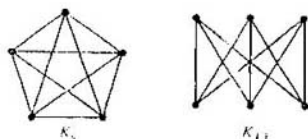


Fig. 5.10

camino de longitud 2 del vértice  $x_i$  al vértice  $x_k$ , pasando por el vértice  $x_j$ . Por consiguiente,  $b_{ik}^{(2)}$  en la matriz  $B^2$  es igual al número de caminos de longitud 2 que van de  $x_i$  a  $x_k$ .

Análogamente, el elemento  $b_{ik}^{(p)}$  de la matriz  $B^p$  es igual al número de caminos (no forzosamente simples) de longitud  $p$  que van de  $x_i$  a  $x_k$ .

La matriz de adyacencia de un grafo no orientado se construye de un modo análogo.

**Matriz de incidencias.** Sea dado un grafo orientado  $G$  con los vértices  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y los arcos  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Se llama matriz de incidencias del grafo  $G$  a una matriz  $A = [a_{ij}]$  de dimensión  $n \times m$ , cuyas filas corresponden a los vértices, y las columnas, a los arcos, y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } x_i \text{ es el origen del arco } a_j; \\ -1, & \text{si el vértice } x_i \text{ es el extremo del arco } a_j; \\ 0, & \text{si el vértice } x_i \text{ no es incidente con el arco } \\ & a_j, \text{ o si el arco } a_j \text{ no es un lazo.} \end{cases}$$

Por ejemplo, para el grafo que se expone en la fig. 58 la matriz de incidencias es de la forma

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right. \end{matrix}$$

Por cuanto cada arco es incidente con dos diferentes vértices, a excepción del caso en que un arco forma un lazo, cada columna contiene o bien un solo elemento igual a 1, y un elemento igual a  $-1$ , o bien todos los elementos iguales a 0.

Si  $G$  es un grafo no orientado, su matriz de incidencias se determina igual que antes, salvo que todos los elementos iguales a  $-1$  se sustituyen por  $+1$ .

**Matriz de ciclos (de contornos).** Sea  $G$  un grafo no orientado. Demos a sus aristas los números  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , y a los ciclos simples, los números  $c_1, c_2, \dots, c_p$ . Se llama matriz de ciclos del grafo  $G$  a una matriz  $C = [c_{ij}]$  de dimensión  $p \times m$ , donde

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el ciclo simple } c_i \text{ del grafo } G \text{ contiene la arista } a_j; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

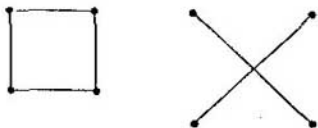


Fig. 5.11.

Así pues, las filas de una matriz de ciclos corresponden a los ciclos simples, y las columnas, a las aristas.

Si  $G$  es un grafo orientado, numeremos sus arcos con  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , y los contornos simples, con  $c_1, c_2, \dots, c_p$ ; la matriz de contornos  $C = [c_{ij}]$  se determina de un modo análogo:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el contorno } c_i \text{ contiene un arco } a_j \text{ y los mismos están igual-} \\ & \text{mente orientados;} \\ -1, & \text{si el contorno } c_i \text{ contiene un arco inverso de } a_j; \\ 0, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

*Observación.* La elección de símbolos iguales para denotar las matrices de los grafos orientado y no orientado se debe a que tanto los grafos orientados, como los no orientados, poseen iguales propiedades en lo que se refiere a la estructura de estas matrices. Por eso, no hay confusión ninguna al introducir tales símbolos. Además, las propiedades de las matrices de los grafos orientados y los métodos de su demostración son los mismos que para las matrices de los grafos no orientados.

*Ejercicios.* Cerciorese de que son válidas las siguientes afirmaciones.

1. En todo grafo no orientado finito el número de vértices de grado impar es par.
2. Sea  $A$  una matriz de incidencias de un grafo no orientado simple sin lazos. Entonces, la matriz de adyacencia  $B$  se obtiene de  $AA^T$  (donde  $A^T$  es una matriz obtenida por transposición de la matriz  $A$ ) por sustitución de todos los elementos en la diagonal por ceros.
3. Un grafo  $G$  es bipartido, cuando y sólo cuando para todo número impar  $n$  todos los elementos diagonales de la matriz  $A^n$  son nulos.
4. Si los grafos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos, los valores propios de las matrices de adyacencia de estos grafos son iguales.

*Observación.* La afirmación recíproca no es válida en el caso general. Por ejemplo, dos grafos expuestos en la fig. 5.11 tienen iguales valores propios ( $\lambda = \pm 2, 0, 0, 0$ ), sin embargo, evidentemente, ellos no son isomorfos.

5. Cualquier menor de la matriz de incidencias del grafo  $G$  es igual a  $+1, -1, \delta$  o  $0$ .
6. El rango de una matriz de incidencias  $A$  de un grafo conexo (tanto orientado, como no orientado)  $G$  con  $n$  vértices es igual a  $n - 1$ .
7. El rango de una matriz de ciclos  $C$  de un grafo conexo  $G$  con  $m$  aristas y  $n$  vértices es igual a  $m - n + 1$ .
8. Una matriz de incidencias  $A$  es ortogonal respecto de la matriz  $C^T$ , transpuesta a la matriz de ciclos  $C$  y obtenida con el mismo orden de numeración de las aristas que en la matriz de incidencias  $A$ , es decir, dicho de otro modo,  $AC^T \equiv 0 \pmod{2}$ .

Se llama *grafo euleriano* a un grafo no orientado que posee la siguiente propiedad: existe un ciclo que pasa exactamente una vez por cada una de las aristas del grafo. El ciclo en la definición de grafo euleriano se denomina *euleriano*.

**Teorema 8.** Un grafo no orientado finito  $G$  es euleriano cuando y sólo cuando es conexo y todos los vértices suyos son de grado par.

*Demostración.* Es evidente que nuestras condiciones son necesarias, puesto que cada vez que el ciclo euleriano pasa por algún vértice, ha de entrar en él por una arista y salir por la otra.

A la inversa, supongamos ahora que  $G$  es conexo y todos los vértices suyos son de orden par. Convengamos en considerar un punto arbitrario  $x$  del grafo  $G$  como origen de la cadena  $P$  y prolonguémosla, cuanto sea posible, todo el tiempo a través de nuevas aristas. Por cuanto en cada vértice el número de aristas es par, el proceso puede terminar sólo en  $x$ . Si  $P$  contiene no todas las aristas del grafo  $G$ , eliminemos de  $G$  una parte de  $P$  compuesta por las aristas de este ciclo.

Los grafos  $P$  y  $G$  tienen vértices de grado par; lo mismo ha de ser válido también para el grafo restante  $\bar{P}$ . Por cuanto el grafo  $G$  es conexo, en  $\bar{P}$  debe encontrarse un vértice  $y$  que sea incidente con las aristas de  $\bar{P}$ . A partir de  $y$  puede construirse una cadena nueva  $P'$  que contenga sólo aristas de  $\bar{P}$ . De nuevo tal cadena quedará terminada sólo cuando vuelva a  $y$ . Pero en este caso de  $P$  y  $P'$  podemos hacer un ciclo nuevo

$$P_1 = P(x, y) \cup P' \cup P(y, x),$$

el cual vuelve a  $x$  y contiene más aristas que  $P$ . Si  $P_1$  no es un ciclo euleriano, la construcción se repite. Finalizado este proceso, el ciclo euleriano será construido.

Se denomina *ciclo hamiltoniano (contorno hamiltoniano)* a un ciclo simple (contorno simple) que pasa por todos los vértices del grafo. Un grafo se llama *hamiltoniano*, si contiene un ciclo hamiltoniano.

En las aplicaciones de los grafos a los juegos los vértices corresponden a posiciones diferentes. Así pues, la existencia del ciclo hamiltoniano es equivalente a la de una sucesión cíclica de jugadas que contiene cada posición una sola vez. De ejemplo sirve el conocido problema del caballo ajedrecístico: ¿se podrá realizar una jugada con el caballo, comenzando con un escaque arbitrario en el tablero de ajedrez, en una sucesión tal que permita pasar por cada uno de los 64 escaques y regresar al escaque de partida. En la fig. 5.12 se muestra una de las soluciones posibles.

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38
42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

Fig. 5.12.

En la fig. 5.13 se aduce el ejemplo de un grafo euleriano que no es



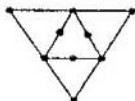


Fig 5.13.

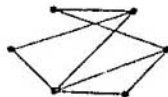


Fig.5.14

hamiltoniano, y en la fig. 5.14, de un grafo hamiltoniano, mas no euleriano.

Pese a la similitud de las definiciones para los ciclos euleriano y hamiltoniano, las teorías correspondientes para estos conceptos tienen poco de común. El criterio de existencia de los ciclos eulerianos es simple (véase el teorema 8); para los ciclos hamiltonianos no se conoce una regla general. Más aún, incluso para los grafos concretos resulta, a veces, difícil decidir si es posible hallar tal ciclo. Algunas condiciones, bajo las cuales en un grafo existe el ciclo hamiltoniano, sin embargo, han sido encontradas, y se dan en ciertas obras referentes a la teoría de los grafos. Para aquellos que desean familiarizarse con estos resultados les recomendamos los libros [24], [25].

Se denomina *árbol* un grafo conexo no orientado sin ciclos. Se denomina *bosque* un grafo no orientado en el que cada componente representa un árbol.

**Teorema 9.** Las siguientes afirmaciones se consideran equivalentes:

- un grafo no orientado  $G$  es el árbol;
- cualesquiera dos vértices en  $G$  están unidos por una cadena única;
- un grafo  $G$  es conexo, mas la supresión de cualquiera de sus aristas lo hace no conexo.
- la adición de cualquier arista nueva al grafo  $G$  conduce a que aparezca exactamente un ciclo.

La demostración de este teorema se omite por ser trivial.

El siguiente resultado sobre los árboles pertenece a los trabajos de Cayley que investigó estos grafos en relación con las fórmulas estructurales químicas.

**Teorema 10.** El número de diferentes árboles que pueden ser construidos sobre  $n$  vértices dados es igual a  $n^{n-2}$ .

*Demostración.* Numeremos todos los vértices de un árbol  $T$  con números naturales de 1 a  $n$ . Designemos con  $b_1$  un vértice pendiente (es decir, un vértice de grado 1) con un número mínimo, y con  $l_1 = (b_1, a_1)$ , la correspondiente arista pendiente. Al suprimir en  $T$  la arista  $l_1$  y el vértice  $b_1$ , obtendremos un nuevo árbol  $T_1$ . Hallemos para  $T_1$  un vértice pendiente con un número mínimo; designémoslo con  $b_2$ , y la arista correspondiente, con  $l_2 = (b_2, a_2)$ . Esta reducción se repite hasta que no quede, tras la eliminación de la arista  $l_{n-2} = (b_{n-2}, a_{n-2})$ , la única arista  $l_{n-1} = (b_{n-1}, a_{n-1})$  que une los dos vértices restantes. Entonces, la siguiente colección entre paréntesis

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$$

llamada *código de Prufer*, se define unívocamente por el árbol  $T$ , y a dos árboles distintos  $T$  y  $T'$  les corresponden, evidentemente, diferentes códigos de Prufer.

Además, los códigos de Prufer definen los árboles  $T$  con ayuda de una construcción inversa. Si está dado el código, entonces se halla el primer vértice  $b_1$  no contenido en él. Esto define la arista  $l_1 = (b_1, a_1)$ . Luego, eliminamos los vértices  $a_1$  del código y  $b_1$ , de la sucesión  $1, 2, \dots, n$ , y continuamos la construcción para los números restantes. El grafo, obtenido como resultado de esta construcción será un árbol, lo que puede ser establecido, por ejemplo, con ayuda de la inducción. Después de eliminar  $a_1$ , el código contendrá  $n - 3$  números. Si éstos corresponden al árbol  $T_1$ , entonces el grafo  $T$ , obtenido de  $T_1$  por adición de la arista  $l_1 = (b_1, a_1)$ , es también un árbol, puesto que el vértice  $b_1$  no pertenece a  $T_1$ . Así pues, se ha establecido que entre los códigos de Prufer y los árboles hay una correspondencia biunívoca. Mas, en el código de Prufer cada elemento puede asumir cualquiera de  $n$  valores posibles. Todos ellos corresponden a diferentes árboles. En total pueden haber  $n^{n-2}$  códigos de Prufer, de lo que precisamente se deduce nuestro teorema.

Si  $G$  es un grafo no orientado con un conjunto de vértices  $X$ ,  $|X| = n$ , entonces, se llamará *árbol de esqueleto* (o, simplemente, esqueleto) del grafo  $G$  a todo subgrafo de esqueleto del grafo  $G$  que sea un árbol. Las aristas del grafo, pertenecientes al esqueleto, llevan el nombre de *ramas* y todas las demás aristas, se denominan *cuerdas*.

Hay situaciones cuando surge la necesidad de confeccionar una lista completa de los esqueletos del grafo  $G$  (por ejemplo, en el caso cuando hay que elegir el "mejor" árbol, mientras que el criterio que permite realizar tal elección es muy complejo, así que la resolución inmediata del problema de optimización resulta ser ejecutable). En otras situaciones, por ejemplo al hallar las funciones de transferencia de un sistema o al calcular los determinantes de ciertas matrices en la teoría macroeconómica, podemos, con ayuda de todos los esqueletos del grafo correspondiente, conseguir la simplificación de los procedimientos de cálculo.

El número de diferentes esqueletos de un grafo marcado conexo no orientado completo sobre  $n$  vértices nos da el teorema 10. Las fórmulas para el número de esqueletos en los grafos más generales pueden encontrarse en el libro [14].

He aquí uno de los resultados.

**Teorema 11.** Sea  $G$  un grafo no orientado sin lazos sobre  $n$  vértices, y sea  $A_0$  su matriz de incidencias con una fila eliminada (es decir, una matriz con  $n - 1$  filas independientes). Supongamos que  $A_0'$  es una matriz transpuesta respecto de la matriz  $A_0$ . Entonces, el determinante del producto  $A_0 A_0'$  es igual al número de diferentes esqueletos del grafo  $G$ , un doble (sosa) no orientado de  $G$ .

La demostración de este teorema se aduce en el libro [78]. Los algorit-

mos que generan todos los árboles de esqueleto del grafo están detalladamente analizados en [24].

Todos los árboles de esqueleto del grafo expuesto en la fig. 5.15 (hay en total 21 árboles) se aducen en la fig. 5.16. La matriz de incidencias del grafo tiene en este caso por expresión.

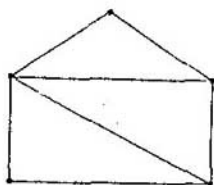


Fig. 5.15.

$$A = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aquí consideramos que cada arista está orientada de su vértice final de índice mínimo al vértice de índice máximo.

Eliminando, por ejemplo, la fila  $x_2$ , obtenemos la matriz  $A_0$ . El producto de las matrices  $A_0 A_0^T$  tiene en este caso la forma

$$A_0 A_0^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El determinante del producto es igual a 21. Por consiguiente, en la fig. 5.16 se da la lista completa de los esqueletos del grafo  $G$ , expuesto en la fig. 5.15.

Muchos esqueletos obtenidos son, evidentemente, isomorfos y surge la cuestión sobre el número que hay entre ellos no isomorfos. Este es un problema más complejo, sin embargo es muy importante para muchas aplica-

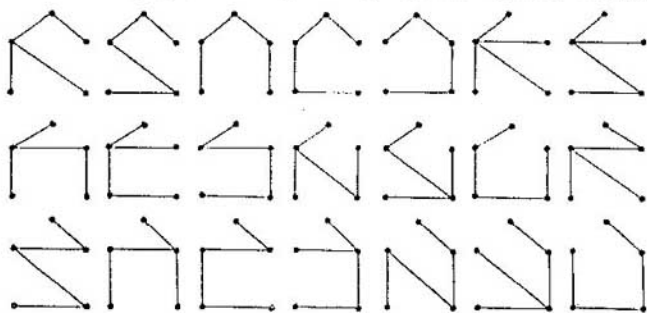


Fig. 5.16.

ciones. Es por eso que existe una literatura espaciosa también para las cuestiones análogas relacionadas con la enumeración de todos los grafos de tipos parciales. La mayoría de estas obras se apoya en la teoría de Redfield—Polya (véase § 25).

Se llama *árbol orientado* con raíz  $x_0$  a un grafo orientado conexo, en el que del vértice  $x_0$  a cada otro vértice conduce un camino y, además, único.

Sea  $G$  un grafo no orientado con  $n$  vértices,  $m$  aristas y  $p$  componentes conexas. El número  $\varrho(G) = n - p$  se denomina *cociclomático*. El número  $\nu(G) = m - \varrho(G) = m - n + p$  se denomina *ciclomático*.

En la teoría de los circuitos eléctricos los números  $\varrho(G)$  y  $\nu(G)$  tienen un significado físico directo. Así, por ejemplo, el número ciclomático es igual al número máximo de contornos independientes en el grafo del circuito eléctrico, es decir, al número máximo de corrientes circulares independientes que pueden fluir en el circuito. El número cociclomático es igual al número máximo de diferencias de potencial independientes entre los nudos del circuito eléctrico.

Ejercicios 9. Dense ejemplos de árboles orientados con raíces.

10. Demuéstrese que el número ciclomático de un árbol es igual a 0.

11. Demuéstrese que cada árbol es un grafo bipartido.

Sea  $T$  un esqueleto del grafo  $G$ . En el caso general,  $\nu(G)$  ciclos que se obtienen por adición de cualquier cuerda de  $G$  a las ramas de  $T$ , llevan el nombre de *ciclos fundamentales*.

Cabe notar que aunque el número de ciclos fundamentales es igual a  $\nu(G)$ , estos propios ciclos están definidos multiformemente y dependen del esqueleto  $T$  elegido originalmente. Dicho de otro modo, el ciclo fundamental (respecto del esqueleto  $T$ ) es un ciclo obtenido por adición de una cuerda al esqueleto  $T$ . Por ejemplo, para un grafo  $G$  y para su esqueleto  $T$ , representados en la fig. 5.17, los ciclos fundamentales serán:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \{a_1, a_{10}\}; \Phi_2 = \{a_2, a_{12}, a_{10}\}; \Phi_3 = \{a_3, a_{11}, a_{13}, a_{12}, a_{10}\}; \\ \Phi_4 &= \{a_4, a_{14}, a_{11}\}; \Phi_5 = \{a_5, a_{11}\}; \Phi_6 = \{a_6, a_{15}, a_{13}, a_{14}\}; \\ \Phi_7 &= \{a_7, a_{13}, a_{14}\}; \Phi_8 = \{a_8, a_{12}, a_{15}\}; \Phi_9 = \{a_9, a_{12}\}. \end{aligned}$$

Si una familia de todos los ciclos fundamentales la designamos con  $\Phi$  (en nuestro ejemplo  $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_9\}$ ), entonces cualquier otro ciclo del grafo que no pertenece a  $\Phi$  puede ser expresado en forma de una combinación lineal de ciclos pertenecientes a  $\Phi$ , siempre que convenimos en lo siguiente.

Supongamos que cada ciclo fundamental  $\Phi_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, \nu(G)$ , está representado por un vector  $m$ -dimensional en el que la  $j$ -ésima componente es igual a 1 ó a 0, lo que depende de si pertenece o no la  $j$ -ésima arista al ciclo dado. Entonces, todo ciclo  $C$  del grafo  $G$  puede representarse como suma respecto del módulo 2 de los ciclos fundamentales. Así por ejemplo, el ciclo  $C_1 = \{a_3, a_{11}, a_{14}, a_6, a_8, a_1\}$  de nuestro grafo puede ser representado en la forma

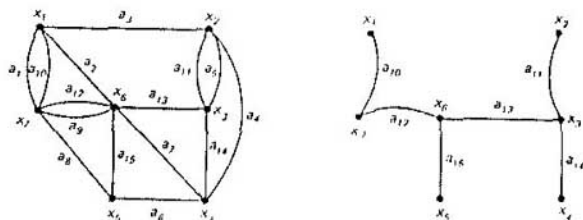


Fig. 5.17.

$$\begin{aligned}
 C &= \Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_6 + \Phi_8 \pmod{2} = \\
 &+ \left\{ \begin{array}{l} 10000000100000 \\ 00100000011100 \\ 000001000000111 \\ 000000010001001 \end{array} \right\} \pmod{2}. \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 101001010010010 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Cabe notar que la inversión de la afirmación mencionada no es válida, a saber, cierta suma respecto del módulo 2 de los ciclos fundamentales no da obligatoriamente el único ciclo, pero puede representar dos y más ciclos. Por ejemplo, la suma  $\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_6 + \Phi_7 \pmod{2}$  corresponde a dos ciclos simples  $\{a_2, a_3, a_{11}, a_{13}\}$  y  $\{a_6, a_7, a_{15}\}$ . Así pues, para generar todos los ciclos simples del grafo  $G$  no es menester tomar todas las  $2^{r(G)} - 1$  combinaciones de los ciclos fundamentales y sumarias respecto del módulo 2; algunas de estas sumas no serán, de hecho, ciclos. Más aún, si la suma dada no genera un ciclo, no se pueden rechazar otras sumas que la contienen, puesto que, sumando respecto del módulo 2 con otra suma, podemos obtener un ciclo simple.

Subrayemos también que en el grafo  $G$  podemos encontrar un conjunto de  $\nu(G)$  ciclos simples independientes, que no pueden obtenerse por adición de las aristas al árbol, como lo hacíamos antes. De tal conjunto no se debe decir que es fundamental. En la fig. 5.18 se muestra el conjunto de  $\nu(G) = 4$  ciclos simples independientes del grafo  $G$ , que no puede obtenerse por adición de las aristas a ningún esqueleto del grafo  $G$  y el cual, por esta razón, no es un conjunto fundamental.

Se denomina *corte* del grafo un conjunto mínimo de aristas cuya eliminación aumenta el número de componentes del grafo.

El *corte fundamental* (respecto del esqueleto  $T$ ) es aquél que contiene exactamente una arista del esqueleto  $T$ . De este modo, en un grafo conexo pueden distinguirse  $n - 1$  cortes fundamentales.

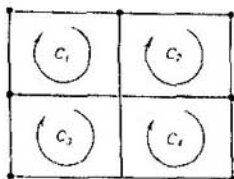


Fig. 5.18.

El teorema que sigue más abajo establece una relación entre los cortes fundamentales y los ciclos fundamentales, proporcionando el método de construcción de los cortes fundamentales.

**Teorema 12.** Si  $T$  es el esqueleto de un grafo no orientado  $G$ , el corte fundamental definido por la rama  $a_i$  de  $T$  está formado por  $a_i$  y aquellas cuerdas de  $G$ , las cuales, siendo adicionadas a  $T$ , proporcionan ciclos fundamentales que contienen  $a_i$ .

*Demostración.* Si eliminamos la arista  $a_i$  del esqueleto  $T$ , este último se descompone en dos subárboles:  $T_1$  y  $T_2$ . Cualquier arista, uno de cuyos vértices extremos yace en  $T_1$ , y el otro, en  $T_2$ , debe pertenecer al corte fundamental, puesto que la adición de cualquiera de tales aristas a las aristas de  $T_1$  y  $T_2$  conduce a la formación del otro esqueleto del grafo  $G$ , y, por consiguiente, cualquier conjunto privado de tales aristas no será un corte. El conjunto de estas aristas junto con la arista  $a_i$  es un corte, puesto que su eliminación divide el grafo en dos subgrafos, uno de los cuales tiene como conjunto de sus vértices  $T_1$ , y el otro,  $T_2$ . Esto quiere decir que este corte es fundamental. Más aún, por cuanto la arista  $a_i$  es la única por la que pasan las cadenas del esqueleto  $T$ , que tienen por origen los vértices de  $T_1$  y termina en los vértices de  $T_2$  las únicas aristas que cierran los ciclos fundamentales con la arista  $a_i$  incluida, serán aquellas, uno de cuyos vértices extremos yace en  $T_1$ , y el otro en  $T_2$ . De esta forma queda demostrado el teorema.

Sea  $T$  un esqueleto del grafo no orientado  $G$ . Se denomina *matriz de los ciclos fundamentales*  $\Phi$  a una submatriz de la matriz de los ciclos  $C$ , cuyas filas corresponden a los ciclos simples, definidos por las cuerdas que están unidas con el esqueleto dado  $T$ . Dicho de otro modo, si  $T$  es un esqueleto, entonces se llamará matriz de los ciclos fundamentales del grafo  $G$  a la matriz  $\Phi = [\varphi_{ij}]$ , compuesta de  $\nu(G)$  filas y  $m$  columnas, en la cual

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la arista } a_j \text{ pertenece al ciclo fundamental } \Phi_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Si numeramos las cuerdas del grafo  $G$  en una forma sucesiva desde 1 hasta  $\nu(G)$ , y las ramas, de  $(\nu(G) + 1)$  a  $m$ , entonces la matriz de los ciclos fundamentales tendrá por expresión

$$\Phi = [E|\Phi_{12}],$$

donde  $E$  es una matriz unidad de orden  $\nu(G)$ , y  $\Phi_{12}$ , una matriz de dimensión  $\nu \times (m - \nu)$ . Esto se explica por el hecho de que cada ciclo  $\Phi_i$  contiene una y sólo una cuerda y los ciclos siempre pueden ser numerados según el número de cuerdas, a consecuencia de lo cual todas las unidades en la primera  $(\nu \times \nu)$ -submatriz de la matriz  $\Phi$  se hallan en la diagonal.

La *matriz de los cortes fundamentales*  $K = [k_{ij}]$  se define como matriz con  $n - 1$  filas y  $m$  columnas, donde

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la arista } a_j \text{ pertenece al corte fundamental } k_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

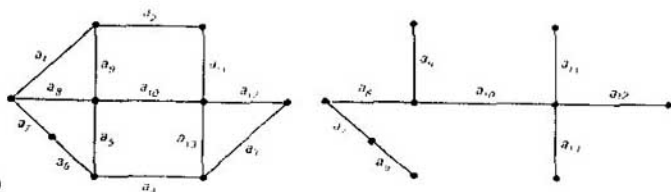


Fig. 5.19

Para la misma numeración de las aristas que en la matriz de los ciclos fundamentales  $\Phi$ , la matriz  $K$  tendrá por expresión

$$K = [K_{ij}/E],$$

puesto que en este caso todo corte fundamental tiene una y sólo una rama de  $T$ .

Admitamos que el grafo  $G$  y su esqueleto  $T$  están representados en la fig. 5.19. Entonces la matriz de los ciclos fundamentales es igual a

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \Phi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \Phi_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \Phi_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Phi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz de los cortes fundamentales  $K$  es igual a

$$K = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_8 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde los cortes  $k_i$ , correspondientes a las aristas del esqueleto, tienen los números

$$\mu(G) + i = 5 + i; \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Existen varias correlaciones interesantes entre las matrices de los ciclos fundamentales y de los cortes fundamentales y las incidencias de los grafos no orientados sin lazos.

**Teorema 13.** La matriz de incidencias  $A_0$  (con una fila suprimida) y la matriz transpuesta de los ciclos fundamentales  $\Phi^T$  son ortogonales, es decir,  $A_0 \Phi^T \equiv 0 \pmod{2}$ .

**Teorema 14.** La matriz de los ciclos fundamentales  $\Phi$  y la matriz transpuesta de los cortes fundamentales  $K^t$  son ortogonales, es decir,  $\Phi \cdot K^t \equiv 0 \pmod{2}$ .

Los teoremas 13 y 14 son consecuencia de dos hechos evidentes:

1) cada vértice en un ciclo es incidente al número par de aristas de este ciclo, y en el caso de un ciclo simple, a dos aristas;

2) cada corte de un ciclo, inducido por cierto corte, tiene un número par de aristas, comunes con dicho corte.

El teorema 13 se deduce del hecho 1), y el 14, del hecho 2), si recordamos que todas las operaciones se estudian con relación al módulo 2.

En lo que se refiere al teorema 14, podemos escribir

$$\Phi \cdot K^t = [E] \Phi_{12} \begin{Bmatrix} K_{11} \\ E \end{Bmatrix} = K_{11}^t + \Phi_{12} = 0 \pmod{2}.$$

Por eso,  $K_{11}^t = -\Phi_{12} = \Phi_{12} \pmod{2}$ . En otras palabras, la matriz de los cortes fundamentales puede ser obtenida en cuanto se conozca la matriz de los ciclos fundamentales, y viceversa.

**Ejercicios.** Cierciórese de la validez de las siguientes afirmaciones

12. Una submatriz cuadrada de dimensión  $(n-1) \times (n-1)$  de la matriz de incidencias  $I$  de un grafo conexo es regular, si las columnas de la submatriz citada corresponden a las ramas de cierto árbol.

13. Supongamos que la matriz de ciclos  $C$  de un grafo conexo tiene el rango  $n - m + 1$ . Su submatriz cuadrada  $B$  de orden  $n - m + 1$  es regular cuando y sólo cuando las columnas de la submatriz citada corresponden al conjunto de cuerdas respecto de cierto árbol de esqueleto del grafo dado.

14. Una submatriz regular de dimensión  $(n-1) \times (n-1)$  de la matriz de incidencias  $I$  corresponde biunívocamente a los espáculos del grafo.

15. Una matriz regular de dimensión  $(n-m+1) \times (n-m+1)$  de la matriz de ciclos  $C$  corresponde biunívocamente a los complementos de los espáculos del grafo.

16. Si las columnas de las matrices  $A_0$ ,  $\Phi$  y  $K$  las escribimos valiéndonos de un mismo orden de aristas con relación a cierto árbol de esqueleto, respecto del cual están formados los ciclos y cortes fundamentales, y, a continuación, las representamos en forma de  $A_0 = [A_0]A_{12}$ , donde  $A_{12}$  es una matriz cuadrada regular de orden  $n-1$ ,  $\Phi = [E]\Phi_{12}$  y  $K = \{K_{11}\}E$ , entonces

$$K_{11} = \Phi_{12}^t \cdot A_{12}^{-1} \cdot A_{11}.$$

Con esto hemos de acabar con la introducción a la teoría de los grafos. Esta teoría ha acumulado un enorme material de hechos reales. A la exposición de esta teoría están dedicados toda una serie de libros. Algunos de ellos ya han sido mencionados en el texto. Sin embargo, debemos atraer la atención del lector a la obra [79] (probablemente la única de su género) sobre el origen y desarrollo de la teoría de los grafos.



## CAPÍTULO 6 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS EXTREMALES

### 6.1. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS COMBINATORIOS EXTREMALES Y ACCESOS A SU RESOLUCIÓN

Según lo dicho en el capítulo 1, existen tres tipos de problemas combinatorios: en unos se resuelve la cuestión de existencia o no existencia de las soluciones; en otros se calcula el número de soluciones del problema; por fin, en los terceros de una colección de todas las soluciones se elige aquella que posee cierta propiedad en un grado máximo o mínimo. Los problemas de este último tipo se denominan precisamente extremos.

Demos a conocer unos cuantos ejemplos de problemas combinatorios extremos.

**1. Problema de nombramientos.** Se tienen  $n$  plazas vacantes y el mismo número de candidatos para ocuparlas. El nombramiento del  $i$ -ésimo candidato a la  $j$ -ésima plaza lleva consigo el pago del salario  $c_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Para cada candidato puede ser asignada sólo una plaza, y cada plaza puede ser ocupada sólo por un candidato. En otras palabras, no se admiten el ejercer un cargo simultáneamente con otro y el fraccionamiento de los cargos. El problema consiste en llevar a cabo los nombramientos de un modo tal que la economía de los fondos de salario sea máxima, es decir, en encontrar

$$\min \sum_{i=1}^n c_{ij_i}$$

donde  $j_i$  es el cargo que obtiene el  $i$ -ésimo candidato, y  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  es una sustitución correspondiente a los nombramientos:  $i \rightarrow j_i$ . Si interpretamos  $c_{ij}$  como rendimiento, el problema consistirá en la búsqueda del máximo y no del mínimo. Los problemas de nombramientos tienen muchas formas diferentes en función de las condiciones. Por ejemplo, para ejecutar  $n$  operaciones independientes están elegidos  $m$  obreros; se da una matriz  $\{t_{ij}\}$ , donde  $t_{ij}$  es el tiempo que gasta el  $i$ -ésimo obrero para realizar la  $j$ -ésima operación. La magnitud, cuyo mínimo se busca, es el tiempo de realización de todo el trabajo:

$$F = \min_i E_i; \quad E_i = \sum_{j \in R_i} t_{ij}$$

donde  $R_i$  es el conjunto de operaciones ejecutadas por el  $i$ -ésimo obrero.

En un caso particular, puede prefijarse el número de operaciones  $n_i$  para el  $i$ -ésimo obrero:  $\sum_i n_i = n$ . Cuando  $n_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n; n = m$ ), obtenemos el problema de nombramientos con el criterio de mini-máx. Por último, demos a conocer tal formulación del problema de nombramientos

cuando se toma en consideración el tiempo que gasta un obrero para pasar de una operación a la otra. Sean dadas  $n$  operaciones y  $m$  obreros. Se hacen las matrices:  $T = [t_{ij}]$ , donde  $t_{ij}$  es el tiempo durante el cual el  $i$ -ésimo obrero cumple la  $j$ -ésima operación, y  $L = [l_{ij}]$ , donde  $l_{ij}$  es el tiempo que gasta cualquier obrero para pasar de la  $i$ -ésima operación a la  $j$ -ésima. Se requiere distribuir las operaciones entre los obreros y de tal manera considerar el tiempo de paso, que el tiempo de ejecución de todo el complejo de operaciones sea mínimo.

**2. Problema de un viajante de comercio.** Un viajante de comercio tiene que visitar varias ciudades. Ha de elegir la ruta más corta para que empezando a viajar desde su ciudad, pueda visitar otras ciudades una sola vez y regresar. Las distancias entre las ciudades calculadas de dos en dos vienen dadas en forma de una matriz  $C = [c_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , donde  $n$  es el número de ciudades.

**3. Problema de una mochila.** Se tienen  $n$  objetos cuyos pesos son  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , y el valor  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , respectivamente. Se pide llenar la mochila, capaz de contener un peso no superior a  $R$ , con un surtido de objetos que posea un valor máximo.

Construyamos un vector  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_i = 1$ , si el  $i$ -ésimo objeto debe colocarse en la mochila, y  $x_i = 0$ ; en el caso contrario;  $i = 1, 2, \dots, n$ . El problema se formulará como problema de búsqueda de

$$\max \sum_{i=1}^n s_i x_i$$

(del valor máximo de los objetos colocados) a condición de que

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i \leq R.$$

**4. Minimización del tiempo de ejecución de un juego de operaciones.** Supongamos que se pide ejecutar  $n$  operaciones. A cada operación se le hace corresponder un vértice del grafo  $G$ , donde está trazado un arco desde el vértice  $i$  hacia el  $j$ , si la operación  $i$  precede, según las condiciones tecnológicas, a la operación  $j$ . Todas las operaciones están divididas en  $m$  clases, con la particularidad de que en un momento dado puede ejecutarse sólo una operación de cada clase. Se conoce el tiempo de ejecución de las operaciones ( $t_j$  para la  $j$ -ésima operación). Se requiere determinar el orden de ejecución de todas las operaciones que asegure la realización del trabajo en el tiempo mínimo  $T$ . Por ejemplo, sea una red (esquema) de 6 operaciones:  $A_1, A_2, A_3, A_4$  son operaciones de primera clase y  $B_1, B_2$ , de segunda; el tiempo de ejecución de cada operación viene indicado dentro de los cuadrados en la fig. 6.1. Sean  $R_1$  y  $R_2$  sucesiones de ejecución de las operaciones para cada clase, respectivamente. Por ejemplo, para  $R_1 = (2, 1, 3, 4)$ ;  $R_2 = (2, 1)$  obtendremos:  $T = 36$ . Es evidente que el número de combinaciones admisibles depende considerablemente de la estructura de la red.

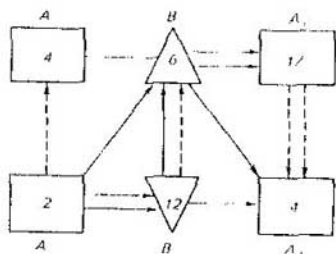


Fig. 6.1

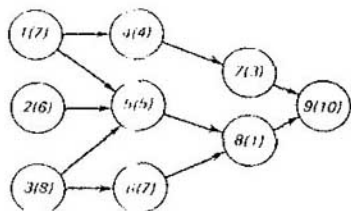


Fig. 6.2.

### 5. Minimización del tiempo medio de mecanizado de un lote de piezas.

Se analiza un grafo orientado  $G$  con los vértices  $1, 2, \dots, n$ , donde el vértice  $i$  corresponde al  $i$ -ésimo tipo de las piezas a maquinar. Para cada arco  $(i, j)$  viene dada su longitud  $l_{i,j}$ , la cual se interpreta como período entre el mecanizado de las piezas del  $i$ -ésimo tipo y el mecanizado de las piezas del  $j$ -ésimo tipo. La sucesión de vértices  $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}$ , donde  $i_{k+1} = i_1$  define el ciclo del mecanizado. Se pide minimizar el tiempo medio de este proceso

$$T_{\text{m}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k l_{i_j, i_{j+1}}$$

es decir, hallar en el grafo orientado  $G$  el contorno que tenga una longitud media mínima.

**6. Minimización de la parada de una línea de montaje.** Supongamos que  $n$  operaciones se efectúan en un transportador de  $m$  tramos. Para que el transportador se mueva continuamente, el tiempo de trabajo del operario no debe sobrepasar la duración del ciclo. Admitamos que en el  $i$ -ésimo tramo se realizan un conjunto de operaciones  $R_i$ . Entonces, el tiempo activo en el  $i$ -ésimo tramo es  $t_i = \sum_{\mu \in R_i} t_\mu$  y la parada (interrupción) en él es igual a

$d_i = C - \sum_{\mu \in R_i} t_\mu$ , donde  $C$  es la duración total del ciclo de operaciones. La

magnitud sumaria de la parada  $d = \sum_{i=1}^m d_i$  debe hacerse mínima a cuenta de la distribución de las operaciones por tramos. Además, pueden plantearse las cuestiones: a) sobre el mínimo de duración del ciclo  $C = \max_i t_i$  para un número dado  $m$  de tramos; b) sobre el mínimo del número  $m$  para una longitud dada del ciclo. En la fig. 6.2 vienen introducidas 9 operaciones (entre paréntesis se indica el número de unidades de tiempo que se requieren para la ejecución de la operación correspon-

diente) y 3 tramos:

$$R = (R_1, R_2, R_3) = (1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9),$$

tenemos

$$F_1 = 21; F_2 = 16; F_3 = 14,$$

$$C = \max_i F_i = 21; T = \sum_i t_i = 51.$$

El tiempo total de parada es

$$d = \sum_i d_i = mC - T = 3 \cdot 21 - 51 = 12.$$

**7. Problema de recubrimiento.** Hállese, para un grafo no orientado dado  $G$ , el recubrimiento mínimo, es decir, un surtido mínimo de aristas tal que cualquier vértice resulte ser incidente a cierta arista perteneciente al surtido mencionado. Formalicemos el planteamiento de este problema. Numeremos los vértices del grafo con los números  $1, 2, \dots, m$ , y las aristas, con los números  $1, 2, \dots, n$ . Sea  $[a_{ij}]$  la matriz de incidencias del grafo  $G$ . Unamos con las aristas las variables  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) tales que  $x_j = 1$ , si la arista  $j$  integra el recubrimiento;  $x_j = 0$ , en el caso contrario. El problema de hallar el recubrimiento mínimo es equivalente a la búsqueda del  $\min \sum_{j=1}^n x_j$  con requerimientos adicionales:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1; i = 1, 2, \dots, m.$$

La forma general de un problema combinatorio extremal es la siguiente. Si tiene un  $n$ -conjunto de elementos, en el que se da un conjunto (finito, por regla general) de combinaciones

$$P = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r).$$

Por combinaciones  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$  pueden entenderse las permutaciones, combinaciones, diferentes sucesiones, etc. En el conjunto  $P$  se define una función  $F$ . Se necesita hallar el extremo de  $F$  (el máximo o el mínimo), o bien los elementos del conjunto  $P$  que aseguran dicho extremo.

La propia formulación de los problemas combinatorios extremales predetermina la elección de las operaciones que se aplican para su resolución. En primer lugar, hay que disponer de un conjunto, de valores de la función  $F$  y saber seleccionarlas de un modo adecuado. En segundo lugar es necesario desarrollar el método de comparar estos valores y distinguir entre ellos el valor máximo o mínimo.

La primera operación de la selección raras veces, prácticamente, resulta ser realizable, puesto que el número de toda clase de combinaciones posibles puede ser demasiado grande. Efectivamente, en el primer ejemplo el número de todas las combinaciones es igual a  $n!$ , en el segundo a

$(n-1)!$ , en el tercer ejemplo a  $2^n$ , en el cuarto a  $(n!)^m$ , en el quinto a  $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (k-1)$ , etc.

No es más fácil la operación de comparación. En el caso general es difícil juzgar, sin realizar cálculos inmediatos, si tiene lugar  $F(\pi_i) > F(\pi_j)$ , o, viceversa,  $F(\pi_i) \leq F(\pi_j)$ . Además, la propia determinación del valor de la función  $F(\pi_i)$  representa, como regla, un problema que no es nada fácil.

Las dificultades relacionadas con la elección de las variantes y la comparación de los valores son considerables. Precisamente ellas constituyen un obstáculo para el progreso de esta parte del análisis combinatorio, a pesar de su actualidad evidente. Solamente con la introducción (hace 30 años) en la práctica matemática de los ordenadores se hizo posible la resolución de toda una serie de problemas extremales.

El esquema general que caracteriza la conexión de los problemas combinatorios extremales con los métodos de programación lineal puede ser representado aproximadamente así: los elementos  $\pi_i$  se interpretan como puntos de un espacio euclídeo para que la función de "especial"  $F$  se haga una forma lineal. Se examina el problema de encontrar el extremo de esta función en la cápsula convexa de los puntos dados (es decir, en un poliedro convexo). En efecto, el extremo de una forma lineal en un poliedro se consigue en uno de los vértices que integran el conjunto de los elementos en consideración. Mientras tanto, el problema de hallar el extremo de una forma lineal es precisamente un problema de programación lineal. La peculiaridad de los problemas combinatorios, al realizarse tal esquema, consiste en que en el proceso de búsqueda de la solución hemos de limitarnos a los puntos cuyas coordenadas son números enteros.

Mostremos con ejemplos cómo se plantean los problemas de programación para los problemas combinatorios extremales. La solución del problema de nombramientos (ejemplo 1) representa una permutación  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  de los números  $1, 2, \dots, n$ , obtenida como resultado de los nombramientos del tipo  $i \rightarrow p_i; i = 1, 2, \dots, n$ . El objetivo consiste en encontrar  $\min \sum_{i=1}^n c_{ij}$  en el conjunto finito de las permutaciones mencionadas. Cada permutación puede interpretarse como un punto en el espacio euclídeo  $n^2$ -dimensional; en este caso ésta puede representarse con mayor comodidad en forma de una  $(n \times n)$ -matriz  $X = \|x_{ij}\|$ , donde  $x_{ij} = 1$ , si el  $i$ -ésimo candidato está designado para ocupar el  $j$ -ésimo cargo, y  $x_{ij} = 0$ , en el caso contrario. Sustituyamos esta condición por la otra:  $x_{ij} \geq 0$ , para que no se impida la aplicación de la programación. Los requerimientos referentes a la inadmisibilidad de ejercer un cargo simultáneamente con otro y al fraccionamiento de los cargos se escribirán como condiciones:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

Los gastos sumarios, cuyo mínimo se busca, se escribirán así:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

En el problema de un viajante (ejemplo 2) se busca, como sabemos,

$$\min \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}$$

bajo las condiciones de que

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

(de cada ciudad el viajante se va sólo una vez),

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

(en cada ciudad el viajante llega una sola vez) y

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j.$$

La última condición está introducida con el fin de asegurar la unicidad del ciclo en el camino del viajante. Efectivamente, si existiera una solución que contenga dos o más ciclos, se encontraría un subciclo  $\tau$  con  $k$  eslabones el cual no pase por el punto de partida. La sumación de las últimas condiciones para  $\tau$  llevaría a una contradicción:

$$nk \leq (n - 1)k.$$

En la última condición no se han determinado  $u_i$  y  $u_j$ . Pueden hallarse para cualquier ciclo que tiene por origen el punto de partida. Si el punto  $i$  se visita en la  $p$ -ésima etapa del recorrido ( $p = 1, 2, \dots, n$ ), entonces pongamos  $u_i = p$ . Para todos los  $i$  y  $j$  de aquí se deduce que  $u_i - u_j \leq n - 1$ . La última condición se cumple para cualesquiera  $x_{ij} = 0$ . En cambio, si  $x_{ij} = 1$ , las citadas condiciones se escriben como igualdades:

$$u_i - u_j + n x_{ij} = p - (p + 1) + n = n - 1.$$

El problema de recubrimiento (ejemplo 7) ya está formulado de tal modo que permite plantear el problema correspondiente de la programación lineal. Su planteamiento más general consiste en hallar, para un conjunto finito dado  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  y cierta totalidad finita de sus subconjuntos  $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), un recubrimiento mínimo del conjunto  $S$ , es decir, un juego mínimo de subconjuntos  $S_j$ , en el cual todo elemento  $s \in S$  pertenezca por lo menos a uno de los subconjuntos.

Para este problema general se aplica un acceso análogo: se hace una matriz de incidencias  $|a_{ij}|$ , en la cual  $a_{ij} = 1$ , si  $s_i \in S_j$ , y  $a_{ij} = 0$ , en el caso contrario. Hallemos  $x_{ij}$  que son iguales a uno, si  $S_j$  integra el recubrimiento, y a 0, si no lo integra. Por consiguiente, resulta aplicable al problema la programación lineal.

Para la resolución de los problemas combinatorios extremales han sido elaborados diferentes métodos de cálculo. Los más перспекivos de ellos han formado una rama aparte de la programación combinatoria (véase [80]). La idea general de dichos métodos consiste en la sustitución de la selección completa de todas las variantes por las selecciones parciales de menor volumen. Para poder realizar tal idea se hallan ciertos subconjuntos que a ciencia cierta no contienen el extremo buscado, estrechando el dominio de las variantes posibles. En esta ocasión los métodos resultan ser los más diversos y se definen por la estructura de los conjuntos finitos correspondientes. Más abajo se describen varios métodos ampliamente usados hoy día.

## 6.2. MÉTODO DE RAMIFICACIONES Y RESTRICCIONES<sup>1)</sup>

De acuerdo con este método, el conjunto de todas las combinaciones admisibles  $Q$  se parte en subconjuntos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{s_1}$ . Cada uno de los últimos se parte, a continuación, en subconjuntos  $Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{is_2}$  ( $i = 1, 2, \dots, s_1$ ), etc. hasta que se obtengan combinaciones separadas. Este proceso de ramificación resulta cómodo expresarlo en forma de un árbol. En cada subconjunto  $Q_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  se define una función de preferencia  $\varphi(Q_{i_1, i_2, \dots, i_n})$ . Comenzando por el vértice  $Q$ , el proceso se realiza una etapa a otra, eligiéndose cada vez un subconjunto que tenga el valor mínimo de la citada función (o el valor máximo, si lo exigen las condiciones del problema). El árbol obtenido será un árbol de soluciones.

El problema consiste en la elección acertada de la función de preferencia para que se pueda obtener una buena solución. A veces, la elección de un subconjunto se realiza al azar: en este caso la probabilidad de que se elija un conjunto dado es tanto mayor cuanto menor es el valor de su función de preferencia (funciones randomizadas de preferencia).

El problema principal en este método consiste en elegir el procedimiento de determinación de la frontera inferior (o superior). No es siempre fácil obtener el valor bastante exacto de ella, pero, conseguido este valor, el número de ramas que se examinan en el árbol de soluciones se reduce en el caso general. Esto se debe a que, si el valor de la frontera inferior para tal o cual subconjunto es superior o igual (en el caso de minimización;

<sup>1)</sup> Se conoce también como método de particiones progresivas y estimaciones, método de ramas y fronteras

inferior o igual, en el caso contrario) al valor de la función minimizada de una de las soluciones ya obtenidas, entonces, la rama correspondiente del árbol de soluciones se excluye del análisis.

Sea  $Q$  un conjunto de todas las soluciones admisibles de cierto problema:  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ ; en el conjunto de dichas soluciones está dada una función  $f$ . Se pide hallar un subconjunto  $Q_n \subset Q$ , en el cual la función  $f$  alcance su mínimo (o su máximo).

Supongamos que conocemos cierta frontera inferior  $b_0$  para la función  $f$  en el conjunto  $Q$ . Admitase que por medio de un procedimiento se ha logrado partir  $Q$  en un conjunto  $A$  y un complemento de éste  $\bar{A}$ , y además, precisar, después, las fronteras inferiores de  $f$  en los conjuntos  $A$  y  $\bar{A}$ , las cuales son iguales a  $b_1$  y  $b_1'$ , respectivamente, con la particularidad de que  $b_1 \geq b_0$ ;  $b_1' \geq b_0$ . Supongamos ahora que con ayuda de otros procedimientos logramos partir  $Q$  en dos partes:  $B$  y  $\bar{B}$ ;  $C$  y  $\bar{C}$ , ... . Examinemos los conjuntos  $A \cap B$ ;  $A \cap \bar{B}$ ;  $\bar{A} \cap B$ ;  $\bar{A} \cap \bar{B}$  y las fronteras inferiores precisadas de  $f$  en dichos conjuntos  $b_2$ ,  $b_2'$ ,  $b_2''$  y  $b_2'''$ , respectivamente. En este caso, además,

$$\begin{aligned} b_2 &\geq b_1 \geq b_0; & b_2'' &\geq b_1' \geq b_0; \\ b_2' &\geq b_1 \geq b_0; & b_2''' &\geq b_1' \geq b_0. \end{aligned}$$

Así pues, podemos construir un árbol orientado con la raíz  $Q$  (bisárbol) (fig. 6.3), con la particularidad de que no hay necesidad de hacerlo hasta el fin. Supongamos que hemos construido una parte del árbol partiendo el conjunto  $Q$  en ciertos subconjuntos y encontramos las fronteras inferiores para los vértices correspondientes a los subconjuntos citados. Elegimos de todos los vértices pendientes aquél que tiene una frontera mínima, y, a continuación, partiendo los subconjuntos correspondientes, obtenemos dos vértices nuevos, en los cuales precisamos las fronteras inferiores de la función  $f$ .

Enunciemos la siguiente afirmación sencilla: en cualquier etapa la unión de los subconjuntos, correspondientes a los vértices pendientes, da todo el  $Q$ . Por eso, si obtenemos, como resultado del proceso dado, un vértice compuesto por un solo conjunto  $\{q_i\}$ , y si la frontera inferior de la función  $f$  en el citado vértice es menor que en los restantes vértices pendientes entonces  $f$  toma en  $q_i$  su valor mínimo. El proceso se da por terminado.

Con ayuda de los razonamientos análogos se puede describir el algoritmo para hallar la solución máxima, si ésta existe.

Desgraciadamente, el método en consideración no da una respuesta constructiva al problema planteado. En cada problema concreto hay que idear algoritmos de partición del conjunto  $Q$  y los mejores procedimientos para precisar las fronteras inferiores  $b$  en los vértices pendientes.

Veamos cómo se aplica el método al problema del viajante. En el lenguaje de la teoría de los grafos en este problema se trata de la búsqueda de los contornos hamiltonianos óptimos.



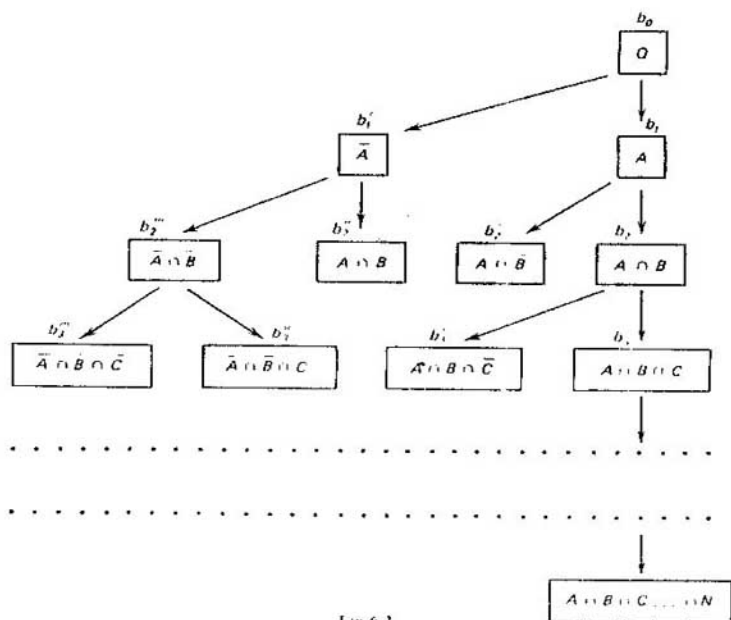


Fig 6.3.

Sin embargo, no todos los grafos contienen el contorno de Hamilton. Por consiguiente, antes de proceder a buscar el contorno hamiltoniano óptimo, hemos de tratar, por lo menos, de establecer si tal contorno existe en el grafo dado. Por otra parte, existen grafos que disponen de una gran cantidad de contornos hamiltonianos, lo que hace imposible la selección completa incluso en los ordenadores. Por ejemplo, para un grafo completo en  $n$  vértices existen  $(n - 1)!$  diferentes contornos hamiltonianos. En 1963 Little encontró un método estricto de optimización para los problemas del tipo dado con gran número de contornos hamiltonianos.

Sea dado un grafo orientado  $G = (X, U)$ , donde  $|X| = n$ , y a todo arco  $(x_i, x_j) \in U$  le está asignado el valor  $c_{ij} = c(x_i, x_j)$ . Vamos a suponer que cualesquiera  $c_{ij} \geq 0$ . Si es que el arco  $(x_i, x_j) \notin U$ , entonces  $c_{ij} = \infty$ .

El algoritmo para encontrar el contorno hamiltoniano mínimo consistirá en la construcción de un bisárbol descrito en el método de ramificaciones y restricciones.

A)  $Q$  (la raíz del bisárbol) es el conjunto de todos los contornos hamiltonianos. La frontera inferior de  $E$ , es, obviamente, un cero, pero encontraremos la frontera mayor en el proceso de búsqueda de los conjuntos

$A$  y  $\bar{A}$  del bisárbol. Procedamos de la manera siguiente. En cada fila de la matriz  $[c_{ij}]$  encontramos el elemento mínimo y lo restamos de todos los elementos de dicha fila. Si en la matriz obtenida hay columnas que no tienen elementos nulos, encontramos en cada una de ellas el elemento mínimo y lo restamos de todos los elementos de la columna. De resultas, tendremos una matriz nueva  $[c'_{ij}]$  en la que en cada fila y en cada columna se contiene por lo menos un solo cero.

B) Sumemos todos los elementos que hemos sustraído en A). La suma de ellos  $b$  será precisamente la frontera inferior para  $Q$ . Efectivamente, tomemos un contorno arbitrario  $L$ , en el cual la suma de los valores de los arcos es igual a  $l$ . En el punto A), al transformar la matriz  $[c_{ij}]$  en  $[c'_{ij}]$ , hemos sustraído ciertos números de todos los elementos de las filas correspondientes y de ciertas columnas. Con ello, cada vez de la magnitud  $l$  estos números se restaban también y, al fin y al cabo, la longitud del contorno  $L$  en la matriz  $[c'_{ij}]$  es también no negativa. Por consiguiente,  $l \geq b$ .

C) Pasemos a la construcción de los vértices del bisárbol del siguiente nivel. Sea  $c'_{ij} = 0$ . Definamos  $\gamma_{ij}$  como suma del elemento mínimo de la  $i$ -ésima fila y del elemento mínimo de la  $j$ -ésima columna (excluyendo  $c_{ij}$  que es igual a cero) y hallemos

$$\theta = \gamma_{kl} - \max_{i, j} \gamma_{ij}$$

Veamos la propiedad  $p_{kl}$ : "el contorno no contiene el arco  $(x_k, x_l)$ " que se aplicará a los arcos con  $c'_{ij} = 0$ .

Si un contorno hamiltoniano no contiene el arco  $(x_i, x_j)$ , entonces obligatoriamente empleará ciertos dos arcos  $(x_i, x_s)$ ;  $s \neq j$ , y  $(x_r, x_j)$ ;  $r \neq i$ .

D) Demostremos que  $b'_l = b + \gamma_{kl}$  es la frontera inferior para el conjunto de contornos que satisfacen la propiedad  $p_{kl}$ . En efecto, analicemos un contorno hamiltoniano arbitrario  $L_1$  privado del arco  $(x_k, x_l)$ . Entonces, realizada la transformación A), la longitud de este contorno en la matriz renovada será no inferior a cero. Con eso queda construido el vértice del bisárbol  $E_{kl}$  con la frontera inferior  $b' = b + \theta$ .

E) Construimos el vértice  $E_{kl}$  que se define por la propiedad  $p_{kl}$ : "el contorno emplea el arco  $(x_k, x_l)$ ". Suprimimos de la matriz la  $k$ -ésima fila y la  $l$ -ésima columna, sustituyéndolas por  $\infty$ :

A) o bien el valor de  $c'_{ik}$ , si el contorno no empleaba hasta este momento los arcos que entran en el vértice  $x_k$  y salen del vértice  $x_i$ , puesto que la conexión del arco  $(x_i, x_k)$  con los arcos del contorno ya elegidos conduce a la aparición de un contorno no hamiltoniano; b) o bien el valor de  $c'_{lm}$ , si el contorno contiene, además del arco  $(x_k, x_l)$ , todos los arcos de cierto camino simple del vértice  $x_m$  al vértice  $x_k$ , puesto que la adición del arco  $(x_l, x_m)$  a los arcos del contorno ya elegidos también conduce a la aparición de un contorno no hamiltoniano; c) o bien el valor de  $c'_{pk}$ , si el contorno contiene, además del arco  $(x_k, x_l)$ , todos los arcos del camino simple que

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	2	3	2	7
$x_2$	3	$\infty$	7	6	7
$x_3$	1	7	$\infty$	3	7
$x_4$	6	7	3	$\infty$	7
$x_5$	7	6	7	6	$\infty$

Fig. 6.4.

llevan del vértice  $x_i$  al vértice  $x_j$ , puesto que la conexión del arco  $(x_i, x_j)$  con los arcos del contorno ya elegidos conduce a la aparición de un contorno no hamiltoniano.

F) Actuamos igual que en A) con la matriz obtenida como resultado de E).

G) Actuamos igual que en B) con la matriz obtenida como resultado de F). Al agregar la suma obtenida a la frontera para el vértice antecedente (en el primer caso, para  $Q$ ), obtenemos la frontera para el vértice de E).

H) Si, como resultado de F), se obtiene una matriz de orden 1, el proceso se da por terminado. Si no, pasamos a I).

I) Entre todos los vértices pendientes del bisárbol ya construido elegimos un vértice de frontera mínima.

J) Si el vértice elegido en I) correspondía en el proceso de construcción a la propiedad  $p_{ij}$ , pasamos a C). Si no, pasamos a K).

K) Supongamos que el vértice elegido correspondía en la construcción a la propiedad  $p_{ij}$ . Sustituimos el valor en la célula  $(i, j)$  de la matriz correspondiente por  $\infty$ . En la  $i$ -ésima fila, igual que en la  $j$ -ésima columna, encontramos un elemento mínimo y lo restamos de todos los elementos de dicha fila (columna). Pasamos luego a C).

Examinemos ahora un ejemplo numérico que muestra cómo se aplica el algoritmo de Little a la búsqueda del contorno hamiltoniano mínimo de un grafo. Sea  $G$  un grafo con 5 vértices  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , y a cada arco de este grafo  $(x_i, x_j)$  se le asigna un número  $c_{ij}$ :  $i, j = 1, 2, \dots, 5$ . Estos valores están escritos en forma de una matriz de valores en la fig. 6.4.

Construyamos un bisárbol, descrito por el método de ramificaciones y restricciones, para este ejemplo numérico.

A) De los elementos contenidos en las filas  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  sustraemos respectivamente sus elementos mínimos 2, 3, 1, 2, 4; además, de la columna  $x_5$  sustraemos 1 (véase fig. 6.6 a).

B) Calculamos la suma  $2 + 3 + 1 + 2 + 4 + 1 = 13$ . De este modo, para el vértice  $Q$  (el conjunto de todos los contornos hamiltonianos) obtenemos una frontera:  $b = 13$ .

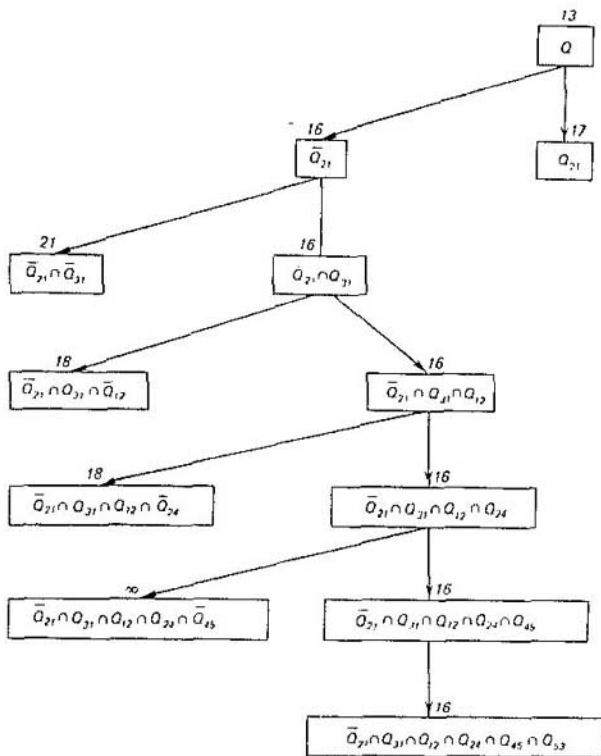


Fig. 6.5.

C) Pasamos al examen de todos los elementos nulos de la matriz:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, x_2) = 2; \quad \gamma(x_1, x_4) = 2; \quad \gamma(x_2, x_1) = 3; \quad \gamma(x_3, x_1) = 2; \\ \gamma(x_4, x_3) = 0; \quad \gamma(x_4, x_5) = 3; \quad \gamma(x_5, x_3) = 2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $\theta = \gamma(x_2, x_1) = 3$ .

D) Expresamos el vértice  $Q_{21}$  del bisárbol con la frontera inferior igual a  $13 + 3 = 16$ .

E) Expresamos el vértice  $Q_{21}$  definido por la propiedad "el contorno contiene el arco  $(x_2, x_1)$ ". Suprimimos la segunda fila y la primera columna. En la célula (1, 2) colocamos  $\infty$  (véase fig. 6.6 b).

F) Al principio sustraemos 2 de todos los elementos de la fila  $x_3$ , y después, de la primera columna sustraemos 2 (véase fig. 6.6 c).

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	0	1	0	4
$x_2$	0	$\infty$	4	3	3
$x_3$	0	6	$\infty$	2	5
$x_4$	3	5	0	$\infty$	0
$x_5$	3	2	0	2	$\infty$

	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	1	0	4
$x_3$	2	$\infty$	0	3
$x_4$	3	0	$\infty$	0
$x_5$	0	0	2	$\infty$

	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	1	0	4
$x_3$	6	$\infty$	2	5
$x_4$	5	0	$\infty$	0
$x_5$	2	0	2	$\infty$

Fig. 6.6

G) La suma de los elementos sustraídos de las filas y columnas en F), es igual a 4. Por consiguiente, para el vértice  $\bar{Q}_{21}$  tenemos una frontera 17 (=13 + 4).

H) Se ha obtenido aquí la matriz de orden 4. Pasamos a la siguiente operación I).

I) El vértice pendiente con el valor mínimo igual a 16 es  $\bar{Q}_{21}$ .

J) El vértice  $\bar{Q}_{21}$  se ha obtenido con ayuda de la propiedad  $p_{21}$ . Pasamos a K).

K) En la célula  $(x_2, x_1)$  de la matriz expuesta en la fig. 6.6 a) disponemos  $\infty$ . Obtenemos una matriz que se muestra en la fig. 6.7 a). A continuación sustraemos 3 de todos los elementos de la fila  $x_2$ . Véanse en la fig. 6.7 b) los resultados.

C) Para la matriz expuesta en la fig. 6.7 b) calculamos:

$$\gamma(x_1, x_2) = 2, \quad \gamma(x_1, x_4) = 0, \quad \gamma(x_2, x_4) = 0, \quad \gamma(x_2, x_5) = 0,$$

$$\gamma(x_3, x_1) = 5, \quad \gamma(x_4, x_3) = 0, \quad \gamma(x_4, x_5) = 0, \quad \gamma(x_5, x_4) = 2.$$

$$\text{Obtenemos } \Theta = \gamma(x_3, x_1) = 5.$$

D) Construimos el vértice  $\bar{Q}_{21} \cap \bar{Q}_{31}$ , al que corresponde la frontera: 16 + 5 = 21;

E) Construimos el vértice  $\bar{Q}_{21} \cap \bar{Q}_{31}$ . Suprimimos la fila  $x_3$  y la columna  $x_1$ . En la célula  $(x_1, x_3)$  de la matriz expuesta en la fig. 6.7 b) colocamos  $\infty$ . Véase el resultado en la fig. 6.7 c).

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	0	1	0	4
$x_2$	$\infty$	$\infty$	4	3	1
$x_3$	0	6	$\infty$	2	5
$x_4$	3	5	0	$\infty$	0
$x_5$	3	4	0	2	$\infty$

a

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	0	1	0	4
$x_2$	$\infty$	$\infty$	1	0	0
$x_3$	0	6	$\infty$	2	5
$x_4$	3	5	0	$\infty$	0
$x_5$	3	2	0	2	$\infty$

b

	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	0	$\infty$	0	4
$x_2$	$\infty$	1	0	0
$x_3$	5	0	$\infty$	0
$x_4$	2	0	2	$\infty$

c

Fig. 6.7

F) Todas las filas y todas las columnas de la matriz en la fig. 6.7 c contienen ceros.

G) Por consiguiente, para el vértice  $Q_{21} \cap Q_{31}$  la frontera es igual a 16.

H) Se ha obtenido la matriz de orden 4. Pasamos a D).

I) El vértice pendiente de valor mínimo igual a 16 es  $\bar{Q}_{21} \cap \bar{Q}_{31}$ .

J) El vértice  $\bar{Q}_{21} \cap \bar{Q}_{31}$  se ha obtenido con ayuda de la propiedad  $p_{31}$ . Pasamos a C).

C) Calculamos  $\gamma$  para todos los elementos nulos de la matriz expuesta en la fig. 6.7 c:

$$\gamma(x_1, x_2) = 2; \quad \gamma(x_1, x_4) = 0; \quad \gamma(x_2, x_4) = 0;$$

$$\gamma(x_2, x_5) = 0; \quad \gamma(x_4, x_1) = 0; \quad \gamma(x_4, x_5) = 0; \quad \gamma(x_5, x_3) = 2;$$

$$\theta = \gamma(x_1, x_2) = 2.$$

D) Construimos el vértice  $Q_{21} \cap Q_{11} \cap \bar{Q}_{12}$  cuya frontera es 18 (=16 + 2).

F) Construimos el vértice  $Q_{21} \cap Q_{11} \cap Q_{12}$ . Suprimimos la fila  $x_1$  y la columna  $x_2$  de la matriz expuesta en la fig. 6.7 c. Obtenemos una matriz que se muestra en la fig. 6.8 a. En la célula (2, 3) colocamos el signo  $\infty$ .

F) En cada fila y en cada columna de la matriz expuesta en la fig. 6.8 a se contienen ceros.

G) La frontera inferior para el vértice  $\bar{Q}_{21} \cap \bar{Q}_{31} \cap Q_{12}$  es igual a 26.

H) Se ha obtenido una matriz de orden 3. Pasamos a I).

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1$	$\infty$	0	0
$x_2$	0	$\infty$	0
$x_3$	0	2	$\infty$

	$x_1$	$x_2$
$x_4$	$\infty$	0
$x_5$	0	$\infty$

	$x_1$
$x_5$	0

Fig. 6.8.

- I) El vértice pendiente de valor mínimo 16 es  $Q_{21} \cap Q_{31} \cap Q_{12}$ .  
 J) El vértice  $Q_{21} \cap Q_{11} \cap Q_{13}$  se ha obtenido con ayuda de la propiedad  $p_{12}$ . Por eso, pasamos a C).  
 C) Calculamos  $\gamma$  para todos los elementos nulos de la matriz en la fig. 6.8 a:

$$\begin{aligned} \gamma(x_2, x_1) &= 2; \quad \gamma(x_2, x_3) = 0; \quad \gamma(x_4, x_1) = 0; \\ \gamma(x_2, x_5) &= 0; \quad \gamma(x_5, x_3) = 2; \\ \Omega &= \gamma(x_2, x_1) = 2. \end{aligned}$$

D) Construimos el vértice  $Q_{21} \cap Q_{31} \cap Q_{12} \cap Q_{24}$ , cuya frontera será igual a 18 ( $=16 + 2$ ).

E) Construimos el vértice  $Q_{21} \cap Q_{31} \cap Q_{12} \cap Q_{24}$ . Suprimimos la fila  $x_2$  y la columna  $x_3$  de la matriz en la fig. 6.8 a; en la célula (4, 3) colocamos  $\infty$ . Obtenemos una matriz que se muestra en la fig. 6.8 b.

F) En la matriz de la fig. 6.8 cada fila y cada columna contiene ceros.

G) La frontera para el vértice  $Q_{21} \cap Q_{31} \cap Q_{12} \cap Q_{24}$  será igual a 16.

H) Tenemos una matriz de orden 2, por eso pasamos a I).

I) El vértice pendiente de valor mínimo 16 es  $Q_{21} \cap Q_{31} \cap Q_{12} \cap Q_{24}$ .

J) Este vértice se ha obtenido con ayuda de la propiedad  $p_{24}$ . Pasamos a C).

C) Calculamos  $\gamma$  para los elementos nulos de la matriz en la fig. 6.8 b:

$$\begin{aligned} \gamma(x_4, x_1) &= \infty; \quad \gamma(x_5, x_1) = \infty; \\ \Omega &= \gamma(x_4, x_5) = \infty. \end{aligned}$$

D) Construimos el vértice  $\bar{Q}_{21} \cap \bar{Q}_{31} \cap \bar{Q}_{12} \cap \bar{Q}_{45}$ . La frontera para el es igual a  $\infty$ .

E) Construimos el vértice  $\bar{Q}_{21} \cap \bar{Q}_{31} \cap \bar{Q}_{12} \cap \bar{Q}_{24} \cap \bar{Q}_{45}$ . Suprimimos la fila  $x_4$  y la columna  $x_5$ . Obtenemos una matriz que se muestra en la fig. 6.8 c.

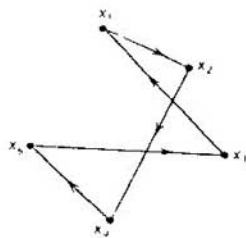
F) Es obvio que en la matriz obtenida no se requiere ninguna sustracción.

G) La frontera inferior para el vértice en E) es igual a  $16 + 0 = 16$ .

H) Tenemos la matriz de orden 1 con frontera mínima entre todos los vértices pendientes. Al agregar el arco  $(x_5, x_3)$ , obtenemos el contorno hamiltoniano buscado de valor 16:  $(x_3, x_1, x_2, x_4, x_5)$ . La solución hallada se representa en las figs. 6.9 a y 6.9 b.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	2	3	2	7
$x_2$	3	$\infty$	7	6	1
$x_3$	1	7	8	3	7
$x_4$	5	7	2	$\infty$	3
$x_5$	7	6	4	6	$\infty$

a



b

Fig. 6.9

El algoritmo obtenido permitió hallar la solución del problema planteado. Sin embargo, pueden existir otros contornos de Hamilton con el mismo valor. Esto resulta de que la elección de los vértices en algunos casos no era unívoca.

He aquí un ejemplo más que ilustra la aplicación del algoritmo de Little para la búsqueda en un grafo de 5 vértices del contorno hamiltoniano mínimo, si la matriz de valores está representada en la fig. 6.10 a. Constituyamos el bisárbol.

A) De los elementos contenidos en las filas  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  sustraemos respectivamente sus elementos mínimos: 3, 0, 5, 3, 16, y, a continuación, de la matriz obtenida (véase fig. 6.10 b) restamos de las columnas  $x_1, x_2, x_3$  1, 2, 1, respectivamente (véase fig. 6.10 c).

B) Calculamos la suma  $3 + 0 + 5 + 3 + 16 + 1 + 2 + 1 = 31$ . Por consiguiente, para el vértice  $Q$  obtenemos la frontera inferior:  $b = 31$ .

C) Pasamos al examen de todos los elementos nulos de la matriz:

$$\gamma(x_1, x_3) = 17; \gamma(x_2, x_5) = 1; \gamma(x_3, x_4) = 13; \gamma(x_4, x_5) = 16;$$

$$\gamma(x_5, x_1) = 7; \gamma(x_5, x_2) = 13; \gamma(x_5, x_3) = 16; \gamma(x_5, x_4) = 1.$$

Así pues,  $\Theta = \gamma(x_1, x_3) = 17$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	31	47	20	3
$x_2$	8	$\infty$	17	1	0
$x_3$	26	20	$\infty$	40	5
$x_4$	25	21	29	$\infty$	3
$x_5$	17	18	17	16	$\infty$

a

b

c

Fig. 6.10.



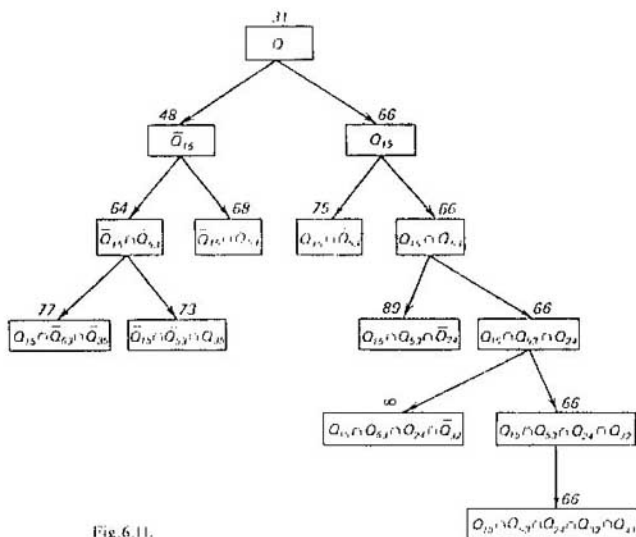


Fig. 6.11.

D) Expresamos el vértice  $Q_{15}$  del bisímbol cuya frontera inferior es igual a  $31 + 17 = 48$ .

E) Expresamos el vértice  $Q_{15}$  que se define por la propiedad  $p_{15}$  "el contorno hamiltoniano contiene el arco  $(x_1, x_3)$ ". Suprimimos en la matriz expuesta en la fig. 6.10 c la primera fila y la quinta columna, y en la célula  $(5, 1)$  ponemos  $\infty$  (véase fig. 6.12 a).

F) Sustraigamos de todos los elementos de las filas  $x_2, x_3, x_4$  de la matriz obtenida, 1, 3, 16, respectivamente, y luego, de la primera columna sustraigamos además 5 (véase fig. 6.12 b).

G) La suma de los elementos sustraídos de las filas y columnas de la matriz en el punto anterior es igual a 35. Por consiguiente, para el vértice  $Q_{15}$  la frontera inferior es igual a  $31 + 35 = 66$ .

H) En la última etapa se ha obtenido una matriz de cuarto orden. Por eso pasamos a la operación siguiente.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_2$	7	$\infty$	16	1
$x_3$	20	13	$\infty$	35
$x_4$	21	16	25	$\infty$
$x_5$	$\infty$	0	0	0

a

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_2$	1	$\infty$	15	0
$x_3$	2	0	$\infty$	22
$x_4$	0	0	9	$\infty$
$x_5$	$\infty$	0	0	0

b

Fig. 6.12.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	20	13	17	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	16	1	0
$x_3$	20	13	$\infty$	35	0
$x_4$	21	16	25	$\infty$	0
$x_5$	0	0	0	0	$\infty$

a

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	9	26	0	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	16	1	0
$x_3$	20	13	$\infty$	35	0
$x_4$	21	16	25	$\infty$	0
$x_5$	0	0	0	0	$\infty$

b

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	9	0	$\infty$	
$x_2$	7	$\infty$	1	0	
$x_3$	20	13	35	$\infty$	
$x_4$	21	16	$\infty$	0	

c

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	9	0	$\infty$	
$x_2$	0	$\infty$	1	0	
$x_3$	0	0	22	$\infty$	
$x_4$	14	16	$\infty$	0	

d

Fig. 6.13

1) El vértice pendiente de frontera mínima 48 es  $Q_{15}$ .

1) El vértice se ha obtenido con ayuda de la propiedad  $p_{15}$ . Pasamos a K).

K) En la célula (1, 5) de la matriz expuesta en la fig. 6.10 e colocamos  $\infty$ . Obtenemos una matriz que se expone en la fig. 6.13 a. A continuación sustraemos 17 de todos los elementos de la fila  $x_1$ . El resultado está representado en la fig. 6.13 b.

C) Para la matriz expuesta en la fig. 13 b calculamos:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, x_4) &= 9; \quad \gamma(x_2, x_3) = 1; \quad \gamma(x_3, x_5) = 13; \quad \gamma(x_4, x_5) = 16; \\ \gamma(x_5, x_1) &= 7; \quad \gamma(x_5, x_2) = 9; \quad \gamma(x_5, x_3) = 16; \quad \gamma(x_5, x_4) = 0, \end{aligned}$$

por lo cual tenemos, por ejemplo,  $\theta = \gamma(x_5, x_1) = 16$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	9	26	0	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	16	1	0
$x_3$	20	13	$\infty$	35	0
$x_4$	21	16	25	$\infty$	0
$x_5$	0	0	$\infty$	0	$\infty$

a

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	9	10	0	$\infty$
$x_2$	7	$\infty$	0	1	0
$x_3$	20	13	$\infty$	35	0
$x_4$	21	16	9	$\infty$	0
$x_5$	0	0	$\infty$	0	$\infty$

b

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	9	10	0	
$x_2$	7	$\infty$	0	1	
$x_3$	12	7	0	$\infty$	
$x_4$	0	0	$\infty$	0	

c

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	9	10	0	
$x_2$	7	$\infty$	0	1	
$x_3$	12	7	0	$\infty$	
$x_4$	0	0	$\infty$	0	

d

Fig. 6.14

D) Construimos el vértice  $\overline{Q}_{15} \cap \overline{Q}_{53}$ , al cual corresponde la frontera inferior  $48 + 16 = 64$ .

E) Construimos el vértice  $\overline{Q}_{15} \cap \overline{Q}_{53}$ . Suprimimos la quinta fila y la tercera columna en la matriz expuesta en la fig. 6.13 b, y en la célula (3, 5) colocamos  $\infty$ . El resultado se muestra en la fig. 6.13 c).

F) De todos los elementos de la fila  $x_3$  sustraemos primero 13, y luego de la primera columna sustraemos 7 (véase fig. 6.13 d)

G) La suma de los elementos sustraídos de las filas y columnas en F) es igual a  $13 + 7 = 20$ . Por consiguiente, para el vértice  $\overline{Q}_{15} \cap \overline{Q}_{53}$  tenemos la frontera igual a  $48 + 20 = 68$ .

H) Pasamos a I).

I) El vértice pendiente  $\overline{Q}_{15} \cap \overline{Q}_{53}$  tiene el valor mínimo de la frontera inferior.

J) El vértice elegido correspondía, al construir el bisárbol, a la propiedad  $\overline{p}_{53}$ . El valor dentro de la célula (5, 3) en la matriz expuesta en la fig. 6.13 b se sustituye por  $\infty$ , y de todos los elementos de la columna  $x_3$  se resta el número 16. El resultado se muestra en la fig. 6.14 b). Pasamos a C).

C) Para todos los elementos nulos de la matriz en la fig. 6.14 b calculamos:

$$\gamma(x_1, x_4) = 9; \gamma(x_2, x_3) = 9; \gamma(x_2, x_5) = 0; \gamma(x_3, x_5) = 13;$$

$$\gamma(x_4, x_5) = 9; \gamma(x_5, x_1) = 7; \gamma(x_5, x_2) = 9; \gamma(x_5, x_4) = 0.$$

De aquí,  $\Theta = \gamma(x_3, x_5) = 13$ .

D) Construimos el vértice  $Q_{15} \cap \overline{Q}_{51} \cap \overline{Q}_{35}$ , al cual corresponde la frontera inferior  $64 + 13 = 77$ .

E) Para construir el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{35}$  suprimimos la fila  $x_3$  y la columna  $x_5$ . Observemos que aquí no hay necesidad de colocar  $\infty$  en la célula (5, 3), puesto que ella ya se encuentra allí. El resultado se muestra en la fig. 6.14 c).

F) De todos los elementos de la fila  $x_4$  sustraemos el número 9 y obtendremos una matriz expuesta en la fig. 6.14 d).

G) Para el vértice  $\overline{Q}_{15} \cap Q_{53} \cap \overline{Q}_{35}$  tenemos una frontera inferior igual a  $64 + 9 = 73$ .

H) Se ha obtenido la matriz de orden 4. Por eso pasamos a I).

I) Entre los vértices pendientes del bisárbol ya construido el  $Q_{15}$  tiene frontera inferior mínima.

J) Por cuanto el vértice elegido  $Q_{15}$  correspondía durante la construcción a la propiedad  $p_{15}$ , pasamos a C).

C) Para la matriz expuesta en la fig. 6.12 b calculamos:

$$\gamma(x_5, x_4) = 0; \gamma(x_2, x_4) = 1; \gamma(x_3, x_2) = 2; \gamma(x_4, x_1) = 1;$$

$$\gamma(x_4, x_2) = 0; \gamma(x_5, x_2) = 0; \gamma(x_5, x_3) = 9. \text{ De aquí, } \Theta = \gamma(x_5, x_3) = 9.$$

D) Construimos el vértice  $Q_{15} \cap \overline{Q}_{53}$ , al cual corresponde la frontera inferior  $66 + 9 = 75$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1$	1	$\infty$	0
$x_2$	$\infty$	0	22
$x_3$	0	0	$\infty$

*a*

	$x_1$	$x_2$
$x_1$	$\infty$	0
$x_2$	0	$\infty$

*b*

	$x_1$
$x_1$	0

*c*

Fig. 6.15

E) Construimos el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53}$ . Con este fin suprimimos la fila  $x_3$  y la columna  $x_3$  en la matriz expuesta en la fig. 6.12 b, y colocamos  $\infty$  en la célula (3, 1), puesto que la inclusión del arco  $(x_3, x_1)$  conduce a la aparición del contorno  $x_1, x_5, x_3, x_1$ , que no es hamiltoniano. El resultado se presenta en la fig. 6.15 a.

F) Todas las filas y columnas de la matriz expuesta en la fig. 6.15 a contienen ceros.

G) Por consiguiente, para el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53}$  tenemos una frontera inferior igual a 66.

H) Se ha obtenido la matriz de orden 3. Pasamos a I).

I) El vértice pendiente de frontera inferior mínima es  $Q_{15} \cap Q_{53}$ .

J) El vértice  $Q_{15} \cap Q_{53}$  se ha obtenido con ayuda de la propiedad  $p_{53}$ . Pasamos a C).

C) Calculamos  $\gamma$  para todos los elementos nulos de la matriz expuesta en la fig. 6.15 a:  $\gamma(x_2, x_4) = 23$ ;  $\gamma(x_1, x_2) = 22$ ;  $\gamma(x_3, x_1) = 1$ ;  $\gamma(x_4, x_2) = 0$ . De aquí  $\Theta = \gamma(x_2, x_4) = 23$ .

D) Construimos el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap \bar{Q}_{24}$ , cuya frontera inferior es igual a  $66 + 23 = 89$ .

E) Construimos el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{24}$ . Suprimimos en la matriz expuesta en la fig. 6.15 a la fila  $x_2$  y la columna  $x_4$ , sustituyendo el valor en la célula (4, 2) por  $\infty$ . Obtenemos una matriz que se expone en la fig. 6.15 b.

F) Cada fila y cada columna de la matriz obtenida contiene ceros.

G) La frontera inferior para el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{24}$  es igual a 66.

H) Se ha obtenido la matriz de orden 2. Pasamos a I).

I) La frontera inferior mínima la tiene el vértice pendiente  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{24}$ .

J) El vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{24}$  se ha obtenido con ayuda de la propiedad  $p_{24}$ . Por eso, pasamos a C).

C) Calculamos:  $\gamma(x_3, x_2) = \infty$ ;  $\gamma(x_4, x_1) = \infty$ . Quiere decir,  $\Theta = \gamma(x_3, x_2) = \infty$ .

D) Construimos el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{24} \cap \bar{Q}_{32}$ . La frontera para dicho vértice es igual al infinito ( $\infty$ ).

E) Construimos el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{24} \cap Q_{32}$ . Suprimimos la fila  $x_3$  y la columna  $x_2$ . Obtenemos la matriz expuesta en la fig. 6.15 c.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$\infty$	31	47	20	3
$x_2$	8	$\infty$	17	1	0
$x_3$	26	20	$\infty$	40	5
$x_4$	25	21	29	$\infty$	3
$x_5$	17	18	17	16	$\infty$

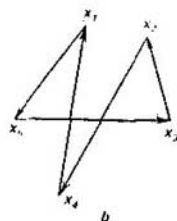


Fig. 6.16.

F) Es obvio que en la matriz obtenida no hay necesidad de sustraer nada.

G) La frontera inferior para el vértice en E) es igual a  $66 + 0 = 66$ .

H) La matriz obtenida es de orden 1, y el vértice  $Q_{15} \cap Q_{53} \cap Q_{24} \cap Q_{32}$  tiene una frontera inferior mínima entre todos los vértices pendientes del bisárbol. Agregando el arco  $(x_4, x_1)$ , obtenemos el contorno hamiltoniano buscado de longitud 66:  $(x_1, x_5, x_3, x_2, x_4, x_1)$ . La solución hallada está representada en la fig. 6.16 a y b.

No es difícil modificar el algoritmo de Little para resolver los problemas referentes a la búsqueda del contorno hamiltoniano de valor máximo. No obstante, al cambiar un tanto las condiciones, reduzcamos el problema al tipo ya analizado.

Agreguemos el símbolo  $(-\infty)$  a todos los pares de vértices  $(x_i, x_j)$ , para los cuales en el grafo  $G = (X, U)$  no hay arco  $(x_i, x_j)$ . Sea  $[c_{ij}]$  una matriz de valores del grafo  $G = (X, U)$ ,  $|X| = n$ . Construyamos una matriz nueva cuyos elementos los hallamos por la fórmula

$$c'_{ij} = C - c_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \text{ donde } C = \max_{i,j} c_{ij}.$$

Apliquemos ahora a la matriz  $[c'_{ij}]$  el algoritmo de Little para determinar los contornos hamiltonianos mínimos. La solución mínima obtenida nos ofrece la solución máxima para la matriz  $[c_{ij}]$ .

### 6.3. MÉTODOS HEURÍSTICOS

Los métodos exactos de optimización mencionados más arriba requieren, por regla general, unos cálculos muy voluminosos. Por eso, tiene gran importancia práctica la creación de métodos sencillos que aseguran la obtención de soluciones, que son bastante próximas a las óptimas. Los métodos que no prevén la estimación de la proximidad de las soluciones obtenidas a las óptimas suelen llamarse *heurísticos*. Un método se llama *aproximado*, si admite la posibilidad de estimar la desviación de una solución de la óptima. Naturalmente, el método heurístico puede pasar al orden de aproximado tras un exitoso análisis teórico.

En los métodos heurísticos con mayor frecuencia se emplea la llamada optimización local.

Sea un conjunto de combinaciones  $P = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N\}$ ; se plantea el problema de calcular el mínimo de la función  $F$ , definida en este conjunto, y buscar las combinaciones sobre las cuales dicho mínimo se alcanza. El método de optimización local consiste en lo siguiente.

Para cada combinación  $\pi_i \in P$  definamos un conjunto  $Q_i$  de combinaciones que se llamarán vecinas de  $\pi_i$ . En el lenguaje de la teoría de los grafos esto significará lo siguiente: a cada combinación  $\pi_i$  se le hace corresponder cierto vértice del grafo  $G$ . Los vértices vecinos  $\pi_i$  y  $\pi_j$  del grafo  $G$  se unen con arco  $(i, j)$  ( $\pi_j \in Q_i$ ). El grafo obtenido se denominará grafo de vecindad de las combinaciones. En el grafo  $G$  puede haber una totalidad  $Z$  de sus vértices, en la cual

$$F(\pi_i) = F(\pi_j), \text{ siempre que } \pi_i, \pi_j \in Z;$$

$$F(\pi_i) < F(\pi_j), \text{ siempre que } \pi_i \in Z; \pi_j \notin Z; (i, j) \in U.$$

donde  $U$  es el conjunto de arcos del grafo de vecindad. Tal conjunto  $Z$  se llama aislado. Este conjunto puede estar compuesto, por supuesto, de un solo vértice.

El primer paso del acceso local, del cual se trata aquí, consiste en que, al elegir una combinación arbitraria  $\pi_i$ , hallar para ella el grafo de vecindad, después de lo cual determinar en este grafo los valores de  $F(\pi_j)$  para cualquier  $\pi_j \in Q_i$ .

La segunda etapa consiste en una operación a la que se acostumbra llamar descenso. Encontramos  $\pi_{j_0} \in Q_i$  de tal manera que

$$F(\pi_{j_0}) = \min_{\pi_j \in Q_i} F(\pi_j),$$

y si  $F(\pi_{j_0}) < F(\pi_i)$ , pasamos a la combinación  $\pi_{j_0}$ .

Procediendo de esta manera, llegaremos a un conjunto aislado tras un número finito de pasos. Sin embargo, ya encontrándonos en un conjunto aislado, no podemos estar seguros de que se ha alcanzado precisamente un extremo local (mínimo, en el caso dado), y no el general. Por eso tenemos que continuar las "pruebas" locales. Uno de los métodos de continuación de la búsqueda puede ser la elección de una nueva combinación admisible y la repetición de la operación de descenso en el antiguo grafo de vecindad. Son posibles también otros métodos. Definamos, por ejemplo, una sucesión de grafos de vecindad  $G_1, G_2, \dots, G_s$  (grafos de 1-, 2-, ...,  $s$ -vecindad). Después de caer en  $G_1$  sobre un conjunto aislado de vértices  $Z$ , pasamos al grafo  $G_2$  partiendo de un vértice arbitrario  $\pi_i \in Z$ . Si  $Z$  queda aislado también en  $G_2$ , pasamos a  $G_3$ , etc. Si resulta posible el descenso del vértice  $\pi_i$  al conjunto aislado  $Z_1$ , entonces, al pasar a algún vértice  $\pi_j \in Z_1$ , volveremos al grafo  $G_1$  y repetiremos el proceso, partiendo esta vez del vértice  $\pi_j$ .

En el procedimiento descrito hay muchas cosas indeterminadas. Sobre

todo no está claro cómo se deben construir los grafos de vecindad y por qué dicha construcción es mejor que la elección aleatoria de las combinaciones. La experiencia muestra, no obstante, que la obtención de las combinaciones vecinas es, a veces, más fácil que construir las sucesiones aleatorias. El análisis de un problema concreto lleva frecuentemente al método de determinación de las combinaciones vecinas que asegura el descenso eficaz hacia una solución óptima o, en todo caso, bastante buena.

Veamos algunos ejemplos de determinación de la vecindad.

1. Si las combinaciones son simplemente permutaciones, entonces las combinaciones vecinas se definen como obtenidas por conmutación de los elementos próximos. Llamemos combinaciones 1-vecinas aquellas que se obtienen por conmutación de dos elementos vecinos; combinaciones 2-vecinas, aquellas que se obtienen por conmutación de dos elementos que ocupan los lugares pares o impares, etc. Por ejemplo, una permutación  $\pi_1 = (1, 2, 3, 4)$  tiene cuatro combinaciones 1-vecinas:  $\pi_2 = (2, 1, 3, 4)$ ,  $\pi_3 = (1, 3, 2, 4)$ ,  $\pi_4 = (1, 2, 4, 3)$  y  $\pi_5 = (4, 2, 3, 1)$  (los elementos 1 y 4 también se consideran vecinos) y dos combinaciones 2-vecinas:  $\pi_6 = (3, 2, 1, 4)$ ,  $\pi_7 = (1, 4, 3, 2)$ . Con tal definición las combinaciones 3-vecinas y 1-vecinas coinciden.

En el caso general, las combinaciones 2-vecinas se definen del modo siguiente:  $\pi_i$  es una combinación 2-vecina para  $\pi_j$ , si existe  $\pi_k$  tal que  $\pi_i$  es una combinación 1-vecina para  $\pi_k$ , y  $\pi_k$  es una combinación 1-vecina para  $\pi_j$ . Análogamente se introducen las combinaciones 3-vecinas, etc.

2. En los problemas 1 y 6 del § 6.1 se ha estudiado la cuestión sobre el nombramiento óptimo y sobre la parada mínima de una línea de montaje. En dichos problemas el valor de  $F$  estaba definido como  $\max F_j$  para cada tramo del transportador. Los tramos, para los cuales  $F_i = \max F_j$  se llamarán críticos. En tal caso resulta natural definir las combinaciones vecinas del modo siguiente: la combinación  $\pi_i$  es 1-vecina para  $\pi_j$  si puede obtenerse de  $\pi_j$  por conmutación de dos operaciones, una de las cuales está designada para el tramo crítico y la otra, no.

Veamos, por ejemplo, el esquema del problema 6 (fig. 6.2) una vez más. Para la solución  $R^0 = (1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9)$  obtendremos:  $F_1 = 21$ ;  $F_2 = 16$ ;  $F_3 = 14$ ;  $F = 21$ . Resultó ser crítico el primer tramo. Las permutaciones son admisibles sólo entre las operaciones de los tramos primero y segundo. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 R^1 &= (1, 2, 4; 3, 5, 6; 7, 8, 9); & F_1 &= 17; & F_2 &= 20; & F_3 &= 14; & F &= 20; \\
 R^2 &= (1, 3, 4; 2, 5, 6; 7, 8, 9); & F_1 &= 19; & F_2 &= 18; & F_3 &= 14; & F &= 19; \\
 R^3 &= (1, 3, 6; 2, 4, 5; 7, 8, 9); & F_1 &= 22; & F_2 &= 18; & F_3 &= 14; & F &= 22; \\
 R^4 &= (2, 3, 6; 1, 4, 5; 7, 8, 9); & F_1 &= 21; & F_2 &= 16; & F_3 &= 14; & F &= 21.
 \end{aligned}$$

En la solución  $R^2$  el primer tramo quedó crítico pero el análisis de las soluciones vecinas no mejora la situación, pues son admisibles sólo las permuta-

ciones de los dos primeros tramos, mientras que el segundo tramo tiene el tiempo de trabajo  $F_2 = 18$ , próximo al tiempo crítico  $F = 19$ . Para disminuir  $F_2$ , estudiemos las permutaciones admisibles de las operaciones destinadas para los tramos segundo y tercero.

Se tienen dos permutaciones admisibles de las operaciones 6, 7 y de las 5, 7. Las combinaciones correspondientes son:

$$R^5 = (1, 3, 4; 2, 5, 7; 6, 8, 9); \quad F_1 = 19; \quad F_2 = 14; \quad F_3 = 18; \quad F = 19;$$

$$R^6 = (1, 3, 4; 2, 6, 7; 5, 8, 9); \quad F_1 = 19; \quad F_2 = 16; \quad F_3 = 16; \quad F = 19.$$

En ambas soluciones,  $R^5$  y  $R^6$ , el valor de  $F_2$  disminuyó. Realicemos la siguiente etapa del descenso, al tomar, por ejemplo, la solución  $R^6$ . Las soluciones vecinas de la misma son:

$$R^7 = (1, 2, 3; 4, 6, 7; 5, 8, 9); \quad F_1 = 21; \quad F_2 = 14; \quad F_3 = 16; \quad F = 21;$$

$$R^8 = (1, 2, 4; 3, 6, 7; 5, 8, 9); \quad F_1 = 17; \quad F_2 = 18; \quad F_3 = 16; \quad F = 18;$$

$$R^9 = (1, 3, 6; 2, 4, 7; 5, 8, 9); \quad F_1 = 22; \quad F_2 = 13; \quad F_3 = 16; \quad F = 22.$$

Demostremos que la solución  $R^6$  es óptima. Con este fin veamos la aplicación del método de ramificaciones y restricciones al problema 6b del § 6.1. Definamos el proceso de ramificaciones del modo siguiente. Supongamos predestinadas las operaciones para  $k$  tramos, es decir, están definidos  $R_1, R_2, \dots, R_k$  conjuntos. Llamemos el conjunto  $R_{k+1}$  admisible, si: 1) la designación del conjunto de operaciones  $R_{k+1}$  en el  $(k+1)$ -ésimo tramo no perturba la sucesión del montaje; 2)  $\sum_{i \in R_{k+1}} t_i \leq C$  ( $C$  es la duración prefijada del ciclo); 3) no existe un conjunto  $R'$  tal, que  $R_{k+1} \subseteq R'$ ,

que satisfaga las condiciones 1 y 2. La estimación desde abajo del número de tramos para cualquier subconjunto de soluciones tiene la forma:  $\varphi(R_1, \dots,$

$$R_k) = k + \frac{1}{C} \sum_{i \in R_k} t_i, \text{ donde } R(k) \text{ es el conjunto de operaciones por ahora}$$

no designadas.

Tomemos en nuestro ejemplo  $C = 17$ . Para la designación de las operaciones en el primer tramo hay cinco posibilidades:

$$R_1^1 = (1, 4, 7); \quad \varphi(R_1^1) = 1 + \frac{37}{17} = 3 \frac{3}{17};$$

$$R_1^2 = (1, 2, 4); \quad \varphi(R_1^2) = 1 + \frac{34}{17} = 3;$$

$$R_1^3 = (1, 3); \quad \varphi(R_1^3) = 1 + \frac{36}{17} = 3 \frac{2}{17};$$

$$R_1^4 = (3, 6); \quad \varphi(R_1^4) = 1 + \frac{36}{17} = 3 \frac{2}{17};$$

$$R_1^5 = (2, 3); \quad \varphi(R_1^5) = 1 + \frac{37}{17} = 3 \frac{3}{17};$$



Elegimos  $R_1^2 = (1, 2, 4)$ . Admitamos las siguientes designaciones para el segundo tramo:

$$R_2^1 = (3, 5; 7); \varphi(R_1^2, R_2^1) = 2 + \frac{18}{17} = 3 \frac{1}{17};$$

$$R_2^2 = (3, 6); \varphi(R_1^2, R_2^2) = 2 + \frac{19}{17} = 3 \frac{2}{17}.$$

De aquí concluimos que para  $C = 17$  no son suficientes tres tramos, lo que confirma el carácter óptimo de la solución elegida  $R^B$  del problema 6a.

**Ejercicio.** Muéstrase que si  $C = 17$ , en el problema 6b es óptima la designación de las operaciones para 4 tramos. Hállense dichas designaciones.

Veamos cómo se aplica la optimización local al problema del viajante de comercio. Tenemos un conjunto  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  de ciudades y la matriz de valores  $C = [c_{ij}]$  del traslado de una ciudad  $a_i$  a otra ciudad  $a_j$ . En cada paso del algoritmo construiremos una ruta  $A_r = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$  a base del  $r$ -subconjunto del conjunto  $A$ ;  $r = 1, 2, \dots, n$ . Además consideramos que tiene lugar el traslado de la ciudad  $a_{i_k}$  a la ciudad  $a_{i_{k+1}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, r-1$ , y de la ciudad  $a_{i_r}$  a la  $a_{i_1}$ . Tomamos para  $r = 1$ :  $A_1 = (a_i)$  (la ruta consta de una ciudad arbitrariamente elegida  $a_i$ ). Si  $A_r$  está construido, buscamos en el siguiente paso la ciudad  $a_i \in (A \setminus A_r)$  tal que  $\varrho(a_i, A_r) = \min_{a_j \in (A \setminus A_r)} \varrho(a_j, A_r)$ , donde con  $\varrho(a_i, A_r)$  se denota la "distancia" desde  $a_i$  hasta  $A_r$ :  $\varrho(a_i, A_r) = \min\{c_{ij} | a_j \in A_r\}$ . En este caso, si  $\varrho(a_i, a_2) = C_{i_1, i_2}$  para  $a_{i_1} \in A_r$ , entonces se toma  $A_{r+1} = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r}, a_i, a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ . El algoritmo construido se denomina algoritmo de inclusión de la ciudad más próxima.

**Ejercicio.** Muéstrase que el algoritmo de inclusión de la ciudad más próxima puede ser realizado mediante un número de operaciones proporcional a  $n^2$ .

**Teorema I.** Supongamos que la  $(n \times n)$ -matriz de valores  $C$  en el problema del viajante de comercio es simétrica y satisface la desigualdad triangular:  $c_{ik} + c_{kj} \geq c_{ij}$  ( $i, j, k = 1, \dots, n$ ). Entonces

$$\frac{|I_n|}{|O_n|} < 2,$$

donde  $I_n$  es la ruta prefijada por el algoritmo de inclusión de la ciudad más próxima;  $O_n$ , la ruta óptima;  $|I_n|$  y  $|O_n|$  son sus valores sumarios.

**Demostración.** Supongamos que las ciudades  $a_1, a_2, \dots, a_n$  están enumeradas de un modo tal que en el  $i$ -ésimo paso del algoritmo se le agrega a la ruta la ciudad  $a_i$ . Demostraremos el teorema estableciendo una correspondencia biunívoca entre las ciudades  $a_2, \dots, a_n$  y todas las aristas en  $O_n$  (a excepción de la arista mayor) de un modo tal que el valor de inclusión de la ciudad  $a_k$  entre  $a_i$  y  $a_j$ , es decir,  $c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$  (para que el primer paso sea correcto, tomamos  $c_{ij} = 0$ ), no sobrepase el valor duplicado de la arista en  $O_n$ , que corresponde a  $a_k$ . Obtendremos en realidad una estimación más fuerte que la indicada en la formulación:  $|I_n| \leq 2(|O_n| - l_{\max})$ , donde  $l_{\max}$  es la arista de mayor longitud en  $O_n$ .

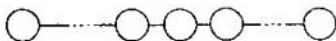


Fig.6.17.

Estudiemos en cada paso del algoritmo no sólo la ruta corriente  $a_1, \dots, a_t, 1 \leq t \leq n$ , sino también algunas aristas adicionales de  $O_n \setminus \{I_{\max}\}$  que unen las ciudades  $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_n$  con el itinerario corriente. En el primer paso el itinerario consta de la ciudad  $a_1$  e incluye todas las aristas en  $O_n$ , a excepción de la  $I_{\max}$  (véase fig. 6.17).

Supóngase que en el  $(k-1)$ -ésimo paso tenemos la ruta  $a_1, \dots, a_{k-1}$  (en la fig. 6.18 se indica con una línea gruesa) con ciudades agregadas a ella  $a_k, \dots, a_n$  con ayuda de las "piernas" (aristas dibujadas en línea no gruesa); una construcción de esta índole se llamará arácnea.

Admitamos que la ciudad  $a_k$ , que ha de ser incluida en la ruta en el  $k$ -ésimo paso, es la más próxima a la ciudad  $a_m$  perteneciente a la ruta (véase fig. 6.18). El valor de inclusión de  $a_k$  entre  $a_m$  y la siguiente ciudad  $a_t$ , es igual a  $c_{tk} + c_{km} - c_{tm}$ . Sea  $a_x$  un punto de la ruta al cual se une la pierna que incluye  $a_k$ , y sea  $(a_x, a_y)$  la primera arista de dicha pierna (puede ser que  $a_y = a_k$ ). Por cuanto  $a_k$  es una ciudad próxima a la ruta, tenemos

$$c_{mk} \leq c_{xy}. \quad (1)$$

Según la desigualdad triangular, tenemos

$$c_{tk} \leq c_{tm} + c_{mk}. \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos

$$c_{tk} \leq c_{tm} + c_{xy}. \quad (3)$$

Al adicionar (1) y (3) y al hacer uso de la simetría de la matriz  $C$ , obtenemos

$$c_{tk} + c_{km} \leq c_{tm} + 2c_{xy}.$$

lo que es equivalente a la desigualdad

$$c_{tk} + c_{km} - c_{tm} \leq 2c_{xy}.$$

es decir, la inclusión de  $a_k$  entre  $a_t$  y  $a_m$  cuesta  $2c_{xy}$  como máximo. Incluida  $a_k$ , suprimimos la arista  $(a_x, a_y)$  de la configuración (la construcción sigue siendo arácnea). A la ciudad  $a_k$  se le hace corresponder la arista  $(a_x, a_y)$ . Después que el algoritmo pasa por todas las ciudades  $a_2, \dots, a_n$ , se establece la correspondencia requerida entre  $\{a_2, \dots, a_n\}$  y  $O_n \setminus \{I_{\max}\}$ , lo que demuestra el teorema.

Mostremos ahora que se tiene un problema del viajante de comercio con  $n$  ciudades ( $n \geq 6$ ), para el cual el algoritmo de inclusión de la ciudad más próxima proporciona una ruta que es dos veces mayor que la óptima. Veamos la siguiente matriz de valores  $C$ :  $c_{ij} = c_{ji} = \min(j-i, n-j+i)$ , es decir  $c_{ij}$  es la longitud de la ruta más corta de  $i$  a  $j$ , que va por las aristas del tipo  $(k, (k+1) \pmod n)$ . Para  $n=8$ , esta configuración viene expuesta en la fig. 6.19.

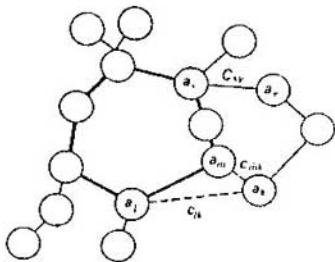


Fig. 6.18.

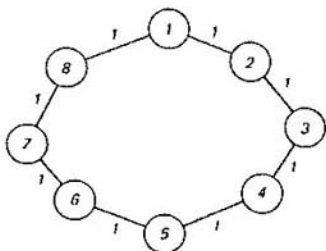


Fig. 6.19.

Demostremos que la ruta  $T_n$  compuesta por las aristas  $(1, 2)$ ,  $(n-1, n)$  y  $(i, i+2)$  para  $1 \leq i \leq n-2$  (en la fig. 6.20 se muestra la ruta  $T_8$ ), puede obtenerse como resultado de aplicar el algoritmo de inclusión de la ciudad más próxima. Observemos que el algoritmo puede aplicarse a partir de la ciudad 1, luego se agrega a ésta la ciudad 2, la ciudad 3, etc. Sea  $T_k$ ,  $3 \leq k \leq n$  la ruta obtenida con ayuda de este algoritmo después de la inclusión de la ciudad  $k$ . Mostremos por inducción que  $T_k$  consta de las aristas  $(1, 2)$ ,  $(k-1, k)$  y  $(i, i+2)$  para  $1 \leq i \leq k-2$ . Cuando  $k=3$ , esto es evidente. Suponiendo que esto es cierto para  $3 \leq i \leq k$ , observemos que  $T_{k+1}$  se obtiene de  $T_k$  por inclusión de la ciudad  $k+1$  entre las ciudades  $k-1$  y  $k$ .

La longitud de la ruta  $T_n$  es igual a  $2n-2$ , mientras que la ruta óptima  $O_n$ , compuesta por las aristas  $(1, n)$  y  $(i, i+1)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , tiene una longitud igual a  $n$ . Por eso tenemos

$$\frac{|T_n|}{|O_n|} = 2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Esta relación es la máxima que se admite por el teorema, puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|T_n|}{|O_n|} = 1$ .

La investigación teórica de la optimización local se realiza también con ayuda de los métodos teórico-probabilísticos. Con este fin en el conjunto de problemas que se resuelven por el algoritmo local dado se introduce una medida probabilística y se demuestra que con el crecimiento de la dimensión del problema, la medida de los problemas cuyas soluciones se desvían de la solución óptima en una magnitud superior a  $\epsilon$ , tiende a 0, cuando la dimensión del problema crece. Tal comportamiento de las soluciones lleva el nombre de optimalidad asintótica. La optimalidad asintótica está demostrada para muchos algoritmos de solución del problema del viajante de comercio, en particular, para el más sencillo de ellos, cuando en cada paso se supone ir a la ciudad que está más próxima a aquella, en la que el viajante de comercio se encuentra en el momento dado. El lector puede encontrar una información más completa en [26].

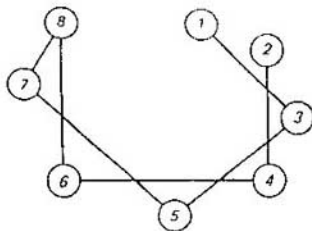


Fig. 6.20.

Un tipo más de algoritmos heurísticos de optimización está relacionado con la elección aleatoria de las combinaciones conforme a cierta distribución probabilística que se elige a partir de los razonamientos de obtención más probable de las combinaciones deseables. Para datos más detallados véase [81].

**"Algoritmo ávido"**. Veamos un conjunto finito  $S$ , a cada elemento del cual  $s$  está asignado cierto número no negativo  $w(s)$ , llamado peso de  $s$ . El peso del subconjunto  $A \subseteq S$  se determina como suma de pesos de todos los elementos de  $A$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos del conjunto  $S$ .

Varios problemas de la optimización combinatoria se reducen al problema siguiente: hallar en la familia  $\mathcal{F}$  un subconjunto de peso máximo. Por ejemplo, a este tipo de problemas se reduce el problema de hallar el esqueleto (o el bosque) de peso máximo en un grafo ponderado  $G$ , si  $\mathcal{F}$  es un juego de todos los esqueletos (bosques) del grafo  $G$ .

Para resolver este problema resulta natural aplicar el siguiente algoritmo que se denomina "ávido" (greedy, en inglés). Este es como sigue:

*Paso 1.* Se elige un elemento  $s_1$  tal que  $\{s_1\} \in \mathcal{F}$ , y  $w(s_1) \geq w(s)$  para todos aquellos  $s$  que  $\{s\} \in \mathcal{F}$ . Si tal  $s_1$  no existe, entonces tenemos una parada (indisponibilidad).

*Paso 2.* Se elige un elemento  $s_2$  tal que  $\{s_1, s_2\} \in \mathcal{F}$ , y  $w(s_2) \geq w(s)$  para todos aquellos  $s \neq s_1$  que  $\{s_1, s_2\} \in \mathcal{F}$ . Si tal  $s_2$  no existe, entonces tenemos una parada.

*Paso  $k$ .* Se elige tal elemento  $s_k$ , distinto de  $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ , que  $\{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k\} \in \mathcal{F}$ , y  $w(s_k)$  sea máximo entre todos los  $s$  de este tipo. Si tal  $s_k$  no existe, tenemos una parada.

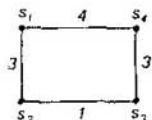
Es obvio que el algoritmo "ávido" finaliza su trabajo al obtener un subconjunto de la familia  $\mathcal{F}$  que sea máximo por inclusión. Sin embargo, dicho subconjunto puede tener en  $\mathcal{F}$  un peso no máximo. En efecto, si  $S = \{a, b, c, d\}$ ,  $w(a) = 4$ ,  $w(b) = 3$ ,  $w(c) = 2$ ,  $w(d) = 2$ , y  $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$ , entonces, sirviéndonos del algoritmo "ávido", obtendremos el subconjunto  $\{a, c\}$  cuyo peso es igual a 6, aunque el subconjunto de peso máximo es  $\{b, c, d\}$  y el peso de éste es igual a 7. Al mismo tiempo, si cambiamos los pesos, poniendo  $w(a) = 6$ ,  $w(b) = 3$ ,  $w(c) = 2$ ,  $w(d) = 2$ , el algoritmo "ávido" nos ofrece de nuevo el subconjunto  $\{a, c\}$  de peso 9, que esta vez ya es un subconjunto de peso máximo.

El algoritmo "ávido" merece, obviamente, su nombre. Tiene una constante aspiración de incluir en un subconjunto de la familia  $\mathcal{F}$  el elemento de peso máximo posible. No lo hace sólo en el caso en que, al agregar tal elemento, el subconjunto se hace inadmisibles, es decir, no pertenecerá a  $\mathcal{F}$ .

Estudiamos la correlación existente entre la solución obtenida por el algoritmo "ávido" y la estructura de la familia  $\mathcal{F}$ .

Un par  $(S, \mathcal{F})$  se llama *sistema de conjuntos*, si partiendo de que  $A \in \mathcal{F}$ ,  $A' \subseteq A$  se deduce que  $A' \in \mathcal{F}$ . Los elementos de la familia  $\mathcal{F}$  se denominan en este caso *conjuntos independientes*.

Se puede comprobar que con ayuda del algoritmo "ávido" se puede hallar en un grafo ponderado el bosque de peso máximo. Al mismo tiempo, el algoritmo "ávido" no trabaja para el problema sobre una combinación de pares máxima para el grafo. En efecto, el algoritmo "ávido", aplicado a un grafo ponderado  $G$ :



daría la combinación de pares  $\{(s_1, s_4), (s_2, s_3)\}$ , mientras que la combinación de pares máxima ponderada en  $G$  es  $\{(s_1, s_2), (s_1, s_4)\}$ .

El análisis de los sistemas de conjuntos que son distintos por su naturaleza y origen, pero que poseen la propiedad de que el algoritmo "ávido" resuelve los correspondientes problemas combinatorios de la optimización nos conduce a la siguiente definición.

Un sistema de conjuntos  $M = (S, \mathcal{I})$  se denomina *matroide*, si el algoritmo "ávido" resuelve correctamente cualquier problema combinatorio concreto referente a la optimización para el sistema  $M$ .

**Teorema 2.** Sea  $M = (S, \mathcal{I})$  un sistema de conjuntos. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- 1)  $M$  es un matroide;
- 2) si  $F_1, F_2 \in \mathcal{I}$  donde  $|F_1| = p$ , y  $|F_2| = p + 1$ , existe un elemento  $s \in F_2 - F_1$  tal que  $F_1 \cup \{s\} \in \mathcal{I}$ ;
- 3) si  $A_1$  y  $A_2$  son subconjuntos independientes, máximos por inclusión, del conjunto  $A$ , entonces  $|A_1| = |A_2|$ .

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Sea  $M$  un matroide, pero se supone que la afirmación 2 del teorema no se cumple, es decir, existen dos subconjuntos independientes  $F_1, F_2 \in \mathcal{I}$  tales que  $|F_1| = p$ ,  $|F_2| = p + 1$ , y el subconjunto  $F_1 \cup \{s\} \notin \mathcal{I}$ , cualquiera que sea  $s \in F_2 - F_1$ . Supongamos que la función ponderal sobre el conjunto  $S$  viene dada del modo siguiente:

$$w(s) = \begin{cases} p + 2, & \text{si } s \in F_1; \\ p + 1, & \text{si } s \in F_2 - F_1; \\ 0, & \text{si } s \notin F_1 \cup F_2. \end{cases}$$

Entonces, el conjunto independiente  $F_1$  no es óptimo, es decir, no posee máximo. Efectivamente,  $w(F_2) \geq (p+1)^2 > p(p+2) = w(F_1)$ . El algoritmo "ávido" para este problema concreto empezará por la elección de todos los elementos del conjunto  $F_1$ , puesto que estos elementos son de peso máximo. A continuación, el algoritmo "ávido" no podrá aumentar el peso total, ya que para todos los elementos restantes  $s$  o bien  $F_1 \cup \{s\} \in \mathcal{F}$ , si  $s \in F_2$ , o bien  $w(s) = 0$ . Por consiguiente, el algoritmo "ávido" da una solución no óptima de  $F_1$ , por lo cual  $M$  no es un matroide, lo que contradice nuestra suposición. Por lo tanto, la afirmación 2 se cumple y la implicación en consideración queda demostrada.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Supongamos que la afirmación 2 del teorema se cumple y sean  $A_1$  y  $A_2$  dos subconjuntos independientes, máximos por inclusión, del conjunto  $A \subseteq S$ . Admitamos que  $|A_1| < |A_2|$ . Rechacemos  $|A_2| < |A_1| - 1$  elementos del conjunto  $A_2$ . Entonces, por ser el sistema  $\mathcal{F}$  cerrado respecto de la inclusión, obtendremos un subconjunto independiente  $A_3 \subseteq A$  tal que  $|A_3| = |A_1| + 1$ . En virtud de la afirmación 2 del teorema, existe un elemento  $s \in A_3 - A_1$  tal que  $A_1 \cup \{s\} \in \mathcal{F}$ . Por consiguiente, el subconjunto  $A_1$  no es un subconjunto independiente, máximo por inclusión, del conjunto  $A$ . La contradicción obtenida demuestra la implicación requerida.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Supongamos que tiene lugar la afirmación 3 del teorema. Mostremos que en este caso el algoritmo "ávido" resuelve el problema de la optimización combinatoria sobre el sistema de conjuntos  $M$ . Admitamos que esto no es así, es decir, para cierto conjunto de pesos  $w(s)$ , donde  $s \in S$ , el algoritmo "ávido" lleva a un conjunto independiente  $F = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$ , mientras que existe un conjunto  $F' = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_j\}$  tal que  $w(F') > w(F)$ . Sin restringir la generalidad de los razonamientos podemos considerar que los elementos de los conjuntos  $F$  y  $F'$  están ordenados de tal modo que  $w(s_1) \geq w(s_2) \geq \dots \geq w(s_i)$  y  $w(s'_1) \geq w(s'_2) \geq \dots \geq w(s'_j)$ . Podemos considerar evidentemente, que  $F'$  es un subconjunto independiente, máximo por inclusión, del conjunto  $S$ . Según la construcción, el subconjunto  $F'$  es también subconjunto del conjunto  $S$ , máximo por inclusión. Por eso, en virtud de la afirmación 3 del teorema, para  $A = S$  obtenemos que  $i = j$ . Demostremos que para todos los  $m = 1, 2, \dots, i$  se verifica la desigualdad  $w(s_m) \geq w(s'_m)$  lo que contradirá la suposición de que  $w(F') > w(F)$ , con lo que quedará por terminada la demostración de nuestra implicación.

Realicemos la demostración por inducción respecto de  $m$ . Para  $m = 1$  la afirmación es evidente. Supongamos ahora que  $w(s_m) < w(s'_m)$  para cierto  $m > 1$ , y que  $w(s_p) \geq w(s'_p)$  para  $p = 1, 2, \dots, m-1$ . Veamos un conjunto  $A = \{s \in S: w(s) \geq w(s'_m)\}$ . El conjunto  $\{s_1, \dots, s_{m-1}\}$  es subconjunto independiente, máximo por inclusión, del conjunto  $A$ , puesto que si  $\{s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s\} \in \mathcal{F}$ , y  $w(s) \geq w(s'_m) > w(s_m)$ , entonces el algoritmo "ávido" debería elegir  $s$ , en lugar de  $s_m$ , a título del siguiente elemento del conjunto  $F_1$ . Esto contradice la afirmación 3 del teorema, por cuanto

$\{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$  es otro subconjunto independiente del conjunto  $A$  de mayor potencia. Con esto termina la inducción y toda la demostración del teorema.

En el teorema 2 se ha demostrado en realidad la equivalencia existente entre el concepto de matroide (introducido aquí) como sistema de conjuntos sobre los cuales el algoritmo "ávido" da soluciones óptimas y otras definiciones de los matroides que se consideran en el capítulo 8. En el párrafo 8.4 se aducirán diferentes ejemplos de los matroides, sobre los cuales el algoritmo "ávido" es siempre eficaz.

#### 6.4. OPTIMIZACIÓN EN LOS GRAFOS

En los párrafos antecedentes de este capítulo ya se han examinado problemas combinatorios extremales, relacionados con la optimización en los grafos (véase el problema del viajante de comercio). En el presente párrafo estudiaremos una serie más de problemas del mismo tipo.

Al principio nos dedicaremos al estudio de los grafos orientados  $G = (X, \Gamma)$  que no tienen contornos. Introduzcamos para ellos la noción de función ordinal. Así se denomina una función  $O(x_i)$  definida sobre un conjunto de vértices  $X = \{x_i\}$ , que toma valores de números enteros. En este caso, si  $x_j \in \Gamma(x_i)$ , entonces  $O(x_j) > O(x_i)$ . Dicho de otro modo, si el vértice  $x_j$  sigue tras el vértice  $x_i$ , entonces el valor de la función ordinal en el vértice  $x_j$  es superior a su valor en el vértice  $x_i$ . La magnitud  $O(x_i)$  se llamará nivel del vértice  $x_i$ .

Las funciones ordinales para un grafo concreto  $G = (X, \Gamma)$  pueden construirse mediante métodos diferentes. He aquí uno de éstos. Veamos los subconjuntos de los vértices  $N_0, N_1, \dots, N_r$  definidos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} N_0 &= \{x_i | x_i \in E: \Gamma^{-1}(x_i) = \emptyset\}; \\ N_1 &= \{x_i | x_i \in E \setminus N_0; \Gamma^{-1}(x_i) \in N_0\}; \\ &\dots\dots\dots \\ N_r &= \{x_i | x_i \in (E \setminus \bigcup_{k=0}^{r-1} N_k); \Gamma^{-1}(x_i) \in \bigcup_{k=0}^{r-1} N_k\}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que los conjuntos  $N_0, N_1, \dots, N_r$  forman una partición  $X$ , y la función  $O$ , que toma el valor  $k$  sobre el conjunto  $N_k$  ( $k = 0, 1, \dots, r$ ) es una función ordinal del grafo  $G$ . En la fig. 6.21  $\Gamma(N_r) = \emptyset$ , está expuesto un grafo cuyo conjunto de vértices está partido en subconjuntos  $N_0, N_1, \dots, N_r$ .

A la par con la función ordinal sobre el conjunto de vértices del grafo se define también una función numérica  $\varphi$ . Por medio de esta función se determinan las características numéricas de los problemas, que han de ser optimizadas. Supongamos que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un camino en el grafo  $G$ , es decir,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X; x_{i+1} \in \Gamma(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). Llamemos

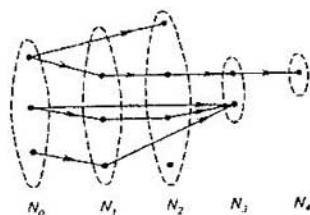


Fig. 6.21.

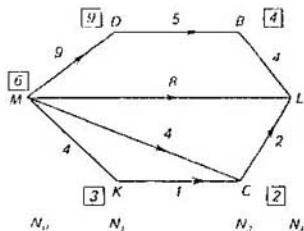


Fig. 6.22.

valor de este camino a un número  $\lambda = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)$ .

A veces la función numérica  $\varphi$  se define no sobre los vértices, sino sobre los arcos. En tal caso se llama valor del camino  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a un número  $\lambda = \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_2, x_3) + \dots + \varphi(x_{n-1}, x_n)$ .

Muchos problemas de optimización tienen la siguiente formulación: hallar entre cierto conjunto de caminos  $P$  el mínimo (o el máximo), es decir, un camino que posea el valor mínimo (o el máximo) de  $\lambda$ . Como conjunto  $P$  podemos elegir, por ejemplo, el conjunto de todos los caminos hamiltonianos. En esta sección analizaremos el problema de hallar un camino mínimo y máximo entre todas los caminos que unen dos vértices fijos.

**Teorema 3 (de optimalidad).** Supongamos que un cierto camino que une el vértice  $x$  de nivel  $m$  y el vértice  $x'$  de nivel  $s$ , es mínimo (máximo). Entonces, su subcamino entre el vértice  $y$  de nivel  $k$  y el vértice  $y'$  de nivel  $p$  ( $m \leq k < p \leq s$ ) es también mínimo (máximo).

*Demostración.* Sea el camino  $(x, \dots, y, \dots, y', \dots, x')$  mínimo. Si su subcamino  $(y, \dots, y')$  no es mínimo, existe, entonces, otro camino de  $y$  a  $y'$  de menor valor. Sustituycamos el subcamino anterior en el camino  $(x, \dots, x')$  por uno nuevo, y obtendremos, como resultado, el nuevo camino desde  $x$  hasta  $x'$  de menor valor, lo que lleva a una contradicción.

El teorema alegado yace en la base del método para hallar los caminos mínimos en un grafo sin contornos. Este método fue propuesto por Bellman y obtuvo el nombre de método de programación dinámica.

Expliquemos la esencia de este método con un ejemplo. Sea dado un grafo  $G = (X, U)$  (fig. 6.22); la función numérica viene dada en los arcos. Buscaremos el camino de  $M$  a  $A$  con el valor mínimo.

La función ordinal  $O(x)$  adquiere los siguientes valores:

$$O(M) = 0; O(D) = O(K) = 1; O(B) = O(C) = 2; O(A) = 3.$$

Examinamos sucesivamente, a partir de  $A$ , todos los vértices del grafo en el orden de decrecimiento de su función ordinal y asignamos a todo vértice un número igual al valor mínimo del camino que separa dicho vértice de  $A$ .

Para buscar los caminos mínimos en los grafos que tienen contornos



existen también métodos diferentes. Puede ocurrir que en tales grafos no haya caminos máximos.

**Algoritmo de Ford.** Supongamos que una función numérica  $l$  viene dada sobre los arcos del grafo  $G$  que no tiene contornos. Podemos considerar que  $l$  toma sólo valores positivos (de lo contrario, esto puede conseguirse con facilidad agregando un número suficientemente grande a todos los  $l(x_i, x_j)$ ). Se requiere hallar el camino mínimo que lleva desde  $x_0$  hasta  $x_n$ . A todo vértice  $x_i$  le asignaremos símbolos de acuerdo con el siguiente algoritmo:

1) pongamos  $\lambda_i = \infty$  en cada vértice  $x_i$ , salvo  $\lambda_0 = 0$ ;

2) buscamos un arco  $(x_i, x_j)$  tal que  $\lambda_j - \lambda_i > l(x_i, x_j)$  y sustituimos  $\lambda_j$  por  $\lambda_i + l(x_i, x_j) < \lambda_j$ ; procedemos de este modo hasta que se haga posible encontrar un arco que disminuya por lo menos un solo valor.

Demostremos que el número  $\lambda_n$ , hallado según la regla citada, será el valor del camino mínimo de  $x_0$  a  $x_n$  (si  $\lambda_n = \infty$ , tal camino no existe).

Se puede indicar un vértice  $x_r$ , tal que con ayuda del arco  $(x_r, x_n)$  se haya disminuido el valor de  $\lambda_n$  por la última vez, y

$$\lambda_n = \lambda_r + l(x_r, x_n).$$

Análogamente, existe un vértice  $x_s$ , tal que

$$\lambda_r = \lambda_s + l(x_s, x_r),$$

etc. La sucesión  $\lambda_n, \lambda_r, \lambda_s, \dots$  es estrictamente decreciente. Por consiguiente, para cierto  $k$  obtenemos  $\lambda_{r_{k+1}} = 0$ , es decir,  $x_{r_{k+1}} = x_0$ .

Demostremos que el itinerario  $(x_0, x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_n)$  es mínimo (su valor es igual a  $\lambda_n$ ). Tomemos un camino arbitrario que lleva de  $x_0$  a  $x_n$ :  $(x_0, x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_m}, x_n)$ . Son válidas las siguientes correlaciones

$$\lambda_{r_1} - 0 \leq l(x_0, x_{v_1});$$

$$\lambda_{r_2} - \lambda_{v_1} \leq l(x_{v_1}, x_{v_2});$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda_n - \lambda_{v_m} \leq l(x_{v_m}, x_n).$$

Al sumar término a término estas desigualdades, obtendremos

$$\lambda_n \leq l(x_0, x_{v_1}) + l(x_{v_1}, x_{v_2}) + \dots + l(x_{v_m}, x_n),$$

lo que se trataba de demostrar.

Observemos que el algoritmo de Ford puede emplearse para buscar el camino máximo en los grafos sin contornos. En este caso se debe poner  $\lambda_i = 0$  para todos los vértices sin excepción alguna, y luego sustituir  $\lambda_j$  por  $\lambda_j' = \lambda_i + l(x_i, x_j)$ , si  $\lambda_j' > \lambda_j$ , hasta que se pueda aumentar  $\lambda_j$ .

Mencionemos, por fin, el algoritmo de Bellman—Kalaba. Este último emplea el llamado principio de optimalidad: "cualquier subcamino del camino mínimo es un camino mínimo entre los vértices correspondientes".

Sea un grafo orientado  $G = (X, U)$ ;  $|X| = n + 1$ . Numeremos todos los vértices de 0 hasta  $n$ .

Sea  $l_{ij}$  un valor que se le asigna al arco  $(x_i, x_j)$  ( $l_{ij} = \infty$ , si  $(x_i, x_j) \notin U$ ;  $l_{ij} = 0$ , si  $i = j$ ). Buscaremos un camino  $(x_0, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_n)$  tal que el valor del camino  $l_{0,i_1} + l_{i_1,i_2} + \dots + l_{i_{n-1},i_n}$  sea mínimo.

Examinemos el sistema de ecuaciones

$$v_i = \min_{j \neq i} (v_j + l_{ij}); \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1;$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Entonces, las soluciones  $v_i$  de este sistema son valores de los caminos mínimos de  $x_i$  a  $x_n$ ;  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . El hecho de que los valores de los caminos mínimos satisfacen el sistema mencionado se deduce del principio de optimalidad. La afirmación recíproca de que las soluciones del sistema son valores de los caminos óptimos se deducirá del algoritmo que se usa para hallar  $v_i$ .

Pongamos

$$v_i^{(0)} = l_{in}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad v_n^{(0)} = 0.$$

Calculamos sucesivamente:

$$v_i^{(1)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(0)} + l_{ij}); \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1;$$

.....

$$v_i^{(k)} = \min_{j \neq i} (v_j^{(k-1)} + l_{ij});$$

$$v_n^{(k)} = 0.$$

Los cálculos se realizan hasta que se cumpla el sistema de igualdades

$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Del procedimiento que se usa para el cálculo se deduce que  $v_i^{(m)}$  es el camino mínimo del vértice  $x_i$  al vértice  $x_n$  entre todos los caminos que pasan no más que por  $m$  arcos. Por consiguiente, para hallar la solución del sistema son suficientes  $n-1$  iteraciones.

Ha de notarse que el algoritmo de Bellman—Kalaba puede ser aplicado para la búsqueda del camino máximo en un grafo sin contornos. Para ello es suficiente sólo sustituir en todas las correlaciones mín por máx y poner  $l_{ij}$  igual a  $-\infty$ , si el arco  $(x_i, x_j)$  no se contiene en el grafo.

## 6.5. FLUJOS EN LAS REDES

Al resolver los problemas extremales se emplea a menudo su interpretación en términos de los flujos en las redes. Se denomina *red* a un grafo orientado conexo  $G = (X, U)$  con un conjunto de vértices  $X$  y un conjunto de arcos  $U$ , donde a todo arco  $(x_i, x_j) \in U$  se le asigna una característica numérica no negativa  $c(x_i, x_j)$  que se llama *capacidad de paso*. En  $G$  se distinguen dos vértices fijos:  $s$  y  $t$ ;  $s$  se denomina *entrada* (también se conoce como fuente),  $t$  se denomina *salida* (también se llama, a veces, vertedero) y los restantes vértices son *intermedios*.

Se llama *flujo estacionario* de valor  $v$  desde  $s$  a  $t$  de la red  $G = (X, U) = (X, \Gamma)$  a una función numérica  $f$ , definida en el conjunto de arcos  $U$ , que satisface las siguientes ecuaciones lineales y desigualdades:

$$\sum_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) - \sum_{y \in \Gamma^{-1}(x)} f(y, x) = \begin{cases} v, & x = s; \\ 0, & x \neq s, t; \\ -v, & x = t; \end{cases} \quad (1)$$

$$0 \leq f(x, y) \leq c(x, y) \text{ para cualesquiera } (x, y) \in U. \quad (2)$$

Introduzcamos las siguientes designaciones con el fin de simplificar las notaciones de las correlaciones de flujo.

Sean  $X, Y$  ciertos conjuntos; entonces, por  $(X, Y)$  se entenderá el conjunto de todos los pares  $(x, y)$ ;  $x \in X, y \in Y$ .

Pongamos para cierta función  $g(x, y)$  y  $h(x)$ :

$$g(X, Y) = \sum_{(x, y) \in (X, Y)} g(x, y);$$

$$h(X) = \sum_{x \in X} h(x).$$

El problema del flujo máximo estacionario es el problema de maximización de la variable  $v$  que obedece a las restricciones de flujo (1) y (2).

Se denomina *corte*  $L$  en la red  $(X, U)$ , que separa los vértices  $s$  y  $t$ , a un conjunto de arcos  $(Y, \bar{Y})$ , donde  $Y \subseteq X, \bar{Y} = X - Y, s \in Y, t \in \bar{Y}$ .

El número  $c(Y, \bar{Y})$  lleva el nombre de *capacidad de paso del corte*  $(Y, \bar{Y})$ .

Señalemos que cualquier camino de  $s$  a  $t$  contiene al menos un arco del corte  $(Y, \bar{Y})$ . Por eso, si de la red se excluyen los arcos de tal o cual corte, en la red nueva no quedará ningún camino de  $s$  a  $t$ , y el valor del flujo máximo por la citada red será igual a cero. Se pone claro intuitivamente que el valor  $v$  de un flujo arbitrario  $f$  no sobrepasa la capacidad de paso de cualquier corte. Demostremos que esta afirmación es cierta.

**Lema 1.** Sea  $f$  un flujo de  $s$  a  $t$  en la red  $(X, \Gamma)$  de valor  $v$ ; supongamos que  $(Y, \bar{Y})$  es un corte que separa  $s$  de  $t$ . Entonces

$$v = f(Y, \bar{Y}) - f(\bar{Y}, Y) \leq c(Y, \bar{Y}).$$

*Demostración.* Reescribamos las relaciones (1) en una forma más compacta:

$$f(s, X) - f(X, s) = v;$$

$$f(x, X) - f(X, x) = 0; \quad x \neq s, t;$$

$$f(t, X) - f(X, t) = -v.$$

Sumemos término a término aquellas de estas relaciones que se refieren a  $x \in Y$ . Teniendo en cuenta que  $s \in Y$ , y  $t \in \bar{Y}$ , obtenemos

$$v = f(Y, X) - f(X, Y);$$

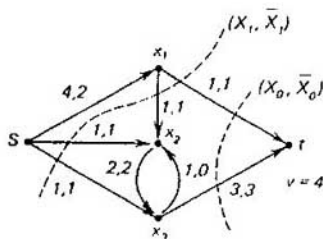


Fig 6.23.

haciendo uso de la relación  $X = Y \cup \bar{Y}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \nu &= f(Y, Y \cup \bar{Y}) - f(Y \cup \bar{Y}, Y) = \\ &= f(Y, Y) + f(Y, \bar{Y}) - f(Y, Y) - f(\bar{Y}, Y) = \\ &= f(Y, \bar{Y}) - f(\bar{Y}, Y). \end{aligned}$$

Resta por observar que  $f(\bar{Y}, Y) \geq 0$ ;  $f(Y, \bar{Y}) \leq c(Y, \bar{Y})$ , con lo que queda demostrado el lema.

El corte de capacidad de paso mínima (el cual siempre existe, puesto que el conjunto de todos los cortes es finito) se denomina mínimo. De lo demostrado más arriba se deduce que la intensidad del flujo máximo no sobrepasa la capacidad de paso del corte mínimo.

Veamos la red expuesta en la fig. 6.23, donde el primer número en el arco es igual a su capacidad de paso mientras que el segundo número, al valor de la función  $\nu$ . Entonces,  $(X_0, X_0)$  y  $(X_1, X_1)$ , donde  $X_0 = \{s, x_1, x_2, x_3\}$  y  $X_1 = \{s, x_1\}$ , son cortes mínimos de la red con una capacidad de paso igual a 4. Observemos, además, que en dicha red fluye el flujo máximo cuya magnitud es también igual a 4.

El siguiente teorema sobre el flujo máximo y el corte mínimo es el resultado principal referente al flujo estacionario máximo en la red.

**Teorema 1.** En cualquier red el valor máximo de un flujo de  $s$  a  $t$  es igual a la capacidad de paso mínima del corte que separa  $s$  de  $t$ .

*Demostración.* Del lema 1 se deduce que resulta suficiente comprobar la existencia del flujo  $f$  y del corte  $(Y, \bar{Y})$ , para los cuales el valor del flujo y la capacidad de paso del corte son iguales. En este caso el flujo será máximo y el corte, mínimo.

Tomemos el flujo máximo  $f$  (tal flujo existe, evidentemente, aunque pueden haber varios de ellos) y definamos de una manera recurrente algún corte:

a)  $s \in Y$ ;

b) Si  $x \in Y$ , y  $f(x, y) < c(x, y)$ , entonces  $y \in Y$ ; si  $x \in Y$ , y  $f(y, x) > 0$ , entonces  $y \in Y$ .

Demostremos que el conjunto obtenido  $(Y, \bar{Y})$  es un corte en la red  $G = (X, U)$ . Para ello basta demostrar que  $t \in \bar{Y}$ .

Supongamos que esto no es así. Entonces, de la definición del conjunto

Y se desprende que existe un camino de  $s$  a  $t$  ( $s, x_1, x_2, \dots, x_n, t$ ) que posee la propiedad de que para todos los arcos  $(x_i, x_{i+1})$  del camino citado tiene lugar o bien

$$f(x_i, x_{i+1}) < c(x_i, x_{i+1}), \quad (3)$$

o bien

$$f(x_{i+1}, x_i) > 0. \quad (4)$$

Sea  $\varepsilon_1$  el mínimo de la diferencia  $c - f$ , calculada en aquellos arcos del camino  $(s, x_1, \dots, x_n, t)$ , para los cuales se verifica la desigualdad (3), y sea  $\varepsilon_2$  el mínimo de  $f$  en todos los arcos inversos, en los que se verifica la desigualdad (4). Pongamos  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ . Modifiquemos ahora el flujo  $f$  del modo siguiente: aumentemos  $f$  en la magnitud  $\varepsilon$  en los arcos del camino  $(s, x_1, \dots, x_n, t)$ , sobre los cuales se verifican las desigualdades (3) y disminuyamos  $f$  en la magnitud  $\varepsilon$  en los arcos inversos, sobre los cuales se verifica (4). Una función, definida de este modo, será, evidentemente, el flujo en la red de  $s$  a  $t$ , cuyo valor es igual a  $v + \varepsilon$ . Mas, esto contradice la suposición de que el flujo  $f$  es máximo. Por consiguiente,  $t \in \bar{Y}$ , y el conjunto  $(Y, \bar{Y})$  es el corte que separa  $s$  de  $t$ .

De la definición de  $Y$  se deduce:

$$\begin{aligned} f(x, \bar{x}) &= c(x, \bar{x}) \text{ para } (x, \bar{x}) \in (Y, \bar{Y}); \\ f(\bar{x}, x) &= 0 \text{ para } (\bar{x}, x) \in (\bar{Y}, Y). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$v = f(Y, Y) - f(\bar{Y}, Y) = c(Y, Y).$$

El teorema está demostrado.

Del lema demostrado 1 y del teorema 4 pueden deducirse algunos corolarios.

Diremos que cierto itinerario de  $s$  a  $t$  aumenta el flujo  $f$ , si para cada arco  $U$  o bien  $f(U) < c(U)$ , o bien  $f > 0$  en el arco inverso de  $U$ .

**Corolario 1.** El flujo  $f$  es máximo, cuando y sólo cuando no existe ningún itinerario que aumente el flujo  $f$ .

El arco  $(x, y)$  se llamará *saturado de flujo  $f$* , si  $f(x, y) = c(x, y)$ , y *libre del flujo*, si  $f(x, y) = 0$ .

**Corolario 2.** Un corte  $(Y, \bar{Y})$  es mínimo, si y sólo si cada flujo máximo  $f$  satura todos los arcos del corte  $(Y, \bar{Y})$  y deja libres todos los arcos pertenecientes a  $(\bar{Y}, Y)$ .

El siguiente teorema demuestra que el corte mínimo  $(Y, \bar{Y})$  construido en el teorema 4 no depende, en realidad, de cómo se elige el flujo máximo  $f$ .

**Teorema 5.** Supongamos que  $(Z, \bar{Z})$  es un corte mínimo arbitrario;  $f$ , cierto flujo máximo y  $(Y, \bar{Y})$ , un corte construido por el flujo  $f$  en el teorema 4. Entonces

$$Y \subseteq Z.$$

**Demostración.** Sea  $Y \not\subseteq Z$ ; entonces  $Y \in Z \subset Y$ . Demostremos la siguiente afirmación:  $(Y \cap Z, \overline{Y \cap Z})$  es también un corte mínimo. Para la demostración hagamos uso del corolario 2. Sea  $x \in Y \cap Z$ , y  $\ell \in \overline{Y \cap Z}$ . Por consiguiente,  $x \in Y$ ;  $x \in Z$ ;  $\bar{x} \in \overline{Z \cup Y}$ , y, por tanto,  $(x, \ell)$  pertenece por lo menos a uno de los cortes: o bien a  $(Y, \overline{Y})$ , o bien a  $(Z, \overline{Z})$  y entonces, de acuerdo con el corolario 2, el flujo máximo satura el arco  $(x, \ell)$ . Análogamente se puede demostrar que el flujo máximo arbitrario  $f$  deja libre el arco  $(\ell, x)$ . Por consiguiente,  $(Y \cap Z, \overline{Y \cap Z})$  es un corte mínimo.

Supongamos que el vértice  $x \in Y$ , y  $x \notin Y \cap Z$ . Entonces,  $x \neq s$ , y existe un camino de  $s$  a  $x$ , digamos,  $(s = x_1, x_2, \dots, x_n = x)$  tal que cada uno de sus arcos o bien está saturado de flujo  $f$ , o bien el arco inverso no es libre del flujo. Por cuanto  $s \in Y \cap Z$ , y  $x \notin Y \cap Z$ , se encontrará un par  $(x_i, x_{i+1})$ , en el que  $x_i \in Y \cap Z$  y  $x_{i+1} \in Y \cap Z$ . Demostrado el hecho de que  $(Y \cap Z, \overline{Y \cap Z})$  es el corte mínimo, podemos concluir, de acuerdo con el corolario 2, que todos los arcos rectos de él están saturados de flujo  $f$ , y todos los arcos inversos de él son libres del flujo  $f$ . Hemos llegado, pues, a una contradicción y, por lo tanto,  $Y \subseteq Z$ . El teorema está demostrado.

**Varias entradas y salidas.** Supongamos que el conjunto de vértices  $x$  de la red  $(X, U)$  está partido en tres conjuntos:

$S$  es un conjunto de entradas,

$T$ , un conjunto de salidas,

$R$ , un conjunto de vértices intermedios.

Por flujo de  $S$  a  $T$  se entiende una función numérica  $f$  que está definida en  $U$  y satisface las condiciones:

$$f(x, X) - f(X, x) = 0; \quad x \in R;$$

$$f(S, X) - f(X, S) = v;$$

$$f(T, X) - f(X, T) = -v;$$

$$0 \leq f(x, y) \leq c(x, y).$$

Ensanchemos la red  $(X, U)$ , agregando dos vértices  $s^*$  y  $t^*$  y todos los arcos  $(s^*, S)$  y  $(T, t^*)$ . Obtendremos una nueva red  $(X^*, U^*)$ . Definamos adicionalmente la función de la capacidad de paso  $c$  en  $U^*$ , poniendo

$$c^*(S^*, x) = \infty; \quad x \in S;$$

$$c^*(x, t^*) = \infty; \quad x \in T;$$

$$c^*(x, y) = c(x, y); \quad (x, y) \in U.$$

Es fácil ver que el estrechamiento  $f$  de cualquier flujo  $f^*$  de  $s^*$  a  $t^*$  en la red  $(X^*, U^*)$  representa el flujo de  $S$  a  $T$  en la red  $(X, Y)$ . Y viceversa, cualquier flujo  $f$  de  $S$  a  $T$  en la red  $(X, U)$  continúa como el flujo  $f^*$  de  $s^*$  a  $t^*$  en la red  $(X^*, U^*)$ :

$$f^*(s^*, x) = f(x, X) - f(X, x); \quad x \in S;$$

$$f^*(x, t^*) = f(X, x) - f(x, X); \quad x \in T;$$

$f^*(x, y) = f(x, y)$  en todos los demás casos.

Por consiguiente, el problema del flujo máximo de  $S$  a  $T$  en la red  $(X, U)$  es equivalente al del flujo máximo en una red ensanchada con una entrada y una salida.

**Método de marcación para resolver problemas del flujo máximo.** Existen varios algoritmos para hallar el flujo máximo. No obstante, en la base de la mayoría de ellos yace el llamado "método de marcación". Apoyándonos en la demostración del teorema 1 y de sus corolarios, damos a conocer este método eficaz de construcción del flujo máximo y del corte mínimo.

Para asegurar la terminación del proceso, convengámonos en considerar que la función de la capacidad de paso  $c$  toma sólo valores de números enteros. En la práctica esto no es una restricción sustancial, puesto que las capacidades de paso racionales pueden reducirse a los números enteros a cuenta del cambio de la escala.

Sea dado un flujo  $f$  de números enteros en la red  $(X, U)$ . (En el instante inicial el flujo  $f$  puede ser nulo). Asignemos a los vértices de la red unas marcas que pueden tener la forma  $(x^+, \varepsilon)$  ó  $(x^-, \varepsilon)$ , donde  $x \in X$ , y  $\varepsilon$  es un número natural, o bien  $\infty$ . Al realizarse la operación  $A$ , pueden ser posibles tres estados de un vértice: a) el vértice no está marcado; b) el vértice está marcado, pero no observado; c) el vértice está marcado y observado.

**Operación A (marcación).** La entrada  $S$  recibe la marca  $(-\infty)$ , es decir,  $\varepsilon(S) = \infty$ . Ahora la entrada está marcada, pero no observada, mientras que todos los demás vértices no están marcados. En general, elijamos cualquier vértice  $x$  que está marcado, pero no observado. Supongamos que tiene la marca  $(x^+, \varepsilon(x))$ . Entonces, a todos los vértices  $y$ , que no están marcados y para los cuales  $f(x, y) < c(x, y)$ , les asignamos la marca  $(x^+, \varepsilon(y))$ , donde

$$\varepsilon(y) = \min[\varepsilon(x), c(x, y) - f(x, y)].$$

Ahora los vértices  $y$  están marcados, pero no observados. A los vértices que después de esto quedan no marcados, pero para los cuales  $f(x, y) > 0$ , les asignamos la marca  $(x^-, \varepsilon(y))$ , donde

$$\varepsilon(y) = \min[\varepsilon(x), f(x, y)].$$

Tales vértices  $y$  están ahora marcados y no observados, y el vértice  $x$  está marcado y observado. Esta operación se repite hasta que resulte marcada la salida  $t$ , o bien hasta que no sea posible marcar ningún vértice, mientras que la salida quede no marcada. En el último caso el proceso de construcción de  $f$  se considera terminado. En el primer caso pasamos a la operación B.

**Operación B (cambio del flujo).** Supongamos que la salida  $t$  tiene la marca  $(y^+, \varepsilon(t))$ ; entonces  $f(y, t)$  se sustituye por  $f(y, t) + \varepsilon(t)$ ; en cambio, si  $t$  está marcado con  $(y^-, \varepsilon(t))$ , entonces  $f(t, y)$  se sustituye por  $f(t, y) - \varepsilon(t)$ . Luego, en cualquiera de estos casos pasamos al vértice  $y$ . En

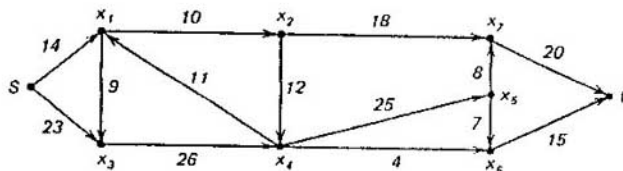


Fig. 6.24.

general, si  $y$  tiene la marca  $(x^+, c(y))$ , entonces  $f(x, y)$  se sustituye por  $f(x, y) + c(t)$ , y si el vértice  $y$  está marcado con  $(x^-, c(y))$ , entonces  $f(y, x)$  se sustituye por  $f(x, y) - c(t)$ , después de lo cual se pasa al vértice  $x$ . Conseguida la entrada  $s$ , el cambio del flujo se da por terminado. Se borran todas las marcas y de nuevo se pasa a la operación  $\Lambda$  para el nuevo aumento del flujo.

En el proceso de marcación, si pasamos de la operación  $A$  a la  $B$ , esto quiere decir que hemos encontrado el camino de  $s$  a  $t$ , que aumenta el flujo  $f$ . En cambio, si la operación  $A$  está terminada, mientras que la salida, no marcada, entonces el flujo fue máximo y el conjunto de arcos que unen los vértices marcados con los no marcados, forman el corte mínimo.

Veamos ahora un ejemplo que ilustra la aplicación del método de marcación para resolver los problemas de flujo máximo. Sea una red expuesta en la fig. 6.24 con la entrada  $s$  y la salida  $t$ . Las capacidades de paso de los arcos vienen indicadas también en dicha figura. Se requiere hallar el flujo máximo de  $s$  a  $t$ .

**Operación  $A$ .** Asignemos al vértice  $s$  una marca  $(-\infty)$ .

El conjunto de vértices  $\{x_j | x_j \in \Gamma(s), f(s, x_j) < c(s, x_j), x_j \text{ no está marcado}\}$  es  $\{x_1, x_3\}$ , al vértice  $x_1$  se le asigna la marca  $(s^+; \min\{\infty, 14-0\})$ , es decir,  $(s^+; 14)$ ; al vértice  $x_3$  se le asigna la marca  $(s^+; \min\{\infty, 23-0\})$ , es decir,  $(s^+; 23)$ .

El conjunto  $\{x_j | x_j \in \Gamma^{-1}(s), f(x_j, s) > 0, x_j \text{ no están marcados}\}$  es vacío. Así pues, el vértice  $s$  está marcado y observado; los vértices  $x_1$  y  $x_3$  están marcados y no observados, y todos los demás vértices, no marcados.

Observemos ahora el vértice  $x_1$   $\{x_j | x_j \in \Upsilon(x_1), f(x_1, x_j) < c(x_1, x_j), x_j \text{ no está marcado}\} = \{x_2\}$ , para  $x_2$  de marca sirve  $(x_1^+; \min\{14, 10-0\}) = (x_1^+; 10)$ .  $\{x_j | x_j \in \Gamma^{-1}(x_1), f(x_j, x_1) > 0, x_j \text{ no está marcada}\} = \emptyset$ . Ahora los vértices  $s$  y  $x_1$  están marcados y observados, mientras que los  $x_2$  y  $x_3$ , marcados, pero no observados.

Al tomar para la observación el vértice  $x_2$ , obtenemos las siguientes marcas:  $(x_2^+; 10)$  para  $x_4$  y  $((x_2^+; 10)$ , para  $x_7$ .

Al tomar para la observación  $x_3$ , llegamos a que no se puede poner ninguna marca. Al continuar la observación desde el vértice  $x_4$ , obtendremos las siguientes marcas:  $((x_4^+; 10)$  para  $x_5$ ,  $((x_4^+; 4)$  para  $x_6$  y  $(x_6^+; 4)$ , para  $t$ .

**Operación  $B$ .** Aquí obtenemos:  $x^* = t$ ;  $f(x_6, t) = 0 + 4 = 4$ ;  $x^* = x_6$ ;



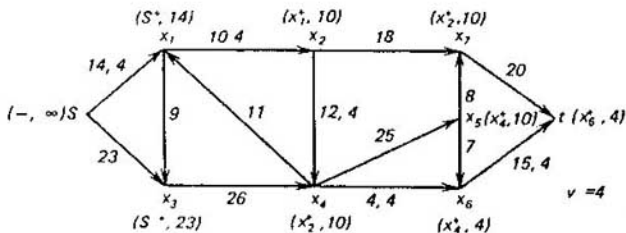


Fig. 6.25.

$f(x_4, x_6) = 0 + 4 = 4$ ;  $x = x_4$ ;  $f(x_2, x_4) = 0 + 4 = 4$ ;  $x = x_2$ ;  $f(x_1, x_2) = 0 + 4 = 4$ ,  $x = x_1$ ;

La forma del flujo al final de la operación B y las marcas de los vértices antes de que ellas quedan borradas se muestran en la fig. 6.25, donde el primer número en el arco indica la capacidad de paso, y el segundo, el valor de la función  $f$ .

Borrando las marcas de los vértices y volviendo a la operación A para la segunda pasada, obtendremos nuevas marcas de los vértices (los vértices marcados, pero no observados, los observaremos en el orden de crecimiento de sus números ordinales).

**Operación A.** La marca para  $s$  será  $(-, \infty)$ ; para  $x_1$ ,  $(s^+, 10)$ , y para  $x_3$ ,  $(s^+, 23)$ ; ahora el vértice  $s$  está marcado y observado. La marca para  $x_2$  será  $(x_1^+, 6)$  y el vértice  $x_1$  queda marcado y observado. La marca para  $x_4$  será  $(x_2^+, 6)$  y para  $x_7$ ,  $(x_2^+, 6)$ . Ahora el vértice  $x_2$  está marcado y observado, igual que el vértice  $x_3$ . La marca para  $x_5$  será  $(x_4^+, 6)$  y el vértice  $x_4$  se hace marcado y observado. La marca para  $x_6$  será  $(x_5^+, 6)$ , después de lo cual el vértice  $x_5$  será marcado y observado. Por último, la marca para  $t$  será  $(x_6^+, 6)$ .

**Operación B.** El nuevo flujo ha aumentado del modo siguiente:

$f(x_6, t) = 4 + 6 = 10$ ;  $f(x_5, x_6) = 0 + 6 = 6$ ;  $f(x_4, x_5) = 0 + 6 = 6$ ;  
 $f(x_2, x_4) = 4 + 6 = 10$ ;  $f(x_1, x_2) = 4 + 6 = 10$ ;  $f(s, x_1) = 4 + 6 = 10$ .

Todos los demás valores de la función  $f$  quedan los mismos. La forma nueva del flujo y las marcas de los vértices se muestran en la fig. 6.26.

Continuando el proceso, obtenemos tras cada paso del algoritmo, los flujos y las marcas que se muestran sucesivamente en las figs. 6.27—6.29.

El algoritmo finaliza su trabajo cuando ningún vértice puede ser marcado, como tampoco la salida  $t$ ; las marcas "finales" se muestran en la fig. 6.30. El flujo expuesto en la fig. 6.30 es, por eso, el máximo del valor 29, mientras que el correspondiente corte mínimo en este dibujo está representado con una línea punteada.

**Ejercicios.**

1. Hállese, empleando el método de marcación, el flujo máximo de la entrada  $s$  a la salida  $t$  en las redes expuestas en las figs. 6.31 a y 6.31b. Junto a los arcos en la fig. 6.31 se indican las capacidades de paso y los valores corrientes de la función del flujo  $f$ .

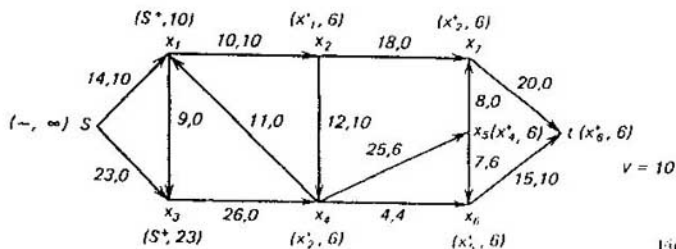


Fig. 6.26.

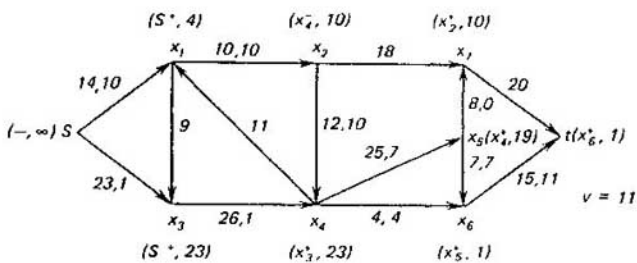


Fig. 6.27.

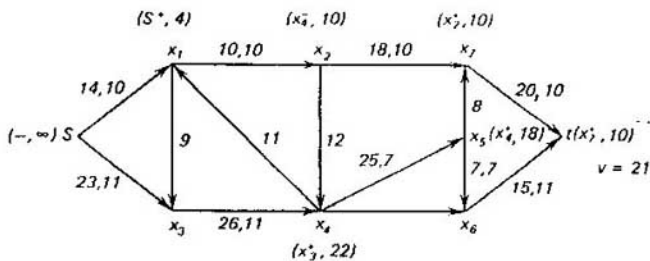


Fig. 6.28.

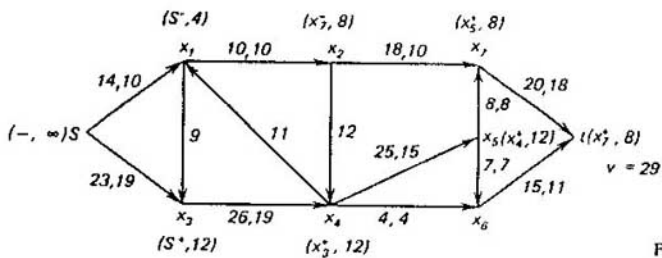


Fig. 6.29.

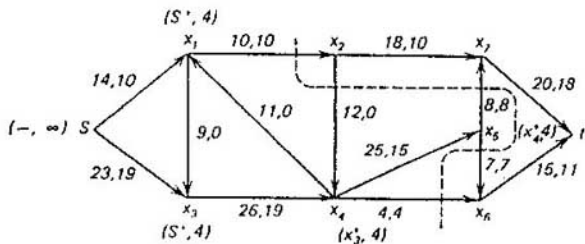


Fig. 6.30.

2. Hállese el corte mínimo que separa la entrada  $s$  de la salida  $t$  para las redes del ejercicio 1. ¿Saturará el flujo máximo todos los arcos de este corte?

3. Enúnciense las condiciones, bajo las cuales en una red arbitraria existe un camino, que aumenta el flujo, de la entrada  $s$  a la salida  $t$ , que sea compuesto íntegramente de arcos inversos (arcos rectos).

Del algoritmo de marcación se deduce que si el flujo original era de números enteros (es decir,  $f(u)$  representaba números enteros para cualquier  $u \in U$ ), entonces todos los flujos que siguen después de los aumentos resultarán ser de números enteros. Por consiguiente, es lícito el

**Teorema 6.** Si la función de la capacidad de paso  $c$  es de números enteros, existe un flujo máximo que también es de números enteros.

**Restricciones inferiores de los flujos de arco.** En la definición de flujo, en lugar de la desigualdad (2) podemos hacer

$$l(x, y) \leq f(x, y) \leq c(x, y), \quad (5)$$

donde  $l(x, y)$  es una función real definida sobre los arcos del conjunto  $U$ , y  $0 \leq l(x, y) \leq c(x, y)$ .

El proceso de marcación se extiende inmediatamente a este caso con algunas variaciones insignificantes. Siendo vigentes las restricciones (5), se demuestra con facilidad el análogo del teorema básico 4.

**Teorema 7.** Si existe una función  $f$  que satisface, para cierto  $v$ , las desigualdades (5) y ecuaciones (1), entonces el valor máximo del flujo de  $s$  a  $t$  es igual al mínimo de la diferencia  $c(Y, \bar{Y}) - l(\bar{Y}, Y)$  tomado en todos los cortes  $(Y, \bar{Y})$  de la red.

Más abajo se demostrarán los teoremas que proporcionan las condi-

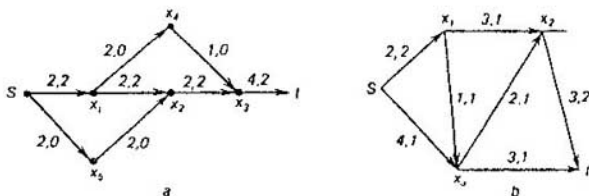


Fig. 6.31.

ciones necesarias y suficientes para la existencia de los flujos en las redes, las cuales satisfacen diferentes desigualdades lineales.

**Teorema de demanda y oferta.** Sea  $G = (X, U)$  una red arbitraria con la capacidad de paso  $c = c(x, y)$ , donde  $(x, y) \in U$ , y  $X$  está partido en tres conjuntos:  $X = S \cup R \cup T$ ;  $S$  son las entradas,  $R$  son los vértices intermedios,  $T$  son las salidas. A todo vértice  $x \in S$  se le asigna un número  $a(x)$ , y a cada vértice  $y \in T$  se le asigna el número  $b(y)$ ;  $a(x) \geq 0$ ,  $x \in S$ ;  $b(y) \geq 0$ ,  $y \in T$ . El número  $a(x)$  puede entenderse como oferta de la mercancía en la entrada  $x$ ;  $b(y)$ , como la demanda de la mercancía en la salida  $y$ . Surge el siguiente problema: ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes, bajo las cuales la demanda en las salidas puede ser satisfecha por la oferta en las entradas? En el lenguaje algebraico esto puede expresarse así:

$$\begin{aligned} f(x, X) - f(X, x) &\leq a(x); & x \in S; \\ f(x, X) - f(X, x) &= 0; & x \in R; \\ f(X, x) - f(x, X) &\geq b(x); & x \in T; \\ 0 &\leq f(x, y) \leq c(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

**Teorema 8.** Las restricciones (6), donde  $a(x) \geq 0$  y  $b(x) \geq 0$  son admisibles cuando y sólo cuando para cada subconjunto  $Y \subseteq X$ :

$$b(T \cap \bar{Y}) - a(S \cap \bar{Y}) \leq c(Y, \bar{Y}). \quad (7)$$

*Demostración.* Demostremos al principio la necesidad de la desigualdad (7). Supongamos que existe un flujo  $f$  que satisface las condiciones (6). Al sumar estas desigualdades respecto de todos los vértices  $x \in \bar{Y}$ , obtenemos una desigualdad

$$b(T \cap \bar{Y}) - a(S \cap \bar{Y}) \leq f(X, \bar{Y}) - f(\bar{Y}, X). \quad (8)$$

$X = Y \cup \bar{Y}$ , por lo cual (8) puede ser transformada:

$$b(T \cap \bar{Y}) - a(S \cap \bar{Y}) \leq f(Y, \bar{Y}) - f(\bar{Y}, Y).$$

Haciendo uso del resultado del lema 1, demostramos la necesidad de la condición 7.

Demostremos ahora la suficiencia de la condición (7). Hagamos ensanchar la red  $G = (X, U)$ , uniendo la entrada ficticia  $s$ , la salida  $t$  y los arcos  $(s, S)$  y  $(T, t)$ . Obtendremos una red nueva  $X^*, U^*$ . La función que caracteriza la capacidad de paso sobre  $U^*$  la definiremos según las fórmulas:

$$\begin{aligned} c^*(s, x) &= a(x); & x \in S; \\ c^*(x, t) &= b(x); & x \in T; \\ c^*(x, y) &= c(x, y); & (x, y) \in U. \end{aligned}$$

La validez de la desigualdad (7) significa que el corte  $(T, t)$  en la red  $(X^*, U^*)$  es mínimo. Demostremoslo. Sea  $(Y^*, \bar{Y}^*)$  un corte arbitrario que separa

s de  $t$ . Pongamos  $Y = Y^* \setminus s$ ,  $\bar{X} = X^* \setminus t$ , entonces

$$\begin{aligned} c^*(Y^*, \bar{Y}^*) - c^*(T, t) &= c^*(Y, t) + c^*(s, \bar{Y}) + \\ + c^*(Y, \bar{Y}) - c^*(T, t) &= b(T \cap Y) + a(S \cap \bar{Y}) + c(Y, \bar{Y}) - b(T) = \\ &= -b(T \cap \bar{Y}) + a(S \cap \bar{Y}) + c(Y, \bar{Y}). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de flujo máximo y corte mínimo, llegamos a que el cumplimiento de la condición (7) tiene por resultado la existencia del flujo  $f^*$  de  $s$  a  $t$  en la red  $(X^*, U^*)$  que satura todos los arcos del corte  $(T, t)$ . En tal caso el flujo  $f$  que representa un estrechamiento del flujo  $f^*$  en la red  $(X, U)$  satisface las condiciones (6), puesto que

$$\begin{aligned} a(x) \geq f^*(s, x) &= f^*(x, X) - f^*(X, x) = f(x, X) - f(X, x); \quad x \in S; \\ b(x) = f^*(x, t) &= f^*(X, x) \text{ y } f^*(x, X) = f(X, x) - f(x, X); \quad x \in T. \end{aligned}$$

El teorema está demostrado.

**Teorema de circulación.** Demostremos un teorema más, en el cual se trata de la existencia de las circulaciones, es decir, de los flujos que están privados de entradas y salidas y que están limitados en los arcos por las fronteras superiores e inferiores prefijadas.

Supongamos que para la red  $(X, U)$  están prefijadas  $l$  y  $c$ , es decir, las funciones de frontera inferior y superior, respectivamente, en  $U$ . La circulación admisible en la red  $(X, Y)$  es  $f$ , que está definida sobre  $U$  y que satisface las condiciones:

$$f(x, X) - f(X, x) = 0; \quad x \in X; \quad (9)$$

$$0 \leq l(x, y) \leq f(x, y) \leq c(x, y); \quad (x, y) \in U. \quad (10)$$

**Teorema 9.** Para que las restricciones (9) y (10) sean admisibles, es necesario y suficiente que para cualquier  $Y \subseteq X$  se cumpla la desigualdad

$$c(Y, \bar{Y}) \geq l(\bar{Y}, Y).$$

*Demostración.* Hagamos ensanchar la red  $(X, U)$  añadiendo dos vértices  $s$  y  $t$ , y un conjunto de arcos  $(s, X)$  y  $(X, t)$ . En la nueva red  $(X^*, U^*)$  definamos una función que tiene una capacidad de paso según las fórmulas:

$$c^*(x, y) = c(x, y) - l(x, y); \quad (x, y) \in U;$$

$$c^*(s, x) = l(X, x); \quad x \in X;$$

$$c^*(x, t) = l(x, X); \quad x \in X.$$

Si en la red  $(X, U)$  existe una circulación admisible  $f$ , entonces ésta engendra el flujo  $f^*$  de  $s$  a  $t$  en la red  $(X^*, U^*)$ :

$$f^*(x, y) = f(x, y) - l(x, y); \quad (x, y) \in U;$$

$$f^*(s, x) = l(X, x); \quad x \in X;$$

$$f^*(x, t) = l(x, X); \quad x \in X.$$

Al contrario, si en la red  $(X^*, U^*)$  existe un flujo  $f^*(x, y)$ , entonces en la red  $(X, U)$  puede determinarse la circulación  $f(x, y)$  al poner:

$$f(x, y) = f^*(x, y) + l(x, y) \text{ para } (x, y) \in U.$$

Se comprueba con facilidad el cumplimiento de las relaciones (9) y (10).

Así pues, el problema se ha reducido a la cuestión sobre la existencia del flujo de  $s$  a  $t$  en la red  $(X^*, U^*)$  de valor  $l(X, X)$ . La condición necesaria y suficiente para la existencia del flujo citado de  $s$  a  $t$  de valor  $l(X, X)$  consiste en que las capacidades de paso de todos los cortes sean no menos de  $l(X, X)$ .

Sea  $(Y, \bar{Y}^*)$  un corte que separa  $s$  de  $t$  en la red  $(X^*, U^*)$ . Definamos el conjunto  $Y \subseteq X$  del modo siguiente:

$$Y = Y^* \setminus s; \quad \bar{Y} = \bar{Y}^* \setminus t.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} c^*(Y^*; \bar{Y}^*) &= c^*(Y \cup s, \bar{Y} \cup t) = c^*(Y, \bar{Y}) + c^*(s, \bar{Y}) + c^*(Y, t) = \\ &= c(Y, \bar{Y}) - l(Y, \bar{Y}) + l(X, \bar{Y}) + l(Y, X) = c(Y, \bar{Y}) + \\ &+ l(\bar{Y}, \bar{Y}) + l(Y, X) = c(Y, \bar{Y}) + l(X, X) - l(\bar{Y}, Y). \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $c^*(Y^*; \bar{Y}^*) \geq l(X, X)$  cuando y sólo cuando

$$c(Y, \bar{Y}) \geq l(\bar{Y}, Y).$$

Con ello queda demostrado el teorema.

Por último demostremos el análogo del teorema de König (véase § 4.1), ilustrando de este modo su conexión con el teorema sobre el flujo máximo y el corte mínimo.

Sea  $G = G(S \cup T, U)$  un grafo bipartido arbitrario sobre un conjunto de vértices  $S \cup T$  con un conjunto de arcos  $U$ , cuyos arcos están todos orientados de  $S$  en  $T$ . Se denomina combinación de pares en el grafo  $G$  un subconjunto  $E$  de aristas, de las cuales ningún par tiene vértices comunes. Un conjunto de vértices se denomina  $(S, T)$ -separador, si la eliminación en el grafo de los citados vértices junto con los arcos incidentes con ellos rompe todos los caminos que van desde los vértices del conjunto  $S$  a los vértices del conjunto  $T$ .

**Teorema 10.** Sea  $G = G(S \cup T, U)$  un grafo bipartido. Entonces, el número máximo de arcos de la combinación de pares en el grafo  $G$  es igual al número mínimo de vértices en el conjunto  $(S, T)$ -separador.

*Demostración.* Juntemos al grafo en consideración  $G$  dos vértices  $s$  y  $t$ , y también los arcos  $(s, S)$  y  $(T, t)$ , y para todos los  $x \in S$  e  $y \in T$  definamos las capacidades de paso de los arcos del grafo:

$$\begin{aligned} c(s, x) &= 1; \quad x \in S; \\ c(x, t) &= 1; \quad x \in T; \\ c(x, y) &= \infty; \quad (x, y) \in U. \end{aligned} \tag{11}$$

Sea  $f$  un flujo máximo arbitrario de  $s$  a  $t$ , que se mide en números enteros, y sea  $(Y, \bar{Y})$  cierto corte mínimo que separa  $s$  de  $t$ . Teniendo presente (11), concluimos que los arcos del conjunto  $I = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 1\}$  no tienen vértices comunes de dos en dos. El conjunto  $D = (S \cap \bar{Y}) \cup (T \cap Y)$  es  $(S, T)$ -separador, con la particularidad de que  $D$  se encuentra en una correspondencia biunívoca con los arcos del corte mínimo  $(Y, \bar{Y})$ . Al hacer uso del teorema sobre el flujo máximo y el corte mínimo, llegamos a que si  $v$  es el valor del flujo máximo  $f$ , entonces  $|I| = |D| = v$ . Por otra parte, el número máximo de arcos del grafo  $G$  que no tienen vértices comunes de dos en dos no es, obviamente, superior al número mínimo de vértices en cualquier conjunto  $(S, T)$ -separador. El teorema está demostrado.

A las relaciones existentes entre el teorema sobre el flujo máximo y el corte mínimo y otros problemas combinatorios extremales volveremos una vez más en el § 8.1.

El dominio de los problemas extremales de carácter discreto es enorme. Los esfuerzos de muchos matemáticos están dirigidos a resolverlos. Han sido elaborados algoritmos para la resolución de algunas clases de problemas. No obstante, no existe todavía una teoría íntegra y única en dicho dominio.

## CAPÍTULO 7 MÉTODOS PROBABILÍSTICOS EN EL ANÁLISIS COMBINATORIO

### 7.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS PROBABILÍSTICOS

En el § 2.4 se han estudiado las aplicaciones del aparato combinatorio de funciones generatrices a los problemas de la teoría de las probabilidades (para un conocimiento más detallado de esta última se recomienda el libro [82]). En el presente capítulo el planteamiento del problema será inverso. Daremos a conocer un método (o, incluso, un grupo de métodos) de resolución de los problemas combinatorios por medios de carácter probabilístico. La esencia del método consiste en que los objetos combinatorios que se investigan se interpretan como sucesos en cierto espacio probabilístico discreto. Se demuestra que en este espacio la probabilidad de que un objeto, poseedor de las propiedades dadas, se realice es positiva. De este modo se demuestra la existencia de tal objeto, aunque dicho objeto no se construye explícitamente. El método no es perfecto por su carácter no constructivo, sin embargo, en muchos problemas combinatorios resulta suficiente establecer el propio hecho de existencia de un objeto. El método que se describe emplea el aparato desarrollado de la teoría de las probabilidades, lo que permite simplificar razonamientos engorrosos.

Explicemos la esencia del método con ejemplos concretos.

**Estimaciones de los números de Ramsey.** Enunciemos el teorema de Ramsey del párrafo 3.3 para un caso particular en que  $r = t = 2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = k$ .

**Teorema 1.** Existe un número natural mínimo  $n = R(k)$  tal que para cualquier coloración en dos colores de las aristas de un grafo no orientado completo de  $n$  vértices se encontrará un subgrafo completo de  $k$  vértices, cuyas aristas están coloreadas de un mismo color.

Demostremos por el método probabilístico la estimación inferior para los números de Ramsey  $R(k)$ .

**Teorema 2.**

$$R(k) \geq k \cdot 2^{k/2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2e}} + o(1) \right) \text{ para } k \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Analicemos un grafo completo con un conjunto de vértices  $X$ , donde  $|X| = n$ . A título de espacio probabilístico elijamos el conjunto de todas las coloraciones de sus aristas en 2 colores: rojo y azul. Todas las coloraciones son equiprobables, es decir, cada arista se colorea, independientemente de las otras, de color rojo con una probabilidad igual a  $1/2$ , y de color azul, con una probabilidad de  $1/2$ . Examinemos un  $k$ -subconjunto  $Y \subseteq X$ . La probabilidad de que todas las aristas del subgrafo



generado por  $Y$  estén coloreadas de rojo será igual a  $2^{-\binom{k}{2}}$ . Para el color azul esta probabilidad es la misma. Por eso, la probabilidad de que el subconjunto dado de los vértices  $Y$  genere un subgrafo monocromático es igual a  $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$ . El conjunto  $Y$  puede ser elegido por  $\binom{n}{k}$  métodos. Por eso, la probabilidad de la existencia del  $k$ -subconjunto  $Y$ , que genera un subgrafo monocromático no es superior a  $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$ . Por consiguiente, si los números  $n$  y  $k$  son de tal género que  $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ , entonces el suceso se realiza con la probabilidad positiva  $p = 1 - \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$ , cuando ningún subgrafo generado de  $k$  vértices es monocromático. En virtud de la finitud del conjunto de coloraciones esto quiere decir que existe una coloración, para la cual no existen subgrafos completos monocromáticos de  $k$  vértices. Así pues, de  $\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}-1}$  se deduce:  $n < R(k)$ . Por consiguiente,

$$\binom{R(k)}{k} \geq 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

Haciendo uso del desarrollo de Stirling  $k! = k^k e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot (1 + o(1))$  para  $k \rightarrow \infty$ , obtendremos

$$R(k)^k \geq k! \binom{R(k)}{k} \geq k! \cdot 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

$$R(k) \geq \left( k^k e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}-1} \right)^{\frac{1}{k}} \cdot (1 + o(1)) = \frac{k \cdot 2^{k/2}}{\sqrt{2e}} \cdot (1 + o(1)),$$

lo que se requería demostrar

**Propiedad  $\mathcal{B}$**  (véase la definición en el § 1.5). Designemos con  $m(k)$  el número mínimo de miembros en el sistema de  $k$ -subconjuntos que no poseen la propiedad  $\mathcal{B}$ . Es fácil ver que el sistema de todos los  $k$ -subconjuntos del  $(2k-1)$ -conjunto no posee la propiedad  $\mathcal{A}$ , por lo cual

$$m(k) \leq \binom{2k-1}{k}.$$

La estimación de debajo para  $m(k)$  la obtendremos por el método de los primeros momentos.

**Teorema 3.**

$$m(k) \geq 2^{k-1}.$$

*Demostración.* Veamos un conjunto  $V$  y un sistema  $A = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  de sus  $k$ -subconjuntos que no posee la propiedad  $\mathcal{A}$ , donde  $m = m(k)$ .

Sea  $C = (V_1, V_2)$  una partición del conjunto  $V$ , es decir,  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Pongamos

$$f_{ij}(C) = \begin{cases} 1, & \text{si } S_j \subseteq V_i, \\ 0, & \text{si } S_j \not\subseteq V_i, \end{cases}$$

donde  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ . Entonces

$$\beta(C) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 f_{ij}(C)$$

es el número de miembros del sistema  $A$  que están íntegramente contenidos en una de las partes de la partición  $C$ .

Sea ahora  $\zeta$  una partición accidental, donde cada elemento del conjunto  $V$  pertenece con la probabilidad  $1/2$ , independientemente de los otros elementos, a la primera parte de la partición, y con la misma probabilidad  $1/2$ , a la segunda parte. Entonces, cuando  $i = 1, 2$  para cualquier subconjunto  $S_j$  de  $k$  elementos, tenemos:

$$Mf_{ij}(C) = P\{f_{ij}(C) = 1\} = 2^{-k}.$$

Calculemos la esperanza matemática  $\beta(C)$ :

$$M\beta(C) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 Mf_{ij}(C) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^2 2^{-k} = m \cdot 2^{1-k}.$$

Por cuanto  $A$  no posee la propiedad  $\mathcal{B}$ , entonces  $\beta(C) \geq 1$  para cualquier partición  $C$  y, por lo tanto,

$$M\beta(C) \geq 1.$$

Así pues,  $m \cdot 2^{1-k} \geq 1$ , lo que se trataba de demostrar.

**Problema sobre la cantidad máxima de números cuyas sumas son todas diferentes.** Designemos con  $g(n)$  la cantidad máxima  $k$  de números naturales  $a_1, \dots, a_k$ , no superiores a  $n$ , cuyas sumas  $\sum_{i \in S} a_i$  son todas diferentes para diferentes  $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ . Está claro que los números  $1, 2, 4, \dots, 2^{k-1}$  satisfacen esta condición cuando  $k \leq 1 + \log_2 n$ , por lo cual

$$g(n) \geq 1 + \lceil \log_2 n \rceil.$$

Por otra parte, cualquiera de las sumas no sobrepasa  $kn$ . Si  $k = g(n)$ , se tienen en total  $2^{k(n)}$  sumas diferentes y todas ellas están encerradas entre  $0$  y  $ng(n)$ , de donde  $2^{k(n)} \leq ng(n)$ . Por consiguiente

$$\begin{aligned} g(n) &\leq \log_2 n + \log_2 g(n) \leq \log_2 n + \log_2(\log_2 n + \log_2 g(n)) = \\ &= \log_2 n + \log_2(\log_2 n) + o(1). \end{aligned}$$

Esta estimación superior puede ser mejorada, si hacemos uso del método teórico-probabilístico de los segundos momentos.

**Teorema 4.**

$$g(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2(\log_2 n) + o(1) \text{ para } n \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Supongamos que los números  $a_1, \dots, a_k$  satisfacen las condiciones del problema. Examinemos una magnitud aleatoria  $\xi = \sum_{i \in S} a_i$ , donde  $S$  es un subconjunto elegido al azar del conjunto  $\{1, \dots, k\}$ . Cada uno de los elementos de dicho conjunto integra  $S$  independientemente de los otros elementos con una probabilidad igual a  $1/2$ . Por eso,

$$M\xi = \sum_{i=1}^k P\{i \in S\} \cdot a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i.$$

Cada par de elementos  $\{i, j\}$ , donde  $1 \leq i < j \leq k$ , integra el subconjunto  $S$  con la probabilidad igual a  $1/4$ . Por eso,

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= M\left(\sum_{i \in S} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^k P\{i \in S\} \cdot a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq k} P\{i, j \in S\} \cdot 2a_i a_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2a_i a_j = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k a_i^2 + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^2. \\ D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k a_i^2. \end{aligned}$$

Emplearemos la desigualdad de Chébishev ( $\sigma > 0$ ):

$$P\{|\xi - M\xi| < \sigma\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\sigma^2} = 1 - \frac{1}{4\sigma^2} \sum_{i=1}^k a_i^2 \geq 1 - \frac{kn^2}{4\sigma^2}.$$

Por cuanto todas las sumas  $\sum_{i \in S} a_i$  son distintas, el número de subconjuntos  $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ , que satisfacen la condición  $\left|\sum_{i \in S} a_i - M\xi\right| < \sigma$ , no sobrepasa  $2\sigma$ . Por consiguiente,

$$P\{|\xi - M\xi| < \sigma\} \leq 2\sigma \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

y

$$1 - \frac{kn^2}{4\sigma^2} \leq \sigma \cdot 2^{1-k}$$

Al poner  $\sigma = n\sqrt{k}$ , obtenemos que  $\frac{3}{8} \cdot 2^k \leq n\sqrt{k}$ , de donde encontramos:

$$k \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 (\log_2 n) + o(1) \text{ para } n \rightarrow \infty,$$

lo que se requería demostrar.

## 7.2. PROBLEMAS DE PLANIFICACIÓN DEL EXPERIMENTO

Examinemos el siguiente modelo matemático del problema de experimentos de rechazo. En un conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , compuesto de  $n$  elementos, hay que hallar  $s$  elementos fijos, desconocidos de antemano (llamémoslos *defectuosos*). Concretamente estos pueden ser los problemas siguientes: búsqueda de las monedas falsas, determinación de los defectos en un televisor, comprobación de un cable telefónico por medio de un tester, localización de un hombre enfermo en un numeroso grupo de gente con ayuda del análisis de la sangre, etc.

Los experimentos se llevan a cabo del modo siguiente. Se toma cierto subconjunto  $Y \subseteq X$ . Como resultado de las pruebas (test) obtenemos una información que se interpreta según el planteamiento del problema. Por ejemplo, podemos determinar si pertenece al conjunto  $Y$  por lo menos uno de los  $s$  elementos defectuosos o bien cuántos, precisamente, elementos defectuosos se contienen en  $Y$ .

El juego de conjuntos  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) se llama *plan de experimentos*. Partiendo de los resultados de  $N$  experimentos se necesita hallar unívocamente todos los  $s$  elementos defectuosos, con la particularidad de que en la elección de  $Y_i \subseteq X$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) pueden imponerse algunas restricciones.

Resulta natural dividir el problema de planificación de los experimentos en dos clases. A la primera clase se refiere la planificación *estática*, donde la elección del  $i$ -ésimo conjunto  $Y_i$  no depende de los resultados de los  $i - 1$  experimentos anteriores. La segunda clase es la planificación *sucesiva*, donde los resultados de las comprobaciones anteriores influyen en el planteamiento del experimento de turno. Veamos primeramente el problema de búsqueda de un elemento defectuoso.

Sea  $s = 1$ , es decir, entre los elementos del conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  hay exactamente un elemento defectuoso. Supongamos, además, que está prefijado el plan estático de los experimentos, es decir, el juego de conjuntos  $Y_i \subseteq X$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Basándose en dicho juego se construye la matriz  $A = |a_{ij}|$  de dimensión  $N \times n$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j \in Y_i, \\ 0, & \text{si } x_j \notin Y_i \quad (1 \leq j \leq n; 1 \leq i \leq N). \end{cases}$$

A la inversa, a base de esta matriz se restablecen unívocamente los conjuntos  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

**Lema 1.** Sea  $s = 1$ . Los experimentos contruidos con arreglo a la matriz  $A = |a_{ij}|$  restablecen unívocamente el elemento defectuoso cuando y sólo cuando todas las columnas de la matriz  $A$  son diferentes.

*Demostración.* Supongamos que en la matriz  $A$  la  $k$ -ésima columna es igual a la columna  $l$ -ésima. En este caso no podremos distinguir cuál de los elementos es defectuoso:  $x_k$  ó  $x_l$ , puesto que dichos elementos o bien

pertenecen simultáneamente al conjunto  $Y_m$  ( $1 \leq m \leq N$ ), o bien no lo pertenecen, razón por la cual todas las columnas de la matriz  $A$  han de ser diferentes.

Al contrario, sea  $e_i$  el resultado de la  $i$ -ésima comprobación, es decir,  $e_i = 1$ , si el elemento defectuoso pertenece al conjunto  $Y_i$  del plan de experimentos construido a base de la matriz  $A = [a_{ij}]$ , y  $e_i = 0$ , en el caso contrario. Así pues, realizadas  $N$  comprobaciones, obtendremos un vector de resultados  $\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)^T$  ( $T$  es una operación de transposición). Si el elemento  $x_k$  es defectuoso, entonces  $\vec{e}$  coincide con la  $k$ -ésima columna de la matriz  $A = [a_{ij}]$ . Por consiguiente, si todas las columnas de la matriz  $A$  son distintas, entonces partiendo del vector de los resultados restableceremos unívocamente el elemento defectuoso. La demostración está terminada.

Así pues, el problema de planificación estática consiste en hallar la matriz  $A$ , compuesta de ceros y unidades, tal que todas las  $n$  columnas cuyas sean distintas dos a dos y el número de filas, mínimo. Este número se denotará con  $N_{\text{exp}}^{\text{est}}$ .

**Teorema 5.** En el caso de un elemento defectuoso

$$N_{\text{exp}}^{\text{est}} = \lceil \log_2 n \rceil.$$

*Demostración.* Si todas las  $n$  columnas de una  $(0, 1)$ -matriz  $A$ , compuesta de  $N$  filas, son distintas dos a dos, entonces su cantidad no sobrepasa la cantidad de todas las palabras binarias de longitud  $N$ , es decir,  $n \leq 2^N$ . Teniendo presente que  $N$  es un número entero y suponiendo  $N = N_{\text{exp}}^{\text{est}}$ , obtendremos:  $N_{\text{exp}}^{\text{est}} \geq \lceil \log_2 n \rceil$ .

La validez de la desigualdad recíproca se deduce de que la  $(0, 1)$ -matriz, cuyas columnas representan la notación de los números naturales  $1, 2, \dots, n$  en el sistema binario de numeración, contiene  $\lceil \log_2 n \rceil$  filas. El teorema queda demostrado.

Analicemos ahora un caso en que se trata de dos elementos defectuosos. Si para  $s = 1$  tenemos la fórmula exacta de  $N_{\text{exp}}^{\text{est}}$ , entonces cuando  $s = 2$ , las estimaciones superior e inferior obtenidas no coinciden. Ya en este caso se manifiestan dificultades de los problemas de búsqueda en la planificación del experimento para  $s$  grandes.

Al igual que para  $s = 1$ , al plan estático corresponderá unívocamente una matriz  $A = [a_{ij}]$ .

En el modelo lineal de la planificación estática obtendremos, como resultado del  $i$ -ésimo experimento, una información referente al número de elementos defectuosos que están contenidos en el conjunto  $Y_i$ . De este modo, el vector de los resultados será una palabra de longitud  $N$  sobre el alfabeto  $\{0, 1, 2\}$ .

**Lema 2.** Una matriz  $A = [a_{ij}]$  es el plan estático para  $s = 2$ , es decir, restablece unívocamente el par de elementos defectuosos cuando y sólo cuando son diferentes todas las sumas de columnas cuyas tomadas de dos en dos.

Las sumas de las columnas se entienden como sumas tomadas por componentes, mientras que la sumación será habitual:

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 2.$$

La demostración del lema 2 es igual a la del lema 1. La única diferencia consiste en que esta vez el vector de los resultados es una suma de las columnas  $i$ -ésima y  $j$ -ésima, si  $(x_i, x_j)$  es el par de elementos defectuosos.

**Teorema 6.** En el caso de dos elementos defectuosos

$$N_{\text{exp}}^{\text{est}} \geq \log_3 \binom{n}{2}. \quad (1)$$

*Demostración.* Supongamos que la  $(0, 1)$ -matriz  $A$  es de tal género que todas las sumas de las columnas suyas tomadas de dos en dos son diferentes. Por cuanto se pueden comparar en total  $\binom{n}{2}$  sumas de las columnas tomadas de dos en dos y cada una de dicha suma es una palabra de longitud  $N$  sobre el alfabeto  $\{0, 1, 2\}$ , donde  $N$  es el número de filas en  $A$ , entonces resulta válida la desigualdad

$$\binom{n}{2} \leq 3^N$$

Al poner  $N = N_{\text{exp}}^{\text{est}}$ , obtendremos la afirmación del teorema.

En adelante demostraremos una estimación más fuerte para  $N_{\text{exp}}^{\text{est}}$ , y por ahora pasaremos a las estimaciones superiores para  $N_{\text{exp}}^{\text{est}}$ .

Con el fin de obtener estimaciones superiores hagamos uso del método de construcción aleatoria de la matriz del plan estático. Supongamos que la matriz  $A = [a_{ij}]$  está construida del modo siguiente:

$$P\{a_{ij} = 1\} = p \geq 0, P\{a_{ij} = 0\} = q \geq 0, p + q = 1;$$

$$(i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n),$$

y que todas las magnitudes aleatorias  $a_{ij}$  son independientes en su totalidad.

Veamos un vector columna  $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$  de longitud  $n$ , compuesto de 2 unidades y  $n - 2$  ceros. Este vector se denominará *vector de desarreglo*. En términos de los vectores de desarreglo el lema 2 puede enunciarse del modo siguiente.

**Lema 2'.** La matriz  $A = [a_{ij}]$  es el plan estático, cuando y sólo cuando para cualquier par de diferentes vectores de desarreglo  $\vec{z}$  y  $\vec{v}$  se verifica la desigualdad:  $A\vec{z} \neq A\vec{v}$ .

La matriz  $A$  se multiplica por el vector de un modo habitual.

Veamos dos vectores de desarreglo  $\vec{z}$  y  $\vec{v}$  tales que ambas unidades del vector  $\vec{z}$  y las unidades del vector  $\vec{v}$  ocupan cuatro posiciones diferentes. Calculemos la probabilidad de que  $A\vec{z} = A\vec{v}$ . Calculemos con anterioridad cuál es la probabilidad de que las  $i$ -ésimas componentes de las columnas  $A\vec{z}$  y  $A\vec{v}$  sean iguales ( $i = 1, \dots, N$ ).

Revisando todos los casos posibles, obtenemos

$$P\{(A\bar{z})_i = (A\bar{v})_i\} = p^4 + 4p^2q^2 + q^4.$$

Por cuanto los elementos de la matriz son magnitudes aleatorias independientes, entonces

$$P\{A\bar{z} = A\bar{v}\} = (p^4 + 4p^2q^2 + q^4)^N.$$

Veamos ahora un par de vectores de desarreglo  $\bar{u}$  y  $\bar{w}$ , en los cuales una componente unitaria coincide, y las segundas son diferentes. Por analogía con el primer caso obtendremos

$$p\{A\bar{u} = A\bar{w}\} = (p^2 + q^2)^N.$$

Estimemos ahora la probabilidad de existencia de los vectores  $\bar{z}_1$  y  $\bar{z}_2$  tales que  $A\bar{z}_1 = A\bar{z}_2$ :

$$P\{\exists \bar{z}_1, \bar{z}_2: A\bar{z}_1 = A\bar{z}_2\} \leq M_1(p^4 + 4p^2q^2 + q^4)^N + M_2(p^2 + q^2)^N,$$

donde  $M_1$  es el número de pares de vectores de primer tipo, y  $M_2$ , el número de pares de vectores de segundo tipo.

Los razonamientos combinatorios sencillos conducen a las siguientes igualdades:

$$M_1 = 3 \binom{n}{4}, \quad M_2 = 3 \binom{n}{3}.$$

De este modo,

$$P\{\exists \bar{z}_1, \bar{z}_2: A\bar{z}_1 = A\bar{z}_2\} \leq 3 \binom{n}{4} (p^4 + 4p^2q^2 + q^4)^N + 3 \binom{n}{3} (p^2 + q^2)^N.$$

Supongamos que para ciertos  $p$  y  $q$  ( $p, q \geq 0, p + q = 1$ ) el número  $\bar{N} = \bar{N}(n)$  es tal que

$$3 \binom{n}{4} (p^4 + 4p^2q^2 + q^4)^{\bar{N}} + 3 \binom{n}{3} (p^2 + q^2)^{\bar{N}} < 1. \quad (2)$$

De esto se deducirá que con la probabilidad superior a cero existe una matriz  $A$  de dimensión  $\bar{N} \times n$ , para la cual la desigualdad

$$A\bar{z} \neq A\bar{v}$$

se verifica para cualesquiera dos diferentes vectores de desarreglo  $\bar{z}$  y  $\bar{v}$ . Así pues, la matriz  $A$  corresponderá al plan estático.

Por consiguiente,  $N_{\text{est}}^{\text{est}} \leq \bar{N}$ .

Como probabilidades  $p$  y  $q$  podemos elegir cualesquiera números no negativos tales que  $p + q = 1$ . Sin embargo, resulta más ventajoso tomar tales  $p$  y  $q$  con los que las expresiones  $p^4 + 4p^2q^2 + q^4$  y  $p^2 + q^2$  sean las más pequeñas posibles. Las búsquedas no complejas de los valores extremos conducen a los siguientes resultados:

$$\min_{\substack{p, q \geq 0 \\ p + q = 1}} (p^4 + 4p^2q^2 + q^4) = \frac{3}{8} \quad \text{y se consigue para } p = q = \frac{1}{2}.$$

$\min_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=1}} (p^2 + q^2) = \frac{1}{2}$  y se consigue para  $p = q = \frac{1}{2}$ .

Pongamos, por eso,  $p = q = \frac{1}{2}$  y reescribamos la relación (2):

$$3 \binom{n}{4} \binom{3}{8}^N + 3 \binom{n}{3} \binom{1}{2}^N < 1. \quad (3)$$

Si se verifican simultáneamente dos desigualdades:

$$\begin{aligned} 3 \binom{n}{4} \binom{3}{8}^N &< \frac{1}{2}, \\ 3 \binom{n}{3} \binom{1}{2}^N &< \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

la desigualdad (3) también se cumplirá. No es difícil comprobar que las desigualdades (4) son válidas para  $N = \lceil 3 \log_2 n \rceil$ . De este modo, hemos demostrado el teorema siguiente.

**Teorema 7.** En el caso de dos elementos defectuosos

$$N_{\text{exp}}^{\text{est}} \leq \lceil 3 \log_2 n \rceil.$$

*Observación.* El resultado aducido se ha obtenido de una manera que no puede considerarse constructiva, pues no hemos construido una matriz concreta del plan estático de dimensión  $\lceil 3 \log_2 n \rceil \times n$ , sino que sólo demostramos la existencia de la misma.

Ha de notarse, sin embargo, que en dicho problema la victoria queda por el lado de los "constructivistas". El plan estático con el número de filas  $2 \cdot \lceil \log_2 n \rceil$  (véase [83]), construido con ayuda de los códigos de Bose nos da la siguiente estimación:

$$N_{\text{exp}}^{\text{est}} \leq 2 \lceil \log_2 n \rceil.$$

No obstante, para  $s$  grandes de construcción aleatoria de una matriz del plan estadístico proporciona resultados considerablemente mejores que el método de los "constructivistas" (véase [84]).

Empleando métodos análogos podemos obtener también estimaciones superiores de la longitud del plan estadístico para el llamado modelo disyuntivo, en el cual tenemos, como resultado de la  $i$ -ésima comprobación, sólo información referente a la presencia de por lo menos un elemento defectuoso en el conjunto  $Y_i$ .

### 7.3. MÉTODO DE ENTROPÍA

Este método permite mejorar la estimación (1) obtenida en el teorema 6. Recordemos previamente la definición y propiedades principales de la entropía.

Sea una distribución finita de las probabilidades  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$ ;



$\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Se denominará entropía de la distribución  $\mathcal{P}$  a la magnitud  $H(\mathcal{P}) = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i$ . Además, si alguna  $p_i$  es nula, entonces, en lugar de un sumando indeterminado  $-p_i \log_2 p_i$  se pone en la suma el cero (lo que es natural, puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_2 x = 0$ ).

Examinemos las propiedades principales del concepto introducido.

**Propiedad 1.** Se verifica la desigualdad

$$H(\mathcal{P}) \geq 0,$$

donde la igualdad se consigue cuando y sólo cuando una de las probabilidades  $p_i$  es igual a la unidad, y las demás, a cero.

**Propiedad 2.** Se verifica la desigualdad:

$$H(\mathcal{P}) \leq \log_2 m, \quad (5)$$

en la cual la igualdad se consigue cuando y sólo cuando  $p_1 = \dots = p_m = 1/m$ .

En efecto,

$$H(\mathcal{P}) - \log_2 m = \sum_{i=1}^m p_i \log_2 (1/p_i m) \leq \log_2 e \sum_{i=1}^m p_i \left( \frac{1}{p_i m} - 1 \right) = 0.$$

Aquí se ha aprovechado la desigualdad  $\log_2 x \leq (x-1)\log_2 e$ , en la cual el signo de igualdad se consigue sólo para  $x = 1$ . Por consiguiente, la igualdad en (5) tiene lugar cuando y sólo cuando  $p_1 = \dots = p_m = 1/m$ .

Veamos la cuestión sobre la entropía de la distribución compleja de las probabilidades  $\mathcal{P} = \{p_{ij}\}$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ ;  $j = 1, \dots, m_2$ ;  $p_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ . Formemos dos distribuciones simples de las probabilidades  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  del modo siguiente:

$$\mathcal{P}_1 = \{p_i^{(1)}\}, p_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{m_2} p_{ij}, i = 1, \dots, m_1;$$

$$\mathcal{P}_2 = \{p_j^{(2)}\}, p_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{m_1} p_{ij}, j = 1, \dots, m_2;$$

Está claro que  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  son realmente distribuciones de las probabilidades, es decir,  $p_i^{(1)} \geq 0$ ,  $p_j^{(2)} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ ;  $j = 1, \dots, m_2$ ;  $\sum_{i=1}^{m_1} p_i^{(1)} = 1$ ,  $\sum_{j=1}^{m_2} p_j^{(2)} = 1$ . La propiedad siguiente se refiere a la relación existente entre

las magnitudes  $H(\mathcal{P})$ ,  $H(\mathcal{P}_1)$  y  $H(\mathcal{P}_2)$ .

**Propiedad 3** (subaditividad de la entropía). Se verifica la desigualdad:

$$H(\mathcal{P}) \leq H(\mathcal{P}_1) + H(\mathcal{P}_2),$$

donde el signo de igualdad tiene lugar cuando y sólo cuando las distribuciones  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  son independientes, es decir, para cualesquiera  $i, j$  se cumple la relación:  $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ .

En efecto,  $H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}_1) - H(\mathcal{A}_2) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 \frac{p_i^{(1)} p_j^{(2)}}{p_{ij}}$ . Aplican-

do la desigualdad  $\log_2 x \leq (x - 1) \log_2 e$ , obtenemos para cada término de la suma en el segundo miembro la siguiente estimación:

$$p_{ij} \log_2 \frac{p_i^{(1)} p_j^{(2)}}{p_{ij}} \leq p_{ij} \left( \frac{p_i^{(1)} p_j^{(2)}}{p_{ij}} - 1 \right) \log_2 e,$$

con la particularidad de que la igualdad tiene lugar cuando y sólo cuando  $p_{ij} = p_i^{(1)} \cdot p_j^{(2)}$ . Por consiguiente,

$$H(\mathcal{A}) - H(\mathcal{A}_1) - H(\mathcal{A}_2) \leq \log_2 e \left( - \sum_{i,j} p_{ij} + \sum_{i,j} p_i^{(1)} p_j^{(2)} \right) = 0,$$

lo que se trataba de demostrar.

Hemos de notar que la propiedad de subaditividad de la entropía puede extenderse con facilidad a un número arbitrario de distribuciones  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ .

*Ejemplo.* Sea  $1 \leq k \leq n/2$ ,  $h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ .

Demostremos que  $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq 2^{nh(k/n)}$ .

Hagamos  $p = k/n$ . Tenemos  $\binom{n-1}{i} \binom{n}{i+1}^{-1} = \frac{i+1}{n} \leq p$

para  $i = 0, \dots, k-1$ . Por consiguiente,  $\bar{p} = \left( \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i} \right) \left( \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \right)^{-1} < p$ . Sea  $i_j \in [0, 1]$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,

$$p_{i_1, \dots, i_n} = \begin{cases} 0, & \text{si } \sum_{j=1}^n i_j > k, \\ \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \right)^{-1}, & \text{si } \sum_{j=1}^n i_j \leq k, \end{cases}$$

$$p_{i_1, \dots, i_n} = \begin{cases} \bar{p}, & \text{si } i_j = 1 \\ 1 - \bar{p}, & \text{si } i_j = 0, \text{ así que} \end{cases}$$

$$p_{i_1, \dots, i_n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} p_{i_1, \dots, i_n}$$

Aprovechando la propiedad de subaditividad de la entropía, obtenemos

$$\begin{aligned} \log_2 \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} &= - \sum_{i_1, \dots, i_n} p_{i_1, \dots, i_n} \log_2 p_{i_1, \dots, i_n} \\ &= H(\{p_{i_1, \dots, i_n}\}) \leq \sum_{j=1}^n H(\{p_{i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n}\}) = \\ &= nh(\bar{p}) < nh(p) \quad \left( \text{puesto que } \bar{p} < p \leq \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

lo que se requería demostrar.

Volvamos al problema de experimentos de rechazo. Examinemos el caso de un modelo lineal del plan estático en que se tienen dos elementos defectuosos.

**Teorema 8.**

$$N_{\text{exp}}^{\text{est}} \geq (1 + o(1)) \cdot \frac{3}{4} \log_2 n.$$

*Demostración.* Sea  $\bar{z}$  un vector columna de desarreglo que contiene dos unidades y  $(n-2)$  ceros, y sea  $\bar{e}$  una columna de resultados de los experimentos, mientras que  $A$  representa una matriz del plan estático. Entonces

$$\bar{e} = A\bar{z}.$$

Introduzcamos en el conjunto  $\Omega$  de vectores de desarreglo una distribución uniforme  $\mathcal{P}$ :  $P(\bar{z}) = \binom{n}{2}^{-1}$ . Siendo la aplicación  $A: \Omega \rightarrow \mathcal{A}(\Omega)$  biunívoca, en el conjunto  $\mathcal{A}(\Omega)$  se induce la distribución uniforme de probabilidades  $Q$ :

$$P(\bar{e}) = \binom{n}{2}^{-1} \quad \text{y} \quad H(Q) = H(\mathcal{P}) = \log_2 \binom{n}{2}.$$

Supongamos que en la  $i$ -ésima fila de la matriz  $A$  se tienen  $n_0^{(i)}$  ceros y  $n_1^{(i)}$  unidades. La distribución  $\mathcal{P}$  induce en el conjunto  $\{0, 1, 2\}^N$  distribuciones  $Q_i$  que se determinan del modo siguiente:

$$P_0^{(i)} = P\{e_i = 0\} = \binom{n_0^{(i)}}{2} \binom{n}{2}^{-1} = \frac{n_0^{(i)} \cdot (n_0^{(i)} - 1)}{n \cdot (n-1)},$$

$$P_1^{(i)} = P\{e_i = 1\} = \binom{n_0^{(i)}}{1} \binom{n_1^{(i)}}{1} \cdot \binom{n}{2}^{-1} = \frac{2n_0^{(i)} \cdot n_1^{(i)}}{n \cdot (n-1)},$$

$$P_2^{(i)} = P\{e_i = 2\} = \binom{n_1^{(i)}}{2} \cdot \binom{n}{2}^{-1} = \frac{n_1^{(i)} \cdot (n_1^{(i)} - 1)}{n \cdot (n-1)},$$

Está claro que  $P_i^{(j)} = \sum_{\bar{z} \in A^{-1}(e_i)} P(\bar{z})$ . Recurriendo a la propiedad de subaditividad de la entropía, obtenemos:  $\log_2 \binom{n}{2} = H(Q) \leq \sum_{i=1}^N H(Q_i)$ . Nos

convencemos inmediatamente de que  $H(Q_i) = \varphi(x_i) \cdot (1 + o(1))$ , donde  $x_i = \frac{n_0^{(i)}}{n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , y  $\varphi(x) = -x^2 \log_2 x^2 - 2x(1-x) \log_2 x(1-x) - (1-x)^2 \log_2 (1-x)^2$ .

Por cuanto

$$\max_{x \in [0,1]} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N H(Q_i) \leq (1 + o(1))N \max_{x \in [0,1]} \varphi(x),$$

entonces

$$N \geq \frac{\log_2 \binom{n}{2}}{\max_{x \in [0,1]} \varphi(x)} \cdot (1 + o(1)) = (1 + o(1)) \cdot \frac{4}{3} \log_2 n.$$

El teorema está demostrado.

Haciendo uso de las ideas análogas (pero en otro lenguaje matemático) y aplicando adicionalmente razonamientos combinatorios más finos, Lindström [85] obtuvo una estimación más fuerte:

$$N_{\text{exp}}^{\text{est}} \geq (1 + o(1)) \cdot \frac{5}{3} \log_2 n.$$

#### 7.4. MÉTODO DE BALANCE ALEATORIO

En los párrafos antecedentes se analizaba el modelo matemático del problema de experimentos de rechazo, en el que se necesitaba hallar  $s$  elementos fijos, pero desconocidos de antemano, en un conjunto  $X$  compuesto de  $n$  elementos. Ahora suponemos que a todo elemento  $x \in X$  se le ha hecho corresponder cierto número real  $\omega(x)$ , llamado *peso* del elemento citado, y entre los elementos del conjunto  $X$  sólo algunos, que no se conocen de antemano y cuya cantidad es igual a  $s \geq 2$ , poseen peso no nulo. Se requiere separar estos  $s$  elementos del conjunto  $X$  y determinar los pesos de ellos. Se permite en cada experimento elegir cierto subconjunto  $Y \subseteq X$  y determinar la suma de pesos de los elementos pertenecientes a  $Y$  (es decir, "ponderar" los elementos de  $Y$ ). Hace falta planificar los experimentos de una manera tal que a base de sus resultados se puedan determinar los pesos  $\omega_j = \omega(x_j)$  de los elementos, pertenecientes a  $X$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

En lo que sigue nos adheriremos a la siguiente terminología: los pesos  $\omega_1, \dots, \omega_n$  de los elementos  $x_1, \dots, x_n$  se llamarán *factores*: el factor  $\omega_j$  se denominará *significativo*, si  $\omega_j \neq 0$ . El número  $s$  de factores significativos se supone pequeño en comparación con el número total de factores  $n$ .

Partiendo de la reunión de los subconjuntos  $Y_i \subseteq X$  ( $i = 1, \dots, N$ ) construyamos una  $(N \times n)$ -matriz de los experimentos  $A = [a_{ij}]$ , donde  $a_{ij} = 1$ , siempre que  $x_j \in Y_i$ , y  $a_{ij} = 0$ , en el caso contrario. Así pues, en cada  $i$ -ésimo experimento ( $i = 1, \dots, N$ ) se halla la magnitud  $e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_j$ .

La matriz de los experimentos  $A = |a_{ij}|$  se denomina, además, plan de los experimentos. El plan ha de satisfacer los siguientes requisitos principales: sencillez en la realización y economía. El cumplimiento de las condiciones mencionadas conduce a la necesidad de minimizar el número  $N$  de experimentos en el plan.

En el párrafo anterior se ha considerado el caso cuando  $s = 2$  y todos los factores significativos son iguales a uno. En cambio, si el número  $s$  de factores significativos es arbitrario, no será difícil mostrar que para su separación unívoca del número total de factores  $n$  harán falta no menos de  $\log_{s+1} \binom{n}{s} \sim \frac{s}{\log_2 s} \log_2 n$  experimentos ( $s \leq n$ ). L. D. Meshalkin fue el primero en acentuar que los factores significativos son diferentes en la práctica e, incluso, poseen cierto carácter de inconmensurabilidad (véase [86]). Esta circunstancia hace posible construir los planes que permiten determinar con eficacia dichos factores en el transcurso de  $\log_2 n$  experimentos, lo que es considerablemente inferior a la estimación inferior aducida.

*Definición.* Los factores  $\omega_1, \dots, \omega_n$  se llaman *inconmensurables* sobre el conjunto  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$  (donde  $0 \in \Lambda$ ), si de la condición  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \omega_j = 0$ , donde  $\lambda_j \in \Lambda$ , se deduce que  $\lambda_j \omega_j = 0$  para cualesquiera  $j = 1, \dots, n$ , es decir,  $\lambda_j = 0$  para todos los factores significativos  $\omega_j$ .

El problema planteado se resolverá para  $\Lambda = \mathbb{Z}$ , por el método de balance aleatorio. He aquí el esquema que debe seguirse. Se elabora un algoritmo, para el cual de los datos de partida sirve una  $(0, 1)$ -matriz  $A = |a_{ij}|$  que contiene  $N$  filas y  $n$  columnas, y, además, un vector columna  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_N)^T \in \mathbb{R}^N$  ( $T$  es la operación de transposición). Si la matriz y el vector  $\vec{e}$  poseen ciertas propiedades, las cuales trataremos más abajo, el algoritmo elabora el vector  $\vec{\omega}' \in \mathbb{R}^n$ ; de lo contrario el algoritmo no nos da nada. Este algoritmo resulta ser de tal índole que de  $\vec{e} = A\vec{\omega}$  se deduce:  $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ . Se demuestra que para todo  $\beta \in ]0, 1[$  se puede indicar tal número  $N = N(n, s, \beta)$  que la matriz  $A$ , construida al azar, y el vector  $\vec{e} = A\vec{\omega}$  posean las propiedades indispensables con la probabilidad no inferior a  $1 - \beta$ .

Ha de indicarse que el número  $s$  de factores significativos no es obligatoriamente conocido de antemano y puede determinarse en el transcurso de los experimentos.

**Teorema 9.** Supongamos que los factores  $\omega_1, \dots, \omega_n$  son inconmensurables sobre el conjunto  $\mathbb{Z}$ , y el plan de los experimentos  $A = |a_{ij}|$  se construye de un modo aleatorio:

$$P\{a_{ij} = 0\} = P\{a_{ij} = 1\} = \frac{1}{2}; \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n.$$

Entonces, si  $s$  es el número desconocido de factores significativos, y  $\beta$ , un número real, con la particularidad de que  $0 < \beta < 1$ , entonces para

$$N > s + \log_2(n - s + 1) - \log_2 \beta$$

podemos determinar, con la probabilidad no inferior a  $1 - \beta$ , todos los factores significativos y su número  $s$ . En este caso el error en la determinación de los factores está excluido.

Observemos que si el número  $s$  de factores significativos no sobrepasa cierto número conocido de antemano  $k$ :  $s \leq k \ll n$ , el teorema citado fija la frontera para el número de experimentos que han de ser realizados, para que el plan aleatorio construido determine los factores significativos con una probabilidad no inferior a la prefijada.

Previamente a la demostración del teorema aduzcamos el siguiente lema de L. D. Meshalkin.

**Lema 3.** Cualquier plano  $l$ -dimensional en un espacio real  $n$ -dimensional ( $2 \leq n$ ;  $l \leq n$ ) contiene no más de  $2^l$  vértices de un cubo  $n$ -dimensional.

La demostración se realizará por inducción respecto de  $n$ . Cuando  $n = 2$   $l$  puede igualarse a 1 ó a 2, y la afirmación del lema resulta evidente. Supongamos que dicha afirmación ya está demostrada para todos los números  $n' < n$ , donde  $n \geq 3$ . Demostremosla también para  $n' = n$ .

Elijamos un sistema de coordenadas en el espacio  $R^n$  de un modo tal que el cubo  $n$ -dimensional dado se haga unitario, es decir, que las coordenadas de sus vértices sean iguales a 0 ó 1. Está claro que si  $l = n$ , cada plano  $l$ -dimensional puede contener no más de  $2^l$  vértices del cubo (número total de todos los vértices suyos). Si  $l = 1$ , entonces la recta  $\bar{x}(t) = \bar{a} + (\bar{b} - \bar{a})t$ , que pasa por diferentes vértices  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$  y  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$  ( $a_i, b_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ), no puede contener ningún otro vértice más. En efecto, sea  $i$  tal que  $a_i \neq b_i$ . Entonces,  $x_i(0) = x_i(1)$ , y  $x_i(0), x_i(1) \in \{0, 1\}$ . Por consiguiente, para todos los  $t \neq 0, 1$ :

$$x_i(t) = a_i + b_i - a_i)t \notin \{0, 1\}.$$

Sea ahora  $l$  tal que  $1 < l < n$ . Denotemos  $R_i^n = \{\bar{x} \in R^n : x_n = i\}$ ,  $i = 0, 1$ . Si un plano  $l$ -dimensional  $L$  es paralelo a  $R_0^n$  o a  $R_1^n$  y no yace en estos últimos, entonces el plano no contiene ningún vértice del cubo. En cambio, si  $L$  está situado en uno de los hiperplanos  $R_0^n$  ó  $R_1^n$ , la afirmación del lema se cumplirá por la hipótesis de la inducción. Resta analizar un caso en que  $L$  interseca ambos hiperplanos. Designemos  $L_i = L \cap R_i^n$ ,  $i = 0, 1$ . Está claro que las dimensiones de los planos  $L_0$  y  $L_1$  son iguales a  $l - 1$ . Los vértices del cubo, situados en cada uno de los hiperplanos  $R_i^n$  ( $i = 0, 1$ ), forman un cubo  $(n - 1)$ -dimensional y, por consiguiente, por hipótesis de la inducción, el plano  $L_i$  contiene  $2^{l-1}$  tales vértices a lo sumo. Por eso, el plano  $L$  contiene no más de  $2^{l-1} + 2^{l-1} = 2^l$  vértices del cubo  $n$ -dimensional dado. El lema queda demostrado.

*Demostración del teorema 9.* Introduzcamos las siguientes designaciones:  $\bar{a}_j$  es la  $j$ -ésima columna de la matriz  $A = |a_{ij}|$ ;  $L(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  es la cápsula lineal de los vectores  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ . Diremos que la matriz  $A$  y el vector  $\bar{e}$  poseen la propiedad  $S$ , si en  $A$  existen columnas linealmente

independientes  $\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_m}$ , cuya cápsula lineal no contiene ninguna otra columna y el sistema de ecuaciones

$$\vec{e} = \sum_{r=1}^m \vec{a}_{j_r} x_r \quad (6)$$

tiene una única solución. Si la matriz  $A$  y el vector  $\vec{e}$  poseen la propiedad  $S$ , entonces, al resolver el sistema (6), formamos un vector  $\vec{\omega}' = (\omega'_1, \dots, \omega'_m)^T$ , haciendo

$$\omega'_j = \begin{cases} \bar{x}_r & \text{para } j = j_r \ (r = 1, \dots, m), \\ 0 & \text{para } j \notin \{j_1, \dots, j_m\}, \end{cases}$$

donde  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  es la solución del sistema (6). Observemos que si el juego de números de las columnas  $j_1, \dots, j_m$  en la propiedad  $S$  se define de una manera no unívoca, entonces puede elegirse arbitrariamente. Por consiguiente, el vector construido  $\vec{\omega}'$  es precisamente vector buscado  $\vec{\omega}$ , si  $\vec{e} = A\vec{\omega}$ . Para demostrar esto, basta comprobar que los números de todos los factores significativos  $\omega_j$  pertenecen al conjunto  $\{j_1, \dots, j_m\}$ . En efecto, si esto no es así, se encontraría un juego  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  de números de las columnas que no está íntegramente contenido en el conjunto citado y que satisface el sistema de ecuaciones:

$$\vec{e} = \sum_{r=1}^l a_{\alpha_r} \omega_{\alpha_r},$$

donde  $\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_l}$  son todos factores significativos.

Veamos un sistema de ecuaciones

$$\sum_{r=1}^m \vec{a}_{j_r} x_r - \sum_{r=1}^l \vec{a}_{\alpha_r} y_r = 0 \quad (7)$$

con las incógnitas  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l$ . De la definición de la propiedad  $S$  y de la elección del juego  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \not\subseteq \{j_1, \dots, j_m\}$  se deduce que el rango del sistema no es inferior a  $m+1$ . Por consiguiente, haciendo uso del procedimiento de Gauss, podemos excluir de dicho sistema de ecuaciones las variables  $x_1, \dots, x_m$  y obtener por lo menos una ecuación que contenga sólo las variables  $y_r$  ( $r = 1, \dots, l$ ):

$$0 = \sum_{r=1}^l b_r y_r, \quad \sum_{r=1}^l b_r^2 \neq 0. \quad (8)$$

Los coeficientes de las incógnitas en el sistema (7) eran enteros, razón por la cual pueden considerarse enteros también los coeficientes  $b_r$  en (8). El sistema de ecuaciones (7) tiene la solución:  $x_r = \bar{x}_r$ ,  $r = 1, \dots, m$ ;  $y_r = \omega_{\alpha_r}$ ,  $r = 1, \dots, l$ . Por eso, el juego  $\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_l}$  forma la solución de la ecuación (8), lo que contradice la condición de inconmensurabilidad de los factores significativos  $\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_l}$ .

Se ha mostrado, pues, que si la matriz  $A$  y el vector  $\vec{e}$  poseen la propiedad  $S$ , entonces el vector desconocido  $\vec{\omega}$  queda unívocamente definido. Estimemos la probabilidad  $P$  de que construyendo al azar un plan con el

número de experimentos igual a  $N > s + \log_2(n - s + 1) - \log_2 \beta$ , el par  $(A, \vec{e})$  poseerá la propiedad  $S$ , donde  $\vec{e} = A\vec{\omega}$ .

Designemos mediante  $j_1, \dots, j_s$  los números desconocidos de los factores significativos. Estudiemos los sucesos:

$$\begin{aligned} X &= \{ \dim L(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_s}) = s \}, \\ Y_j &= \{ \vec{a}_{j_i} \notin L(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_s}) \}, j \in \{ j_1, \dots, j_s \}, \\ Y &= \bigcap_{j \in \{ j_1, \dots, j_s \}} Y_j, Z = X \cap Y. \end{aligned}$$

Está claro que la aparición del suceso  $Z$  lleva consigo el que el par  $(A, \vec{e})$ , donde  $\vec{e} = A\vec{\omega}$ , posee la propiedad  $S$ . Por consiguiente,  $P \geq P(Z)$ . Estimemos la probabilidad del suceso  $Z$ . Tenemos

$$P(Z) = P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y|X).$$

Ciertos razonamientos combinatorios no complejos con la aplicación del lema 3 nos conducen a una desigualdad

$$P(Y|X) \geq (1 - 2^{-N+s})^{n-s}.$$

Para poder estimar la probabilidad del suceso  $X$  analicemos los siguientes sucesos:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{ \dim L(\vec{a}_{j_1}) = 1 \}, X_2 = \{ \dim L(\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}) = 2 \}, \dots, \\ X_{s-1} &= \{ \dim L(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_{s-1}}) = s-1 \}, \\ \bar{X}_1 &= \{ \vec{a}_{j_1} \notin L(\vec{a}_{j_1}) \}, \bar{X}_2 = \{ \vec{a}_{j_2} \notin L(\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}) \}, \dots, \\ \bar{X}_{s-1} &= \{ \vec{a}_{j_{s-1}} \notin L(\vec{a}_{j_1}, \dots, \vec{a}_{j_{s-1}}) \}. \end{aligned}$$

Al hacer uso del lema 3, no es difícil notar que

$$P(X_1) = 1 - 2^{-N}, P(\bar{X}_r | X_r) \geq 1 - 2^{-N+r}, r = 1, \dots, s-1.$$

Por eso,  $P(X) = P(X_1) \prod_{r=1}^{s-1} P(\bar{X}_r | X_r) \geq \prod_{r=0}^{s-1} (1 - 2^{-N+r}) \geq 1 - 2^{-N+s}$

para  $s \geq 2$ . La demostración de la última desigualdad en esta cadena puede fácilmente obtenerse por inducción respecto de  $s$ . Así pues,  $P(Z) \geq (1 - 2^{-N+s})^{n-s+1} > 1 - (n-s+1)2^{-N+s}$  para  $N > s$ , puesto que para  $0 < \alpha < 1$  es válida la desigualdad:  $(1 - \alpha)^m > 1 - m\alpha$ . Por consiguiente, para  $N > s + \log_2(n - s + 1) - \log_2 \beta$  se verifica la desigualdad:  $P(Z) > 1 - (n - s + 1)2^{-N+s} > 1 - \beta$ , lo que finaliza la demostración del teorema.

M. B. Maljútov y M. S. Pínsker [87] han estudiado el problema aducido para las condiciones más generales, cuando los factores  $\omega_1, \dots, \omega_n$  se suponen incommensurables sobre el conjunto  $\Lambda = [-1, 0, 1]$  (los experimentos se realizan en este caso no de un modo aleatorio, sino sucesivamente, o sea, tomando en consideración los resultados anteriores. Con ellos se ha demostrado el teorema siguiente.

**Teorema 10.** Supongamos que los factores  $\omega_1, \dots, \omega_n$  son inconmen-



surables sobre el conjunto  $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$ ; y sea  $s$  un número desconocido de factores significativos. Existe, entonces, un método no aleatorio de realizar los experimentos que permite determinar ciertamente todos los factores en el transcurso de no más de  $s \log_2 s + \log_2 n$  experimentos. El número  $s$  se halla en este caso en el proceso de los experimentos.

*Demostración.* Con ayuda del primer experimento determinamos  $e_1 = \sum_{j=1}^n \omega_j$ . Los experimentos ulteriores se realizan de un modo inductivo.

Supongamos que tras cierta cantidad de experimentos el conjunto de todos los factores haya resultado partido en  $r_m + 1$  subconjuntos  $G_i^m$ ,  $i = 0, 1, \dots, r_m$  ( $1 \leq r_m \leq s$ ), con la particularidad de que  $G_0^m$  no contiene factores significativos, mientras que todos los  $G_i^m$  restantes contienen cada uno por lo menos un factor significativo, y se conocen las sumas  $\sigma_i^m = \sum_{\omega \in G_i^m} \omega_j$ ,

$i = 1, \dots, r_m$ . En el experimento siguiente partiremos cada uno de los subconjuntos  $G_i^m$  ( $i = 1, \dots, r_m$ ) en partes aproximadamente iguales:  $G_i^m = G_{i0}^{m+1} \cup G_{i1}^{m+1}$ ,  $G_{i0}^{m+1} \cap G_{i1}^{m+1} = \emptyset$ ,  $|G_{i0}^{m+1}| - |G_{i1}^{m+1}| \leq 1$ , y hallaremos la suma  $c = \sum_{i=1}^{r_m} \sum_{\omega \in G_{i0}^{m+1}} \omega_j$ . Si  $e \in \left\{ \sum_{i=1}^{r_m} \varepsilon_i \sigma_i^m \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}$ , entonces, haciendo uso de

la condición de inconmensurabilidad de los factores, llegamos a la conclusión de que cada uno de los subconjuntos  $G_{i\varepsilon}^{m+1}$  contiene sólo factores insignificativos. Entonces, al elegir  $G_i^{m+1} = G_{i\varepsilon}^{m+1}$ ,  $\sigma_i^{m+1} = \sigma_i^m$  ( $i = 1, \dots, r_m$ ),  $r_{m+1} = r_m$ ,  $G_0^{m+1} = \left( \bigcup_{i=1}^{r_m} G_{i\varepsilon}^{m+1} \right) \cup G_0^m$ , donde  $\bar{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i + 1) \bmod 2$ ,

continuaremos los experimentos según el esquema citado hasta que queden determinados todos los factores significativos, es decir, hasta que  $r_m$  no se haga igual a  $s$ , y cada uno de los subconjuntos  $G_i^m$  no se componga de un único factor significativo. En cambio, si  $e \in \left\{ \sum_{i=1}^{r_m} \varepsilon_i \sigma_i^m \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}$ ,

tendremos que realizar un ciclo de experimentos para determinar las sumas  $\sigma_{i\varepsilon}^m = \sum_{j \in G_{i\varepsilon}^m} \omega_j$  de los factores significativos en todas las mitades  $G_{i\varepsilon}^m$ ,

$i = 1, \dots, r_m$ ;  $\varepsilon = 0, 1$ . Con este fin realicemos un experimento y determinemos la suma  $\sum_{i=1}^{\lfloor r_m/2 \rfloor} \sigma_{i0}^m$ . Aclaremos si dicha suma pertenece al conjunto

$\left\{ \sum_{i=1}^{\lfloor r_m/2 \rfloor} \varepsilon_i \sigma_i^m \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}$ . Si la respuesta resulta positiva, llegamos a una conclusión de que cada uno de los subconjuntos  $G_{i\varepsilon}$ ,  $i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{r_m}{2} \right\rfloor$

contiene sólo factores insignificativos. De lo contrario, realizamos un experimento más y determinamos la suma  $\sum_{i=1}^{\lfloor r_m/4 \rfloor} \sigma_{i0}^m$ , etc. Indiquemos que en este

caso las sumas complementarias, tales como  $\sum_{i \in [r_m/2]+1}^{r_m} \sigma_{i0}^m$ , se determinan automáticamente y en adelante han de tratarse análogamente, dividiendo, si es necesario, el conjunto en el que viene definido el índice de sumación, aproximadamente por la mitad. Así pues, como resultado de tal ciclo de experimentos, determinamos todas las sumas  $\sigma_{ic}^m = \sum_{j \in Q_j} w_j$ ,  $i = 1, \dots, r_m$ ;

$\varepsilon = 0, 1$ , y aclaramos cuáles de los subconjuntos  $G_{ic}^m$  se componen íntegramente sólo de los factores significativos. Al relacionar todos estos subconjuntos, junto con los subconjuntos  $G_0^m$ , al subconjunto  $G_0^{m+1}$  y al reenumerar todos los subconjuntos nuevamente mediante los símbolos  $G_1^{m+1}, \dots, G_{r_{m+1}}^{m+1}$ , donde  $r_{m+1} > r_m$ , llegamos a la misma situación que teníamos al principio de nuestros razonamientos.

Estimemos el número de experimentos del plan construido sucesivamente. No es difícil notar que en cada ciclo el número de experimentos no sobrepasa de  $(r_{m+1} - r_m)(1 + \log_2 r_m)$ . Cada uno de los demás experimentos que no integran los ciclos disminuye el número de factores, que se supone son significativos, en dos veces (con una corrección evidente por el hecho de que este número puede no dividirse por 2). Por consiguiente, el número total  $N$  de experimentos del plan no sobrepasa  $s \log_2 s + \log_2 n$ :

$$N \leq 1 + \log_2 n + \sum_m (r_{m+1} - r_m)(1 + \log_2 r_m) \leq 1 + \log_2 n + \sum_m \sum_{i: r_m \leq i < r_{m+1}} (1 + \log_2 i) = 1 + \log_2 n + \sum_{i=1}^{s-1} (1 + \log_2 i)$$

(puesto que  $1 = r_1 < r_2 < \dots < r_m < r_{m+1} < \dots < r_p = s$ ).

Por consiguiente,

$$N \leq s + \log_2 n + \sum_{i=2}^{s+1} \log_2 i \leq s + \log_2 n + \int_2^s \log_2 x dx \leq s \log_2 s + \log_2 n.$$

El teorema queda demostrado.

## 7.5. SISTEMAS SEPARADORES DE SUBCONJUNTOS

Recordemos que el sistema de subconjuntos  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$  de un conjunto finito  $X$  lleva el nombre de sistema *separador*, si en él para cualesquiera dos elementos distintos de  $X$  existe  $Y_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) que contiene un solo elemento de los dos mencionados (véase § 1.5). Pongamos  $n = |X|$ . En este párrafo se analiza el problema de buscar un sistema de separación mínimo, es decir, un sistema compuesto de un número mínimo posible  $N = N(n, k)$  de subconjuntos, a condición de que cada subconjunto contiene exactamente  $k$  elementos. Nos será de interés también un sistema separador mínimo, cada subconjunto del cual se compone de no más  $k$

elementos. La cantidad de subconjuntos de tal sistema la designamos con  $N(n, \leq k)$ .

Al concepto de sistema separador llevan algunos problemas de planificación de los experimentos de rechazo (véase § 7.2). Supongamos que en nuestra disposición se tiene una balanza analítica, con ayuda de la cual se pueden determinar los pesos de los subconjuntos del conjunto  $X$ , que contiene  $n$  monedas. Se conoce que en el proceso de un solo experimento pueden pesarse simultáneamente no más de  $k$  monedas. Todas las monedas de  $X$  son iguales, a excepción de una moneda que es falsa y difiere de las demás por el peso. Se requiere ofrecer un algoritmo estático de la búsqueda, que en un número mínimo posible de experimentos revele la moneda falsa.

Convengamos en considerar, para mayor precisión, que los pesos de las monedas auténticas son iguales a 0, y el de la moneda falsa, a la unidad. Supongamos que en el  $i$ -ésimo experimento ( $i = 1, \dots, N$ ) se determina el peso sumario de los subconjuntos de monedas  $Y_i \subseteq X$ ,  $|Y_i| \leq k$ . Está claro que el sistema  $\{Y_1, \dots, Y_N\}$  de los subconjuntos de  $X$  representa la estrategia estática de la búsqueda, si y sólo si este sistema es separador. El problema se ha reducido, pues, a la construcción de un sistema separador mínimo, cada subconjunto del cual contiene no más de  $k$  elementos.

Designaremos con un mismo símbolo  $x_j$  la  $j$ -ésima moneda y el peso de la misma;  $j = 1, \dots, n$ . Igual que antes, construyamos, a base del juego de subconjuntos  $\{Y_1, \dots, Y_N\}$ , una  $(N \times n)$ -matriz de los experimentos  $A = [a_{ij}]$ , al hacer  $a_{ij} = 1$ , si  $x_j \in Y_i$ , y  $a_{ij} = 0$ , en el caso contrario. Observemos que cada fila de la matriz  $A$  contiene no más de  $k$  unidades, con la particularidad de que el sistema  $\{Y_1, \dots, Y_N\}$  es separador, si y sólo si todas las columnas de la matriz  $A$  son diferentes. Tal  $(0, 1)$ -matriz  $A$  lleva el nombre de  $F(n, \leq k)$ -plan. En este caso, si todas las filas de  $A$  contienen exactamente  $k$  unidades, la matriz  $A$  se denomina  $F(n, k)$ -plan. No es difícil ver que las cantidades mínimas de filas en  $F(n, k)$  y, correspondientemente, en  $F(n, \leq k)$ -plan son iguales a  $N(n, k)$  y  $N(n, \leq k)$ .

Procedamos a estudiar estas magnitudes y construir los planes correspondientes.

**Teorema 11.** Son válidas las siguientes afirmaciones:

- 1)  $N(n, k) = N(n, n - k)$ ,
- 2)  $N(n, k) = N(n, \leq k)$  para  $n \geq 2k$ .

*Demostración.* La validez de la primera afirmación se deduce de que todo  $F(n, k)$ -plan se transforma, por inversión de 0 y 1, en  $F(n, n - k)$ -plan. Demostremos 2). Por cuanto todo  $F(n, k)$ -plan es, a la vez, el  $F(n, \leq k)$ -plan, entonces  $N(n, \leq k) \leq N(n, k)$ . La desigualdad inversa para  $n \geq 2k$  se deduce del algoritmo que convierte el  $F(n, \leq k)$ -plan en  $F(n, k)$ -plan. En efecto, veamos una fila arbitraria del  $F(n, \leq k)$ -plan y denotemos con  $m$  el número de unidades en ella. Consideremos las columnas del plan que

en la fila elegida contienen cero. Está claro que entre estas  $n - m$  columnas pueden elegirse no menos de  $(n - m) - m = n - 2m$  tales columnas que la sustitución en ellas del elemento nulo destacado por la unidad conserve intacta la propiedad de distinguibilidad de las columnas del plan. Aprovechando esta circunstancia, completemos en cada fila el número de unidades del  $F(n, \leq k)$ -plan que faltan para obtener  $k$  unidades y, de este modo, transformémoslo en  $F(n, k)$ -plan.

Los resultados de los siguientes dos teoremas los obtuvo el matemático húngaro Katona [37].

**Teorema 12.**

$$\left\lceil \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rceil \leq N(n, \leq k) \leq \max \left\{ \left\lceil \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rceil, k \right\}.$$

*Demostración.* Por definición del  $F(n, \leq k)$ -plan, la cantidad total de unidades en el plan no sobrepasa de  $Nk$ . Sea  $n_i$  el número de columnas del plan que contienen  $i$  unidades. Por cuanto  $n_0 \leq 1$ ,  $n_i \leq N$ , tenemos

$$Nk \geq \sum_{i=0}^N in_i \geq n_1 + 2 \sum_{i=2}^N n_i = n_1 + 2(n - n_1 - n_0) \geq 2(n-1) - N,$$

de donde se desprende precisamente la estimación inferior. Para demostrar

la estimación superior, pongamos  $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rceil, k \right\}$  y

mostremos que existe un  $F(n, \leq k)$ -plan de dimensión  $N \times n$ .

Examinaremos diferentes columnas binarias de altura  $N$ . Dos columnas de este género,  $\vec{a} = (a_0, \dots, a_{N-1})^T$  y  $\vec{b} = (b_0, \dots, b_{N-1})^T$  se llamarán semejantes, si  $a_i = b_{(i+j) \bmod N}$  para cierto  $j$  natural y para todo  $i = 0, \dots, N-1$ . El conjunto de todas las columnas se divide en clases de equivalencia con relación a la semejanza. Está claro que la potencia de cada clase de este género será un divisor del número  $N$ . Cualesquiera dos columnas semejantes contienen un número igual de unidades. Una matriz compuesta por todas las columnas de una misma clase de equivalencia se denominará bloque.

Veamos un bloque de dimensión  $N \times N$ , generado por una columna cuyos primeros  $m < N$  lugares están ocupados por unidades, y los demás lugares, por ceros. No es difícil notar que para cualquier número natural  $r$ ,  $0 < r < N$ , pueden elegirse  $r$  columnas de este bloque de un modo tal que el número de unidades en cualesquiera dos filas de la matriz, formada por dichas columnas, se diferenciará no más que en 1. La matriz formada por las citadas  $r$  columnas se denominará bloque incompleto.

El  $F(n, \leq k)$ -plan se construirá ahora del modo siguiente. Contiene una columna compuesta sólo por ceros y  $N$  columnas, cada una de las cuales contiene un solo elemento unidad. Las demás columnas contienen cada una dos elementos unidad. Estos se disponen en el plan en bloques. El

último bloque puede ser incompleto. La cantidad total de columnas que contienen no más de dos unidades no es inferior a  $n$ :

$$1 + N + \frac{N(N-1)}{2} = 1 + \frac{N(N+1)}{2} \geq \frac{2(n-1)}{k+1} \frac{k+1}{2} = n.$$

Por consiguiente, al construir el plan, podemos en realidad servirnos sólo de tales columnas. En el plan construido la cantidad de unidades en cada fila no es superior a  $k$ . Efectivamente, la cantidad total de unidades en el plan es igual a  $2n - N - 2$ . Por cuanto la cantidad de unidades en cualesquiera dos filas se diferencia no más que en 1, cada fila, entonces, contiene no más de  $\left\lfloor \frac{2(n-1) - N}{N} \right\rfloor \leq k$  unidades. El teorema está demostrado.

**Corolario.**  $N(n, k) = \left\lfloor \frac{2(n-1)}{k+1} \right\rfloor$  para  $n \geq \frac{k(k+1)}{2} + 1$ .

**Teorema 13.** Se verifica la siguiente desigualdad:

$$N(n, k) \geq \frac{\log_2 n}{h(k/n)}$$

donde  $h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ .

*Demostración.* Hagamos uso de la propiedad de subaditividad de la entropía para obtener la estimación inferior de la magnitud  $N(n, k)$ . Supongamos que la  $(N \times n)$ -matriz  $A = [a_{ij}]$ , donde  $N = N(n, k)$ ,  $a_{ij} \in \{0, 1\}$ , es el  $F(n, k)$ -plan. En este caso  $A$  aplica el conjunto  $B_n^1$  de todas las sucesiones de longitud  $n$ , que se componen de una sola unidad y ceros, biunivocamente sobre cierto subconjunto del conjunto  $B_N$  de todas las  $(0, 1)$ -sucesiones de longitud  $N$ :

$$\vec{e} = A\vec{x}, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in B_n^1, \quad \vec{e} = (e_1, \dots, e_N)^T \in B_N.$$

Introduzcamos sobre el conjunto  $B_n^1$  una distribución uniforme  $\mathcal{P}$ :  $P(\vec{x}) = 1/n$ ,  $\vec{x} \in B_n^1$ . Debido a ello, sobre el conjunto  $A(B_n^1) \subseteq B_N$  se induce una distribución uniforme que se designará con la misma letra  $\mathcal{P}$ :  $P(\vec{e}) = 1/n$ , donde  $\vec{e} \in A(B_n^1)$ . La entropía  $H(\mathcal{P})$  de distribución de las probabilidades  $\mathcal{P}$  es igual, como es fácil de notar, a  $\log_2 n$ . Por otra parte, la distribución de las probabilidades  $\mathcal{P}$  en  $A(B_n^1)$  forma  $N$  distribuciones simples de probabilidades  $\mathcal{P}_i$ , definidas sobre las coordenadas de los vectores de  $B_N$ :  $P\{e_i = 1\} = k/n$ ,  $P\{e_i = 0\} = 1 - k/n$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Al calcular las últimas probabilidades se ha utilizado el hecho de que cada fila de la matriz  $A$  contiene exactamente  $k$  unidades. Al aplicar la propiedad de subaditividad de la entropía, obtenemos:  $\log_2 n = H(\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^N H(\mathcal{P}_i) = Nh(p)$ , donde  $p = k/n$ ,  $h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$  es la entropía de Shannon. Por consiguiente,  $\frac{\log_2 n}{h(p)} \leq N = N(n, k)$ .

**Corolario.** Sea  $n \rightarrow \infty$ ,  $k = k(n) = \lceil pn \rceil$ , donde el número  $p$  no depende de  $n$ , y  $0 < p < 1/2$ . Entonces resulta válida la siguiente fórmula asintótica:

$$N(n, k) = \frac{\log_2 n}{h(p)} (1 + o(1)).$$

*Demostración.* Construyamos un  $F(n, k)$ -plan concreto de longitud  $N = \frac{\log_2 n}{h(p)} (1 + o(1))$ . Por cuanto cada  $F(N, \leq k)$ -plan puede ser transformado, para  $n \geq 2k$ , en un  $F(n, k)$ -plan de la misma longitud será suficiente construir el correspondiente  $F(n, \leq k)$ -plan. Elijamos  $N$  mínimo natural, para el cual se verifica la desigualdad  $\binom{N}{\lfloor pN \rfloor} \geq n$ . Hallando por logaritmos esta desigualdad y empleando la fórmula de Stirling para los factoriales, no es difícil de concluir que para tal  $N$  es lícita la fórmula asintótica:  $N = \frac{\log_2 n}{h(p)} (1 + o(1))$ . El plan se construye a partir de las columnas de altura  $N$ , cada una de las cuales contiene exactamente  $\lfloor pN \rfloor$  unidades. Las columnas en el plan se disponen por bloques, empleando en caso de necesidad al final el bloque incompleto. Merced a tal disposición se asegura la diferencia entre el número de unidades en las filas del plan en no más de 1. La desigualdad  $\binom{N}{\lfloor pN \rfloor} \geq n$  garantiza que al construir el plan nos será suficiente la reserva de columnas, con la cantidad de unidades indicada en cada una de ellas. Por cuanto la parte de las unidades en cada columna del plan no es superior a  $p$ , mientras que la cantidad de unidades en cualesquiera dos filas se diferencia en no más de 1, cada fila contiene no más de  $k = \lceil pn \rceil$  unidades, es decir, dicho plan es realmente  $F(n, \geq k)$ -plan. El teorema queda así demostrado.

Aduzcamos una estimación superior para la magnitud  $N(n, \leq k)$ , la cual es próxima a la estimación inferior obtenida en el teorema anterior por el método de entropía (véase [88 y 89]). Observemos que es un tanto mejor que la estimación superior de Katona de [37].

**Teorema 14.** Se verifica la desigualdad

$$N(n, \leq k) \leq \left\lceil \frac{\log_2 n}{\log_2 \frac{n}{k}} \right\rceil \left\lceil \frac{n}{k} - 1 \right\rceil$$

La demostración está basada en la construcción del  $N(n, \leq k)$ -plan, partiendo del código binario de Rademajer. Así llamaremos una  $(0, 1)$ -matriz de dimensión  $\lceil \log_2 n \rceil \times n$ , cuyas columnas son todas diferentes. Para obtener algún código de Rademajer es suficiente tomar una potencia del número 2, la más próxima a  $n$  superiormente, y, al elegir cualesquiera

$n$  números inferiores a la citada potencia, escribirlos en columnas conforme al sistema de numeración con base 2.

Sea  $n = 3$ . Construyamos para este caso todos los códigos de Rademajer equivalentes con una exactitud de hasta una permutación de las columnas:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Nos hará falta la siguiente identidad sencilla, válida para cualquier número real  $x$  y natural  $n$ :

$$\left\lceil \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right\rceil = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor. \quad (9)$$

*Demostración del teorema.* Sean  $R = R(k)$  un código arbitrario de Rademajer de longitud  $k$ ,  $t$ , un número natural y  $s_0, \dots, s_{t-1}$ , números arbitrarios del conjunto  $\{0, 1\}$ . Partiendo de  $R$ , construyamos otro código de Rademajer  $R_{s_0}, \dots, R_{s_{t-1}}$  del modo siguiente. Tomemos cada fila con número  $i \in \{1, \dots, \lceil \log_2 k \rceil\}$  y sustituyamos en ella cada número  $l \in \{0, 1\}$  por el número  $(l + s_{(i-1) \bmod t}) \bmod 2$ .

Escribamos arbitrariamente uno tras otro todos los  $2^t$  códigos  $R_{s_0}, \dots, R_{s_{t-1}}$  y obtendremos una matriz  $M$  de dimensión  $\lceil \log_2 k \rceil \times 2^t k$ . Esta matriz se divide en  $\lambda_0 = \lceil t^{-1} \rceil \lceil \log_2 k \rceil = \lceil t^{-1} \log_2 k \rceil$  submatrices  $M_\lambda$ ,  $\lambda = 1, \dots, \lambda_0$  (véase (9)). Las submatrices  $M_\lambda$  están formadas, para  $\lambda \neq \lambda_0$ , por  $t$  filas de la matriz  $M$  con los números  $i = t(\lambda - 1) + 1, t(\lambda - 1) + 2, \dots, t\lambda$ . La submatriz  $M_{\lambda_0}$  está formada por las filas con los números  $i = t(\lambda_0 - 1) + 1, t(\lambda_0 - 1) + 2, \dots, \lceil \log_2 k \rceil$  y puede tener menos de  $t$  filas.

No es difícil notar que cualquier submatriz  $M_\lambda$  contiene, para  $\lambda \neq \lambda_0$ , cada una de las  $2^t$  columnas binarias de altura  $t$  exactamente  $k$  veces. Designemos el número de filas de la submatriz  $M_\lambda$  con  $\tau$ . Análogamente,  $M_{\lambda_0}$  contiene cada una de las  $2^t$  columnas binarias de altura  $\tau$  exactamente  $2^{t-\tau} \cdot k$  veces.

Denotemos con  $L_\mu$  una matriz compuesta de  $k$  columnas iguales de altura  $t$  que representa una notación en columna del número  $\mu \in \{0, 1, \dots, 2^t - 1\}$  con arreglo al sistema binario de numeración. Escribamos sucesivamente, una tras otra, todas las  $2^t$  matrices  $L_\mu$ ; designemos con  $M_0$  la matriz obtenida. Agreguemos superiormente a la matriz  $M$  la matriz  $M_0$  y designemos con  $\tilde{M}$  el resultado.

La matriz  $\tilde{M}$  contiene  $t + \lceil \log_2 k \rceil$  filas y  $2^t \cdot k$  columnas que son distintas dos a dos. Por consiguiente  $\tilde{M}$  es el código de Rademajer.

La demostración del teorema se basa en la construcción de un  $F(n, \leq k)$ -plan, partiendo del código  $\tilde{M}$ , donde el número natural  $t$  se determina unívocamente de la condición  $2^{t-1} < n/k \leq 2^t$ . Para cada  $\lambda = 0, \dots, \lambda_0 - 1$  construyamos la matriz  $M'_\lambda$  compuesta de  $n$  columnas de altura

$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1$ . En cada columna todos los elementos son nulos, a excepción, quizás, de un elemento igual a 1, y en  $M'_\lambda$  cada columna no nula figura no más de  $k$  veces. En este caso dos columnas en  $M'_\lambda$  son iguales cuando y sólo cuando lo son las columnas con los números correspondientes en  $M_\lambda$ . Observemos que mediante dichas propiedades la matriz  $M'$  se define no unívocamente. Para nosotros tiene importancia el hecho de que tal matriz siempre existe. Está claro que cada fila de  $M'_\lambda$  contiene no más de  $k$  unidades.

De un modo análogo construyamos la matriz  $M'_{\lambda_0}$ . Esta consta de  $n$  columnas de altura  $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 2^{t-1}$ . Cada una de estas columnas es o bien íntegramente nula, o bien contiene una sola unidad. Cada columna no nula figura en  $M'_{\lambda_0}$  no más de  $k$  veces, mientras que la columna nula, no más de  $2^{t-1} \cdot k$  veces. Las columnas en  $M'_{\lambda_0}$  se disponen de un modo tal que de la condición de igualdad de dos columnas en  $M'_{\lambda_0}$  se deduce la igualdad de las columnas correspondientes en  $M'_{\lambda_0}$ . Cada fila de  $M'_{\lambda_0}$  contiene también no más de  $k$  unidades.

Escribamos sucesivamente, una debajo de la otra, las matrices  $M'_0, M'_1, \dots, M'_{\lambda_0}$  y designemos el resultado con  $\tilde{M}'$ . Todas las columnas en  $\tilde{M}'$ , y, por tanto, en  $M'$  son distintas de dos en dos. Cada fila de  $\tilde{M}'$  contiene  $k$  unidades a lo sumo. Por consiguiente,  $\tilde{M}'$  es un  $F(n, \leq k)$ -plan. Estimemos su longitud  $N$ :

$$\begin{aligned}
 N &= \lambda_0 \left( \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 \right) + \left( \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 2^{t-1} \right) \leq (\lambda_0 + 1) \times \\
 &\times \left( \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 \right) = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 + \frac{\log_2 k}{t} - \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 \leq \\
 &\leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1 \frac{\log_2 k}{\log_2 \frac{n}{k}} \left\lceil \frac{n-k}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{\log_2 n}{\log_2 \frac{n}{k}} \right\rceil \left\lceil \frac{n-k}{k} \right\rceil.
 \end{aligned}$$

El teorema está demostrado.

Ilustremos la construcción del  $F(n, \leq k)$ -plan con un ejemplo en que  $n = 20$  y  $k = 5$ . Tenemos:  $t = \left\lceil \log_2 \frac{n}{k} \right\rceil = 2$ . Veamos el código de Rademajer  $R$  de longitud 5:

$$\begin{array}{r}
 11100 \\
 R: 11010 \\
 10110
 \end{array}$$



Determinemos  $R_{00}, R_{01}, R_{10}, R_{11}, L_0, L_1, L_2, L_3$ :

$$\begin{array}{l}
 R_{00}: \begin{array}{l} 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0; \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array} \quad R_{01}: \begin{array}{l} 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1; \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array} \quad R_{10}: \begin{array}{l} 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0; \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array} \\
 R_{11}: \begin{array}{l} 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1; \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array} \quad L_0: \begin{array}{l} 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0; \end{array} \quad L_1: \begin{array}{l} 0\ 0\ 0\ 0\ 0; \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1; \end{array} \\
 L_2: \begin{array}{l} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0; \end{array} \quad L_3: \begin{array}{l} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1. \end{array}
 \end{array}$$

Las construcciones posteriores del código  $\tilde{M}$  y del  $F(20, 5)$ -plan se ven del diagrama siguiente.

Código  $\tilde{M}$ :

$$\begin{array}{l}
 M_0: \begin{array}{l} 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \\
 M: \left\{ \begin{array}{l} M_1: \begin{bmatrix} 11100 & 11100 & 00011 & 00011 \\ 11010 & 00101 & 11010 & 00101 \end{bmatrix} \\ M_2: \begin{bmatrix} 10110 & 10110 & 01001 & 00101 \end{bmatrix} \end{array} \right.
 \end{array}$$

$F(20, 5)$ -plan

$$\begin{array}{l}
 M_0^1: \begin{bmatrix} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix} \\
 M_1^1: \begin{bmatrix} 1\ 1\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 1\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 & 1\ 1\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0\ 1 & 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 0\ 0\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix} \\
 M_2^1: \left\{ \begin{array}{l} 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \quad 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \quad 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \quad 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

De los teoremas 13 y 14 se deduce un

**Corolario.** Sea  $n \rightarrow \infty$ ,  $k = k(n) = o(n)$ . En este caso es válida la fórmula asintótica:

$$N(n, k) = \frac{n \log_2 n}{k \log_2 k} (1 + o(1)).$$

## CAPÍTULO 8 ANÁLISIS COMBINATORIO EN LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

En los capítulos 2 . . . 7 de este libro se han descrito sistemáticamente los métodos de resolución de los problemas combinatorios. Sin embargo, se hace cada vez más evidente (en particular, cuando se trata de resolver problemas de tipo extremal) la necesidad imperiosa de analizar más profundamente la estructura de los conjuntos discretos. De esto depende directamente la posibilidad del desarrollo ulterior de la teoría combinatoria general, como también, sobre todo, de las aplicaciones de la misma. El objetivo de este capítulo consiste en introducir al lector en el dominio de las tentativas modernas de extender el análisis combinatorio a los conjuntos de naturaleza más general. Las principales de las propiedades estructurales de los conjuntos, que estudiaremos aquí, son las de ordenación y de independencia.

El capítulo comienza por la descripción de los conjuntos discretos con ordenaciones parciales definidas sobre los mismos. A continuación se analizan más detalladamente los retículos que representan una clase de conjuntos más estrecha, pero muy importante para el análisis combinatorio. Para poder operar con conjuntos parcialmente ordenados se introducen las álgebras de incidencia. Una atención especial se presta en este caso a la operación de inversión y a la función de Moebius relacionada con dicha operación. Por fin, en el capítulo han sido incluidos los fundamentos de la teoría de los matroides la cual representa amplias generalizaciones, que permiten ligar las bases de la teoría combinatoria con toda una serie de ramas de las matemáticas, en primer lugar, con el álgebra moderna y con la topología.

### 8.1. CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto ordenado parcialmente. Si  $|A| < \infty$ , el conjunto parcialmente ordenado se denomina *finito*. Si  $a$  y  $b$  son elementos del conjunto parcialmente ordenado  $A$  y si, además,  $a \leq b$ , entonces el conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

lleva el nombre de *intervalo*. El conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  es *localmente finito*, siempre que  $|[a, b]| < \infty$ , cualesquiera que sean  $a, b \in A$ . Los conjuntos parcialmente ordenados  $(A, \leq)$  y  $(B, \leq)$  se llaman *isomorfos* y se designan  $(A, \leq) \cong (B, \leq)$ , si existe tal aplicación biunívoca  $\varphi$  del conjunto  $A$  sobre el  $B$  que la expresión  $a_1 \leq a_2$  tiene lugar cuando y sólo cuando

$\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$ . Indiquemos que la biunivocidad de la aplicación  $\varphi$  puede deducirse de la última condición.

Recordemos que los elementos  $a$  y  $b$  se llaman *comparables*, si  $a \leq b$ , o bien  $b \leq a$ . De lo contrario,  $a$  y  $b$  se llaman *incomparables* y se designan:  $a \parallel b$ . Así pues, la *cadena* es un conjunto parcialmente ordenado, en el cual no hay elementos incomparables. Se denomina *anticadena* a un conjunto parcialmente ordenado, en el cual  $a \parallel b$  para todo  $a \neq b$ .

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto ordenado parcialmente, y sea  $B$  un subconjunto no vacío del conjunto citado. Entonces, en  $B$  existe un orden natural parcial  $\leq_B$  inducido por la relación  $\leq$ . Llamemos  $(B, \leq_B)$  *subconjunto parcialmente ordenado* del conjunto  $(A, \leq)$ .

Antes de introducir definiciones nuevas, veamos una serie de ejemplos importantes de los conjuntos parcialmente ordenados que nos harán falta en la exposición ulterior de la materia.

**EJEMPLO 1.** Un conjunto trivial parcialmente ordenado (o una anticadena), es decir, un conjunto en el que  $a \leq b$ , si y sólo si  $a = b$ .

**EJEMPLO 2.** Un conjunto  $N$  de todos los números naturales de orden corriente, es decir,  $n \leq m$  cuando y sólo cuando  $m - n$  es no negativo. El conjunto  $(N, \leq)$  es linealmente ordenado y localmente finito.

**EJEMPLO 3.** Un conjunto de números reales con orden corriente. Es linealmente ordenado, pero no es parcialmente ordenado y localmente finito.

**EJEMPLO 4.** Un conjunto  $\mathcal{P}(S)$  de todos los subconjuntos del conjunto  $S$ , ordenado por inclusión, es decir, si  $A, B \in \mathcal{P}(S)$ , entonces  $A \leq B$  en  $\mathcal{P}(S)$  cuando y sólo cuando  $A \subseteq B$  ( $A$  es un subconjunto del conjunto  $B$ ). El conjunto  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  no es linealmente ordenado; por ejemplo, los subconjuntos arbitrarios de un solo elemento no son comparables. Si  $|S| < \infty$ , entonces  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  es también finito. De lo contrario,  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  ni siquiera será conjunto localmente finito.

**EJEMPLO 5.** Un conjunto  $Z$  de números enteros ordenados por divisibilidad, es decir,  $a \leq b$  cuando y sólo cuando  $a \mid b$  ( $a$  divide a  $b$ ). El conjunto  $(Z, \mid)$  es localmente finito, pero no es linealmente ordenado.

**EJEMPLO 6.** Un conjunto  $D(n)$  de todos los divisores de un número entero  $n$  ordenado por divisibilidad. Este conjunto es un subconjunto parcialmente ordenado del conjunto  $(Z, \mid)$ .

**EJEMPLO 7.** Un conjunto  $P(n)$  de particiones de un número natural  $n$  (se denomina *partición* de un número natural  $n$  a toda sucesión finita no creciente de números naturales  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , para la cual  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$ ; los números  $\lambda_i$  suelen llamarse *partes* de la partición), ordenadas de un modo tal que si  $\lambda, \mu \in P(n)$ , entonces  $\lambda \leq \mu$  cuando y sólo cuando al sumar las partes separadas de la partición  $\lambda$ , puede obtenerse la partición  $\mu$ . Por ejemplo,  $3 + 1 + 1 = (1^2, 3)$ ;  $4 + 1 = (1, 4)$ ;  $3 + 2 = (2, 3)$  son particiones del número 5, y, además,  $(1^2, 3) \leq (1, 4)$  y  $(1^2, 3) \leq (2, 3)$ , mientras que  $(1, 4)$  y  $(2, 3)$  son incomparables en  $P(5)$ .

**EJEMPLO 8.** Se denomina partición no ordenada de un conjunto finito  $S$  a la colección  $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$  de sus subconjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, cuya unión es igual a  $S$ ; los subconjuntos  $\pi_i$  llevan el nombre de bloques de la partición. Veamos un conjunto  $B(S_n)$  de todas las particiones no ordenadas del conjunto  $S_n$ , compuesto por  $n$  elementos y ordenados conforme a la unión de bloques, es decir,  $\pi \leq \tau$  cuando y sólo cuando cada bloque  $\pi_i$ , perteneciente a  $\pi$ , está contenido en cierto bloque  $\tau_j$ , perteneciente a  $\tau$  (o bien, dicho de otro modo, cada bloque  $\tau_j$  se obtiene «pegando» ciertos bloques de  $\pi$ ).

**EJEMPLO 9.** Un conjunto de todos los subespacios del espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V_n(q)$  sobre un campo de  $q$  elementos ordenados por inclusión, es decir, si  $U$  y  $V$  son los subespacios de  $V_n(q)$ , entonces  $U \leq V$  cuando y sólo cuando  $U$  es un subespacio de  $V$ .

**EJEMPLO 10.** Un conjunto de todas las caras de un poliedro convexo  $d$ -dimensional (por poliedro convexo  $d$ -dimensional se entiende un conjunto acotado  $d$ -dimensional de puntos del espacio euclídeo que puede ser representado como una intersección de un número finito de semiespacios), ordenadas por inclusión.

Los conjuntos parcialmente ordenados mencionados en los ejemplos 6 . . . 10 son finitos.

Se llama *cadena*  $C$  en un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  su subconjunto no vacío el cual, siendo parcialmente ordenado, constituye una cadena. Recibe el nombre de *anticadena* en un conjunto parcialmente ordenado un subconjunto no vacío suyo el cual, siendo parcialmente ordenado, constituye una anticadena. La *longitud*  $l(C)$  de una cadena finita  $C$  es un número igual a  $|C| - 1$ . Se dice que el conjunto parcialmente ordenado  $A$  es de *longitud*  $n$  (la designación es  $l(A) = n$ ), si en  $A$  existe una cadena de longitud  $n$  y todas las demás cadenas en  $A$  tienen una longitud no superior a  $n$ . Diremos que el conjunto parcialmente ordenado  $A$  tiene una longitud finita, si su longitud es igual a  $n$ , y  $n \neq \infty$ . Diremos que la *anchura* de un conjunto parcialmente ordenado  $A$  es igual a  $n$ , si existe en  $A$  una anticadena compuesta de  $n$  elementos, mientras que todas las anticadenas restantes de  $A$  contienen no más de  $n$  elementos. Observemos que la longitud de un conjunto linealmente ordenado  $A$  es igual a  $|A| - 1$ , y la anchura, a 1.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  elementos. Hallemos la anchura del booleano  $\mathcal{P}(S)$ , es decir del conjunto parcialmente ordenado del ejemplo 4. La respuesta a esta pregunta la da el teorema siguiente que se debe a Sperner.

**Teorema 1.** Sea  $\mathcal{P}(S)$  un booleano,  $|S| = n$ . Entonces, la anchura de  $\mathcal{P}(S)$  es igual a  $\binom{n}{[x]}$ , donde  $[x]$  es una parte entera de  $x$ .

La demostración del teorema se desprende directamente del siguiente lema.

**Lema 1.** Sea  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$  una anticadena arbitraria en  $\mathcal{P}(S)$ , donde

$|S| = n$ . En este caso se verifica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1.$$

*Demostración del lema.* Examinemos en  $\mathcal{P}(S)$  las cadenas  $\emptyset = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_n = S$ , tales que  $|B_k| = k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . El número de todas estas cadenas en  $\mathcal{P}(S)$  es igual a  $n!$ . Veamos entre dichas cadenas aquellas que «pasan» por el subconjunto  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Sea  $|A_i| = r$ . Entonces, las cadenas citadas tienen la forma siguiente:

$$B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{r-1} \subset A_i \subset B_{r+1} \subset \dots \subset B_n.$$

El número de subcadenas  $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{r-1}$  es igual a  $|A_i|! = r!$ , mientras que el número de subcadenas  $B_{r+1} \subset \dots \subset B_n$  es igual a  $(n - |A_i|)! = (n - r)!$ . Por consiguiente, el número total de cadenas que tienen la longitud  $n$  y que pasan por  $A_i$  es igual a  $|A_i|!(n - |A_i|)!$ .

Cuando  $i \neq j$ , las cadenas que pasan por  $A_i$  y  $A_j$  son diferentes. Efectivamente, supongamos que  $A_i, A_j$  ( $i \neq j$ ) pertenecen a una misma cadena. Existen, pues, tales elementos  $B_k$  y  $B_l$  de la cadena que  $A_i = B_k$  y  $A_j = B_l$ . Pero, en este caso, o bien  $A_i \subset A_j$ , lo que contradice la suposición sobre la incomparabilidad de  $A_i$  y  $A_j$ .

De aquí, el número total de cadenas de longitud  $n$  que pasan por todos los subconjuntos de la anticadena es igual a

$$\sum_{i=1}^m |A_i|!(n - |A_i|)!$$

Mas esta magnitud no sobrepasa el número total de todas las cadenas de longitud  $n$ , por lo cual

$$\sum_{i=1}^m |A_i|!(n - |A_i|)! \leq n!.$$

De aquí proviene la desigualdad<sup>1)</sup>

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1,$$

lo que se trataba de demostrar.

*Demostración del teorema 1.* Sea  $(B_1, \dots, B_k)$  una familia de todos los subconjuntos del conjunto  $S$ , compuestos de  $\left[ \frac{n}{2} \right]$  elementos. Entonces,

<sup>1)</sup> Muy a menudo en la literatura esta desigualdad se denomina de Lubel, quien la demostró en 1966. Sin embargo, fue obtenida con anterioridad, independientemente, por Yamamoto (1954) y L. Meshalkin (1963).

evidentemente, esta familia, siendo un subconjunto de  $\mathcal{A}(S)$  será una anticadena y  $k = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ . Demostremos ahora que todas las demás anticadenas en  $\mathcal{A}(S)$  no son superiores en potencia a  $k$ .

Efectivamente, sea  $(A_1, \dots, A_m)$  una anticadena arbitraria de  $\mathcal{A}(S)$ . Entonces, en virtud del lema 1 y la desigualdad evidente

$$\binom{n}{|A_i| = k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

tenemos

$$\frac{m}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1.$$

Por consiguiente,  $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = k$ , lo que se requería de demostrar. De-

sempeña un papel importante el principio siguiente referente a los conjuntos finitos parcialmente ordenados. Dicho principio confirma la existencia de una numeración concordada con el orden.

**Teorema 2.** Sea  $(A, <)$  un conjunto finito parcialmente ordenado. En este caso los elementos de  $A$  pueden numerarse de un modo tal:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  que de  $a_i < a_j$  se deduzca  $i < j$ .

*Demostración.* Pongamos  $X_m = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ , donde la numeración primaria  $A = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  está elegida de una manera cualquiera. Construyamos una sucesión de aplicaciones biunívocas  $\varphi_m$  de los conjuntos  $\{1, 2, \dots, m\}$  sobre sí mismo, tal que cada subconjunto  $X_m$ , numerado por medio de  $\varphi_m: X_m = \{a_1^m, \dots, a_m^m\}$ , donde  $a_i^m = b_{\varphi_m(i)}$ , satisfaga la afirmación enunciada en el teorema: de  $a_i^m < a_j^m$  se deduce que  $i < j$ .

Cuando  $m = 1$ , la aplicación biunívoca  $\varphi_1$  se construye unívocamente. Supongamos que una aplicación biunívoca

$$\varphi_{n-1}: \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$$

con la propiedad requerida ya está construida. Designemos con  $k$  el número menor de aquellos números  $i$  que poseen la propiedad  $b_n < a_i^{n-1}$ . Construyamos una aplicación biunívoca  $\varphi_n: \{1, \dots, n-1, n\} \rightarrow \{1, \dots, n-1, n\}$  del modo siguiente:

$$\varphi_n(i) = \begin{cases} i, & \text{si } i < k; \\ n, & \text{si } i = k; \\ i + 1, & \text{si } i > k. \end{cases}$$

En otras palabras, introduzcamos  $b_n$  entre  $a_k^{n-1}$  y  $a_k^{n-1}$ . Comprobemos que

$\varphi_n$  posee las propiedades requeridas. Si  $a_i^n < a_j^n$ , y  $\{a_i^n, a_j^n\} \subset X_{n-1}$ , entonces, por hipótesis de la inducción,  $i < j$ . Si  $b_n = a_k^n < a_j^n$ , entonces  $k < j$  por construcción. En fin, si  $a_i^n < a_k^n = b_n$ , entonces  $a_i^n < a_k^n < a_{k+1}^n$ , de donde  $a_i^n < a_{k+1}^n$ , por ser transitiva la relación de orden, y por fin,  $i < k + 1$  por hipótesis de la inducción, puesto que  $\{a_i^n, a_{k+1}^n\} \subset X_{n-1}$ . Por consiguiente, también aquí  $i < k$  (el caso de  $i = k$  es imposible); la demostración del teorema queda terminada.

En los conjuntos parcialmente ordenados resulta útil resaltar los elementos de ciertos tipos especiales. El elemento  $M$  del conjunto parcialmente ordenado  $A$  se denomina *máximo* (último elemento), si en  $A$  no existe un elemento  $a$  «mayor» que  $M$ , es decir,  $a \geq M$  no se verifica, cualquiera que sea  $a \in A$ , distinto de  $M$ . Por analogía, un elemento  $m \in A$  se denomina *mínimo* (primer elemento), si en  $A$  no existe un elemento  $a \in A$ , distinto de  $m$ , y tal que  $a \leq m$ . El elemento  $a \in A$  se llama *maximal* si para cada  $c \in A : c \leq a$ . El elemento  $b \in A$  se llama *minimal* si para cada  $c \in A : c \geq b$ . Para los elementos maximal y minimal de un conjunto parcialmente ordenado se usarán también las designaciones 1 (unidad) y 0 (cero), respectivamente. Es fácil comprobar que todo elemento maximal es máximo y todo elemento minimal es mínimo. La afirmación recíproca, hablando en general, no tiene lugar. Así, por ejemplo, en un conjunto trivial parcialmente ordenado todo elemento es tanto máximo, como mínimo. Otro ejemplo de elementos mínimos pero no minimales nos lo dan los números primos en el conjunto de números positivos enteros  $\{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ , ordenado por divisibilidad igual que en el ejemplo 5. El cero en el conjunto  $P(n)$  del ejemplo 7 será  $(1^n)$ ; en el booleano  $\mathcal{P}(S)$ , el conjunto vacío  $\emptyset$ , y en belliano  $B(S_n)$ , la partición  $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ . Las unidades en estos conjuntos parcialmente ordenados también existen y son iguales a  $n, S$  y  $S_n$ , respectivamente.

Observemos que la definición de elemento minimal se obtiene de la definición de elemento maximal sustituyendo simplemente el símbolo  $\leq$  por  $\geq$ . De este mismo modo están relacionados los conceptos de elementos máximo y mínimo. En general, al disponer de una afirmación referente a un conjunto parcialmente ordenado y al sustituir  $\leq$  por  $\geq$ , obtenemos una afirmación nueva. Las afirmaciones relacionadas entre sí mediante el modo citado se llaman *duales*.

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. La relación  $\geq$  (donde  $a \geq b$  significa que  $b \leq a$ ) es también relación de orden sobre  $A$ . De este modo,  $(A, \geq)$  es también un conjunto parcialmente ordenado que se llama *dual* respecto del conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$ . Ahora, si  $\Phi$  es una afirmación referente a los conjuntos parcialmente ordenados, entonces, al sustituir todos los signos  $\leq$  por  $\geq$ , obtendremos una afirmación dual respecto de la afirmación  $\Phi$ .

**Principio de dualidad.** Si una afirmación  $\Phi$  es cierta para todos los conjuntos parcialmente ordenados, la afirmación dual respecto a  $\Phi$  también será lícita para todos los conjuntos parcialmente ordenados.

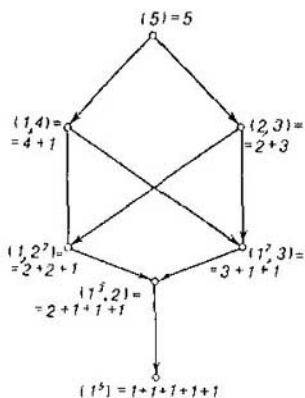


Fig. 8.1.

Este principio es válido por la simple razón de que  $\Phi$  tiene lugar en el conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  cuando y sólo cuando la afirmación dual respecto de  $\Phi$  tiene lugar en el conjunto parcialmente ordenado  $(A, \geq)$ .

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que un elemento  $a \in A$  cubre el elemento  $b \in B$ , o bien  $b$  se cubre por el elemento  $a$  (la designación es:  $a > b$ , o bien  $b < a$ ), si  $a > b$  y no existe  $c \in A$ , tal que se verifique  $a > c > b$ . El elemento  $a$  se llama átomo, si  $a > 0$ , y coátomo, si  $a < 1$ . Para el caso en que  $a$  cubre  $b$  o coincide con éste, la designación será  $a \geq b$ .

Se denomina *diagrama de Hasse* de un conjunto parcialmente ordenado  $A$  a un grafo orientado, cuyos vértices son los elementos del conjunto  $A$ , mientras que el arco  $(a, b)$  está presente cuando y sólo cuando  $a$  cubre  $b$  en el conjunto parcialmente ordenado  $A$ . Se acostumbra a representar los arcos en este grafo en dirección hacia abajo. En la fig. 8.1 se muestra el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado  $P(5)$  del ejemplo 7.

Los coátomos en  $P(5)$  son  $(1, 4)$  y  $(2, 3)$ ; el átomo es  $(1^3, 2)$ . En  $P(5)$  se tienen en total 7 elementos. Los valores de  $|P(n)|$  crecen muy rápidamente a medida que aumente  $n$ ; por ejemplo:  $|P(6)| = 11$ ,  $|P(10)| = 42$ ,  $|P(20)| = 627$ ,  $|P(50)| = 204\ 226$ ,  $|P(100)| = 190\ 569\ 292$ .

Los diagramas de Hasse para el booleano  $\mathcal{A}(S)$ , donde  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  y para el conjunto parcialmente ordenado  $D(20)$  del ejemplo 6 se aducen en las figs. 8.2 y 8.3, respectivamente. En el primer conjunto los átomos son todos los subconjuntos de un solo elemento, a saber,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ , y en el segundo, los números 2 y 5.

Sea  $A$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces su diagrama de Hasse es un grafo orientado sin contornos. Por analogía con la teoría de los grafos, se denomina *matriz de adyacencia* del diagrama de Hasse de un conjunto parcialmente ordenado  $A$  a la matriz cuadrada  $\|k_{ij}\|$  de orden  $|A|$ , en la que  $k_{ij} = 1$ , si  $(a_i, a_j)$  es un arco en el diagrama de Hasse (o bien, lo que es equivalente,  $a_j < a_i$  en  $A$ ), y  $k_{ij} = 0$ , en el caso contrario. Esta matriz coincide con la matriz de la función de recubrimiento del álgebra estándar de incidencia  $S(A)$  (véase más abajo el párrafo 8.3).

Detengámonos brevemente en los métodos de numeración, concordada con el orden, cuya existencia se garantiza por el teorema 2. Diremos que el elemento  $a$  es un *ascendiente* del elemento  $b$ , o que  $b$  es un *descendiente* de  $a$ , siempre que  $a > b$  en  $A$ .



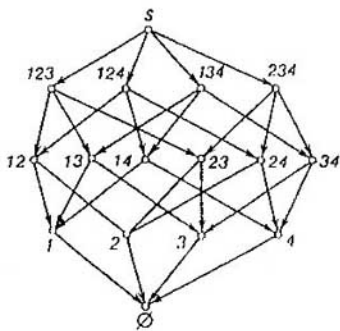


Fig.8.2.

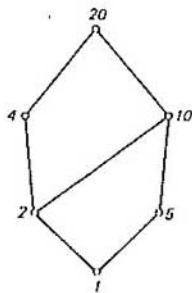


Fig.8.3.

Veamos el problema siguiente que es de importancia en las aplicaciones:  
*Divídanse todos elementos de un conjunto parcialmente ordenado  $A$  en capas de un modo tal que:*

- todos los elementos de una capa dada no tengan descendientes en la capa siguiente;
- los elementos de la primera capa no tengan descendientes, y los de la capa última no tengan ascendientes;
- cada capa constituya una anticadena en  $A$ .

He aquí uno de los métodos de resolución de este problema. Sea  $K$  una matriz de adyacencia del diagrama de Hasse de un conjunto parcialmente ordenado  $A$ . Denotemos con  $\vec{a}, \vec{b}$  los vectores columna de esta matriz. Calculemos el vector  $\vec{a}_1 = \sum_{a \in A} \vec{a}$ , y agréguémoslo a la matriz  $K$  escribiéndolo a la derecha. Designemos con  $A_1$  un subconjunto del conjunto  $A$ , a cuyos elementos en el vector columna  $\vec{a}_1$  corresponden ceros. Estos ceros significan que los elementos del conjunto  $A_1$  no tienen descendientes. Por eso el conjunto  $A_1$  forma la primera capa.

Calculemos ahora el vector  $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 - \sum_{a \in A_1} \vec{a}$ . A los ceros de este vector columna  $\vec{a}_2$  corresponden los elementos del conjunto  $A_2$  que forman la segunda capa. Calculemos el vector  $\vec{a}_3 = \vec{a}_2 - \sum_{a \in A_2} \vec{a}$ , y consideremos los elementos del conjunto  $A_3$ , correspondientes a los ceros del vector columna, ubicados en la tercer capa. Seguiremos con los cálculos hasta que se obtenga un vector columna compuesto exclusivamente por ceros. Consideremos todos los elementos restantes del conjunto  $A$  situados en la última capa. Para demostrar que la partición obtenida es la buscada, observemos que en cada etapa del cálculo hallamos los elementos del conjunto sin descendientes.

Ilustremos este método con un ejemplo concreto. Sea  $A$  un conjunto

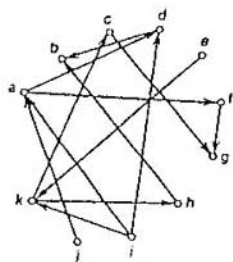


Fig.8.4.

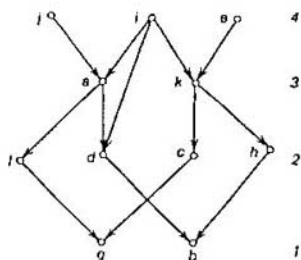


Fig.8.5.

parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse se expone en la fig. 8.4. Todos los cálculos para la resolución del problema se aducen en la tabla. El diagrama de Hasse se da en la fig. 8.5.

Tabla 8.1

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
a	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2	2	0	X
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	X	X
c	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	X	X
d	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	X	X
e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
f	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	X	X
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	X	X
h	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	X	X
i	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3	3	2	0
j	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
k	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2	0	X
Capas												1	2	3	4
Elementos												b, g	c, d, f, h	a, k	e, i, j

*Observación.* Al realizar el método examinado de partición en capas con ayuda de un ordenador, hace falta agregar a la matriz  $K$  la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

con el fin de distinguir los ceros (0) y lugares vacíos (X). En este caso los ceros se harán unidades, y las X, ceros.

Al numerar arbitrariamente los elementos de un conjunto parcialmente ordenado  $A$  dentro de la capa 1, luego, dentro de la capa 2, etc., obtendremos una numeración concordada con el orden del conjunto  $A$ . Por ejemplo, los elementos de un conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse se expone en la fig. 8.4, podemos numerarlos así:  $bghcdfkaejj$ , o bien  $gbcdfhakeji$ , o bien  $bgfdchakjie$ , etc. Hemos de notar que, aceptada tal numeración de los elementos,  $K$  será una matriz triangular superior.

Es prácticamente imposible numerar, con ayuda del método aducido, todas las permutaciones de los elementos del conjunto parcialmente ordenado  $A$  concordadas con el orden de  $A$ . Por eso, recomendamos que el mismo lector elabore, a título de ejercicio, el método de numeración de las permutaciones de los elementos de un conjunto parcialmente ordenado concordadas con el orden del mismo, mas dicha recomendación ha de realizarse después de estudiar el material del § 8.3.

Una cadena, en la que cada subconjunto no vacío posee un elemento mínimo, se llama *bien ordenada*. Un conjunto bien ordenado constituye una cadena finita. Un conjunto de números naturales, ordenado de un modo natural, es también bien ordenado. Un conjunto de todos los números enteros no está bien ordenado con relación al orden natural, puesto que no tiene el elemento mínimo. Sin embargo, se hace bien ordenado, si el orden se establece del modo siguiente:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots < 0 < -1 < -2 < -3 < -4 < \dots,$$

donde todos los números positivos preceden a los restantes. Otro ejemplo de una cadena que no está bien ordenada es el segmento  $[0, 1]$ , pues, por ejemplo, el intervalo  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  no contiene el elemento minimal.

La importancia de los conjuntos bien ordenados consiste en la posibilidad de aplicar el *método* de inducción, o sea de la llamada *inducción transfinita* que se conoce por los conjuntos numerables y finitos en el caso de los conjuntos bien ordenados. La esencia de este método consiste en lo siguiente: sea  $P$  una afirmación concerniente a los elementos de un conjunto bien ordenado  $A$ . Si  $P$  se cumple para el elemento minimal (o «primero») del conjunto  $A$ , y de la validez de la afirmación  $P$  para todo  $x < a$  se deduce su validez para el elemento  $a$ , entonces la afirmación  $P$  se cumple para todos los elementos del conjunto bien ordenado  $A$ .

En efecto, supongamos cumplidas las premisas de la condición de inducción. Veamos un subconjunto  $B$  de todos los elementos de  $A$ , para los cuales no se cumple la afirmación  $P$ . Si la conclusión de la inducción no tiene lugar, entonces  $B$  es no vacío. Por cuanto  $A$  es bien ordenado, en  $B$  se tiene el elemento mínimo  $a$ . Según la condición, este elemento no puede ser elemento minimal del conjunto  $A$ . Si  $x < a$ , entonces  $x \in B$ , y, por lo tan-

to, para  $x$  es válida la afirmación  $P$  según la condición. Mas en este caso para  $a$  es válida la afirmación  $P$ . Hemos llegado a una contradicción. Esto quiere decir, que el conjunto  $B$  es vacío y la afirmación  $P$  es válida para todo  $b \in A$ .

Se dice que un conjunto parcialmente ordenado  $A$  satisface la *condición de mínimo* (de máximo, respectivamente), si cada subconjunto no vacío del conjunto  $A$  es un conjunto parcialmente ordenado que contiene elementos minimales (maximales).

Cualquier conjunto bien ordenado  $A$  satisface la condición de mínimo, y el conjunto  $A^*$ , dual respecto de  $A$ , satisface la condición de máximo. Como ejemplo de tal conjunto interviene el conjunto de números naturales de orden corriente que satisface la condición del mínimo, pero no satisface la del máximo.

Diremos que un conjunto parcialmente ordenado satisface la *condición de rotura de las cadenas decrecientes* (la *condición de rotura de las cadenas crecientes*, respectivamente), si para una sucesión numerable arbitraria  $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  de elementos de  $A$  tal que  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  ( $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ , respectivamente) existe un número  $k$ , tal que  $a_n = a_k$  para todo  $n \geq k$ .

**Teorema 3.** En un conjunto parcialmente ordenado  $A$  la condición de mínimo (de máximo, respectivamente) es equivalente a la condición de rotura de las cadenas decrecientes (crecientes).

*Demostración.* Supongamos que se cumple la condición de mínimo y que  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  es una cadena numerable de elementos de  $A$ . Sea  $a$  el elemento mínimo en un subconjunto  $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  del conjunto  $A$ . Entonces,  $a = a_k$  para cierto  $k$ , y, por consiguiente,  $a_n = a = a_k$  para todo  $n \geq k$ .

Al contrario, supongamos que se cumple la condición de rotura de las cadenas decrecientes y que  $B$  es un subconjunto no vacío del conjunto  $A$ . En este caso  $B$  contiene el elemento  $a_1$ , y si  $a_1$  no es mínimo en  $B$ , existe un elemento  $a_2 \in B$  tal que  $a_1 > a_2$ . Supongamos que existen tales  $a_1, \dots, a_n \in B$  que  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ . En este caso, o bien  $a_n$  es mínimo en  $B$ , o bien existe un elemento  $a_{n+1} \in B$  tal que  $a_n > a_{n+1}$ . De aquí concluimos que o bien  $B$  tiene un elemento mínimo, o bien existe una cadena infinita  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$  de elementos de  $B$ . Por hipótesis, es posible sólo el primer caso.

De un modo dual se establece la validez de la parte restante del teorema, el cual queda, pues, completamente demostrado.

**Ejercicio.** Demuéstrese que

1. Si una cadena  $C$  y otra cadena, dual respecto de  $C$ , en un conjunto dual parcialmente ordenado están bien ordenadas, entonces  $C$  contiene un número finito de elementos.

2. Si un conjunto parcialmente ordenado no contiene ni cadenas infinitas ni anticadenas infinitas, es finito.

3. Un conjunto finito satisface las condiciones de mínimo y de máximo.

4. Si una cadena no es bien ordenada, contiene una subcadena que es dual respecto de una serie natural.

5. Un conjunto ordenado local finito parcialmente satisface la condición del mínimo.

Si  $A$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces el conjunto de todas las cadenas será parcialmente ordenado de por sí con ayuda de una inclusión teórico-multiplicativa. Los elementos máximos de este último conjunto, si existen, se denominan cadenas máximas del conjunto  $A$ . En otras palabras, una cadena  $C$  del conjunto parcialmente ordenado  $A$  se llama cadena máxima, si para todo elemento  $a$  de  $A$ , no perteneciente a  $C$ , el subconjunto  $C \cup \{a\}$  ya no es una cadena.

Al estudiar los conjuntos infinitos hemos de emplear frecuentemente el siguiente *axioma de elección*:

Dado un conjunto  $A$ , existe una función  $\varphi$  que a todo conjunto no vacío  $B$  de  $A$  le hace corresponder un elemento determinado  $\varphi(B)$  de este subconjunto.

Dicho de otro modo, la función  $\varphi$  marca el único elemento en cada uno de los subconjuntos no vacíos del conjunto  $A$ .

Las numerosas investigaciones matemáticas se apoyan en el axioma de elección. La cuestión sobre las bases lógicas de este axioma y la legitimidad de su empleo pertenece a los problemas más difíciles y discutibles en la argumentación de la teoría de conjuntos. En la exposición ulterior que viene más adelante el axioma de elección se supondrá válido. Para los conjuntos numerables el axioma de elección puede ser fácilmente demostrado. En efecto, si los elementos del conjunto  $A$  están numerados con números naturales, obtenemos la función requerida al marcar en cada subconjunto  $B$  de  $A$  aquel elemento suyo que lleva el número minimal.

Sea  $A$  un conjunto en el que vienen definidas dos relaciones de orden parcial:  $\leq$  y  $\approx$ . Diremos que el orden  $\approx$  es una prolongación del orden  $\leq$ , si para cualesquiera  $a, b \in A$  la relación  $a \leq b$  lleva consigo la correlación  $a \approx b$ .

**Teorema 4.** Sea  $A$  un conjunto parcialmente ordenado que satisface la condición de mínimo. Entonces, su orden parcial puede prolongarse hasta el orden que transforma  $A$  en un conjunto bien ordenado.

Antes de pasar a la demostración del teorema, demos a conocer algunas definiciones. Se denomina *segmento* de cierto conjunto bien ordenado  $A$  a todo subconjunto suyo  $B$  que contiene, junto con cualquier elemento suyo  $b$ , todos los  $x \in A$ , tales que  $x \leq b$ . Un conjunto de elementos que preceden estrictamente a cierto elemento  $a$  de  $A$  es un segmento auténtico del conjunto  $A$ , es decir, un segmento, distinto del propio  $A$ , con el cual se agotan todos los *segmentos auténticos*: si  $B$  es un segmento de tal índole, él se compone de todos los elementos que preceden estrictamente al elemento mínimo del complemento  $A \setminus B$ , es decir,  $B$  se define por dicho elemento. Conviengamos en considerar un subconjunto vacío como segmento auténtico del

conjunto  $A$ ; éste se determina por el elemento mínimo del conjunto citado.

*Demostración del teorema 4.* Sea  $A$  un conjunto parcialmente ordenado que satisface la condición de mínimo. Marquemos en cada subconjunto suyo no vacío  $B$  un solo elemento  $\varphi(B)$ , al poner  $\varphi(B)$  igual a uno de sus elementos mínimos. Esto siempre puede realizarse en virtud de la condición de mínimo y del axioma de elección. Llamaremos marcado al subconjunto no vacío  $B$  de  $A$ , si el orden inducido de  $B$  puede ser prolongado hasta el orden que lo convierte en un conjunto bien ordenado y, además, de una manera tal que para todo  $a \in B$  tenemos:  $a = \varphi(A \setminus B')$ , donde  $B'$  es un segmento del conjunto  $B$  en la ordenación total citada que se define por el elemento  $a$ . Los conjuntos marcados existen en  $A$ ; tal es, por ejemplo, un subconjunto  $\{\varphi(A)\}$ , puesto que  $\{\varphi(A)\}' = \emptyset$ , y  $\varphi(A) = \varphi(A \setminus \emptyset)$ .

Sean  $B$  y  $C$  dos subconjuntos marcados, para los cuales están elegidas las ordenaciones totales que poseen la propiedad indicada en el párrafo antecedente. Entonces, ambos subconjuntos mencionados tienen  $\varphi(A)$  en calidad de primer elemento, razón por la cual poseen segmentos coincidentes no vacíos. La reunión  $D$  de todos los segmentos coincidentes de estos dos subconjuntos será, evidentemente, un segmento en cada uno de ellos; este es el segmento mayor entre los segmentos coincidentes. Si el segmento  $D$  fuese distinto tanto de  $B$ , como de  $C$ , entonces, de conformidad con la definición de subconjunto marcado, el segmento  $D$  se definiría en  $B$  y en  $C$  por el elemento  $\varphi(A \setminus D)$ , y en este caso  $B$  y  $C$  poseerían un segmento coincidente mayor que  $D$ , el cual consta de  $D$  y del elemento  $\varphi(A \setminus D)$ . Esta contradicción con la definición de  $D$  demuestra que uno de los dos subconjuntos marcados  $B$  y  $C$  es un segmento del otro.

De aquí se desprende que la reunión  $S$  de todos los subconjuntos marcados de  $A$  será marcada también. En efecto, si  $b$  y  $c$  de  $S$  pertenecen a los subconjuntos marcados  $B$  y  $C$ , respectivamente, entonces ambos yacen en el mayor de los subconjuntos citados, por ejemplo, en  $B$ . Suponiendo  $b \geq c$  en  $S$ , si  $b \geq c$  en este  $A$ , obtendremos en  $S$  una ordenación lineal, la cual será, incluso, ordenación total: toda cadena decreciente de elementos en  $S$  está contenida íntegramente en cierto subconjunto marcado  $B$ , por lo cual ha de romperse. Por fin, si  $b \in S$ , entonces  $b$  está contenido en cierto subconjunto marcado  $B$  y define tanto en  $S$ , como en  $B$  un mismo segmento  $B'$ , con la particularidad de que  $b = \varphi(A \setminus B')$ . Con ello queda demostrado el hecho de que  $S$  está marcada.

Para finalizar la demostración del teorema nos resta señalar que si  $S$  fuese distinto de  $A$ , entonces en la contradicción con la definición de  $S$  obtendríamos un subconjunto marcado superior a  $S$ , agregando a  $S$  el elemento  $\varphi(A \setminus S)$  y considerando este elemento el siguiente tras todos los elementos de  $S$ . El teorema queda demostrado.

Del teorema 4 se deduce inmediatamente el

**Teorema 5 (Zermelo).** En todo conjunto no vacío puede definirse un orden que lo convierte en un conjunto bien ordenado.

Más aún, del teorema 5 proviene el axioma de elección. En efecto, si  $A$  es cierto conjunto no vacío, entonces, conforme al teorema 5, puede considerarse bien ordenado. Si  $B$  es un subconjunto no vacío del conjunto  $A$ , entonces, al designar con  $\varphi(B)$  el elemento minimal del conjunto  $B$ , nos convencemos de que  $\varphi(B)$  satisface al axioma de elección. De este modo, se ha demostrado la equivalencia del teorema 4, del axioma de elección y del teorema de Zermelo.

Véanse [33, 90, 91] para familiarizarse más detalladamente con el axioma de elección y los teoremas equivalentes a él.

Veamos un sistema  $\{A_\alpha \mid \alpha \in L\}$  de conjuntos parcialmente ordenados, suponiendo que el conjunto  $L$  es también parcialmente ordenado. Conven-gamos en considerar que los diferentes conjuntos del sistema a examinar no tienen puntos comunes. Esto, sin embargo, no impide que algunos de ellos sean diferentes ejemplares de un mismo conjunto. Denotemos con  $A$  una reunión teórico-multiplicativa de conjuntos de este sistema y con  $P$ , el producto directo de los conjuntos del sistema  $\{A_\alpha \mid \alpha \in L\}$ , es decir, el conjunto de funciones  $a$  que a todo conjunto  $A_\alpha$  le hace corresponder un elemento  $a_\alpha \in A_\alpha$ . Las funciones  $a$  pueden concebirse como una fila  $(a_\alpha)$ , donde  $\alpha$  recorre el conjunto  $L$ . La existencia de tales funciones se desprende de la aplicación del axioma de elección a  $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ . Por consiguiente, el producto direc-

to de cualquier sistema de conjuntos no vacíos es no vacío. Definamos sobre  $P$  una relación  $<$ , haciendo  $a < b$ , si de  $a_\alpha \leq b_\alpha$ , para cierto  $\alpha \in L$  se deduce que existe tal  $\beta \in L$  que  $\beta < \alpha$ , y  $a_\beta < b_\beta$ .

**Teorema 6.** Si un conjunto parcialmente ordenado  $L$  satisface la condición del mínimo, la relación  $\zeta$  en  $P$ , definida por la condición

$$a \zeta b, \text{ si } a = b, \text{ o bien } a < b,$$

es un orden.

*Demostración.* La reflexividad de la relación  $\zeta$  es obvia. Supongamos que  $a \zeta b$  y  $b \zeta a$ , pero  $a \neq b$ . Entonces, existe tal índice  $\alpha \in L$ , que  $a_\alpha \leq b_\alpha$ , y  $a_\beta < b_\beta$  para cierto  $\beta < \alpha$ . Pero,  $b_\beta \leq a_\beta$  y  $b < a$ . Por consiguiente, se encontrará  $\beta_1 < \alpha$  tal que  $b_{\beta_1} < a_{\beta_1}$ . De aquí,  $a_{\beta_1} \leq b_{\beta_1}$ , y  $a < b$ . Por eso, existe  $\beta_2 < \beta_1$  tal que  $a_{\beta_2} < b_{\beta_2}$ . Continuando este proceso, obtendremos una sucesión decreciente infinita

$$\alpha > \beta > \beta_1 > \beta_2 > \dots$$

de elementos de  $L$ , mas esto contradice la condición del mínimo de  $L$  (véase teorema 3). Esto quiere decir que  $a = b$  y el carácter antisimétrico de la relación  $\zeta$  está demostrado.

Comprobemos ahora la transitividad de nuestra relación. Supongamos que  $a \zeta b$  y  $b \zeta c$ . Si  $a = b$  ó  $b = c$ , la transitividad es obvia. En cambio, si  $a < b$  y  $b < c$ , pero no que  $a < c$ , se encontrará tal índice  $\alpha \in L$  que  $a_\alpha \leq c_\alpha$  y  $a_\beta \leq c_\beta$  para todos los  $\beta < \alpha$ . De aquí se deduce que  $a_\alpha \leq b_\alpha$ , o bien  $b_\alpha \leq$

$c_\alpha$ . Pongamos  $\alpha_1 = \alpha$ , y supongamos están elegidos los índices

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$$

de un modo tal que para cada  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tiene lugar  $a_{\alpha_i} \leq b_{\alpha_i}$ , o bien  $b_{\alpha_i} \leq c_{\alpha_i}$ . Si, por ejemplo,  $a_{\alpha_n} \leq b_{\alpha_n}$ , entonces para cierto  $\beta < \alpha_n$  debe ser  $a_\beta < b_\beta$ . Si  $b_\beta \leq c_\beta$ , entonces  $a_\beta < c_\beta$ . Por cuanto  $\beta < \alpha_n < \alpha$ , esto contradice la elección de  $\alpha$ . Por consiguiente,  $b_\beta \leq c_\beta$ , lo que nos permite poner  $\alpha_{n+1} = \beta$ . Así pues, se ha obtenido de nuevo una sucesión decreciente infinita de elementos de  $L$ :  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > \dots$ , lo que contradice la condición de mínimo de  $L$ . Por lo tanto, la transitividad de la relación  $\leq$  está demostrada y la demostración del teorema queda terminada.

El producto directo  $P$ , dotado de un orden descrito en el teorema 6 lleva el nombre de *producto ordenado* de los conjuntos parcialmente ordenados  $A_\alpha$ .

Determinemos también sobre el conjunto  $A$  la relación  $\leq$ , poniendo  $a \leq b$ , cuando y sólo cuando  $a, b \in A_\alpha$ , y  $a \leq b$  en  $A_\alpha$ , o bien  $a \in A_\alpha$ ,  $b \in A_\beta$  y  $\alpha < \beta$  en  $L$ . Comprobemos que la relación  $\leq$  es un orden en  $A = \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ .

Efectivamente, es obvio que  $\leq$  es una relación reflexiva. Si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , es evidente que  $a, b \in A_\alpha$  para cierto  $\alpha \in L$ , y, por lo tanto,  $a = b$ . Si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \in A_\alpha$ ,  $b \in A_\beta$ ,  $c \in A_\gamma$ , y la desigualdad  $a \leq c$  se establece mediante un examen no complejo de los siguientes cuatro casos:

- 1)  $\alpha = \beta$ ,  $\beta = \gamma$ ; 2)  $\alpha = \beta$ ,  $\beta < \gamma$ ; 3)  $\alpha < \beta$ ,  $\beta < \gamma$ ; 4)  $\alpha < \beta$ ,  $\beta = \gamma$ .

De modo que  $(A, \leq)$  es realmente un conjunto parcialmente ordenado, el cual se llama *suma ordenada* de los conjuntos parcialmente ordenados  $A_\alpha$ .

Si  $L$  es una anticadena, entonces la suma ordenada recibe el nombre de *suma cardinal* y el producto ordenado, de *producto directo*. En el caso de un producto directo es evidente que  $a \leq b$ , cuando y sólo cuando  $a_\alpha \leq b_\alpha$  en  $A_\alpha$  para todo  $\alpha \in L$ . Si  $L$  es una cadena, la suma ordenada de los conjuntos parcialmente ordenados se llama *suma ordinal*. Un producto ordenado, en el caso cuando  $L$  es un conjunto bien ordenado, se denomina *lexicográfico*.

Una suma ordenada  $A$  contiene naturalmente sus sumandos en calidad de subconjuntos. Esto nos permite decir que  $A$  se *descompone en una suma ordenada* de sus subconjuntos. Un conjunto parcialmente ordenado, que no puede ser representado en forma de una suma ordinal (cardinal, respectivamente) de sus propios subconjuntos, se denomina ordinalmente (cardinalmente) *indescomponible*.

Al contrario, los factores  $A_\alpha$  de los productos ordenados  $P$  no admiten interpretación tan natural como sus subconjuntos. Verdad es que  $A_\alpha$  se encajan en el producto ordenado  $P$ , mas son muchos tales encajes.

Una información más detallada sobre las sumas y los productos ordenados puede sacarse de [33]. Enunciemos aquí, en forma de ejercicios, una serie de sus propiedades.



Ejercicios. Demuéstrese que

6. Cada conjunto parcialmente ordenado es una suma cardinal (ordinal, respectivamente) de sus subconjuntos cardinalmente (ordinalmente) indescomponibles.

7. Cada conjunto parcialmente ordenado es una suma ordenada de conjuntos de un solo elemento.

8. Un conjunto parcialmente ordenado es una suma cardinal (ordinal, respectivamente) de conjuntos de un solo elemento, cuando y sólo cuando es una anticadena (cadena).

9. La adición ordinal es no conmutativa.

10. Una suma ordenada de los conjuntos bien ordenados  $\{A_\alpha \mid \alpha \in L\}$  es bien ordenada, si, y sólo si,  $L$  es un conjunto bien ordenado.

11. Una suma ordenada de los conjuntos parcialmente ordenados  $\{A_\alpha \mid \alpha \in L\}$  satisface la condición de mínimo si y sólo si esta condición la satisfacen  $L$  y todos los  $A_\alpha$ .

12. Un producto ordenado de una familia finita de conjuntos parcialmente ordenados  $A_\alpha$  satisface la condición del mínimo si y sólo si esta condición la satisfacen todos los  $A_\alpha$ .

13. Un producto lexicográfico de las cadenas es una cadena.

14. Un producto lexicográfico de una familia finita de conjuntos bien ordenados es bien ordenado.

Al concluir este párrafo detengámonos en algunos resultados referentes a los conjuntos parcialmente ordenados, donde la atención principal se presta a las cadenas y anticadenas. Para tal análisis resulta típico el problema de búsqueda del número mínimo de cadenas, en el que puede partirse un conjunto finito parcialmente ordenado. La respuesta la da el siguiente teorema que se debe a Dilworth.

**Teorema 7.** Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado. El número mínimo de cadenas disjuntas, que contienen todos los elementos de  $P$ , es igual a la anchura de  $P$ .

*Demostración.* Supongamos que  $d(P)$  es el número mínimo de cadenas disjuntas que contienen todos los elementos del conjunto parcialmente ordenado  $P$ ;  $U(P)$  es la familia de todas las anticadenas en  $P$ , y  $s(P)$ , la anchura del conjunto parcialmente ordenado  $P$ , es decir,  $s(P) = \max_{A \in U(P)} |A|$ . En estas condiciones el teorema afirma que  $d(P) = s(P)$ .

Demostremoslo.

Es evidente que  $d(P) \geq s(P)$ , puesto que no existe ninguna cadena que contenga más de un elemento de la anticadena. La desigualdad inversa se demuestra por inducción según el número de elementos del conjunto parcialmente ordenado  $P$ , es decir,  $|P|$ . Si  $|P| = 1$ , la afirmación es cierta. Supongamos que es cierta para todos los conjuntos parcialmente ordenados  $Q$  tales que  $|Q| < |P|$ . Pongamos  $s(P) = n$  y examinemos dos casos.

Caso 1. Sea una anticadena  $A \in U(P)$ ,  $|A| = n$ , que no contiene ni la anticadena  $A_{\min}$  de todos los elementos mínimos de  $P$ , ni tampoco la anticadena  $A_{\max}$  de todos los elementos máximos de  $P$ . Definamos dos conjuntos:

$$P^+ = \{x \in P \mid \exists a \in A : x \geq a\};$$

$$P^- = \{x \in P \mid \exists a \in A : x \leq a\}.$$

De conformidad con las suposiciones referentes a la anticadena  $A$  tenemos:

$P^+ \cap P^- = A$ ,  $P^+ \cup P^- = P$ ,  $P^+ \neq P$ , y  $P^- \neq P$ . Por consiguiente,  $|P^-| < |P|$  y  $|P^+| < |P|$ . Entonces, con arreglo a la suposición de inducción, tenemos  $d(P^-) \leq s(P^-) = n$ , y  $d(P^+) \leq s(P^+) = n$ , es decir, cada uno de los dos conjuntos parcialmente ordenados  $P^-$  y  $P^+$  puede ser representado en forma de una reunión de  $n$  cadenas disjuntas:

$$P^+ = \bigcup_{i=1}^n C_i^{(1)} \quad \text{y} \quad P^- = \bigcup_{i=1}^n C_i^{(2)}.$$

Cada elemento  $a$  de la anticadena  $A$  es, a la vez, un elemento mínimo en  $P^+$  y máximo, en  $P^-$ . Pegando las cadenas  $C_i^{(1)}$  y  $C_i^{(2)}$ , que contienen el elemento  $a$ , obtenemos una cadena  $C_a$ . Por cuando todo elemento  $a$  de la anticadena  $A$ , siendo mínimo en  $P^+$  y máximo en  $P^-$ , es maximal para una de las cadenas  $C_i^{(1)}$  y minimal para una de las cadenas  $C_j^{(2)}$ , entonces, pegando las cadenas de recubrimiento de  $P^-$  y  $P^+$  por los elementos comunes de la anticadena  $A$ , llegamos a que  $P = P^- \cup P^+ = \bigcup_{a \in A} C_a$ ;  $|A| = n$ , es decir, existe un recubrimiento del conjunto parcialmente ordenado  $P$  mediante las  $n$  cadenas.

Caso 2. Cada anticadena de potencia  $n$  del conjunto parcialmente ordenado  $P$  contiene o bien todos sus elementos máximos o bien todos sus elementos mínimos. Por consiguiente, existen, como máximo, dos anticadenas de esta índole: una que contiene todos los elementos máximos, y la otra que contiene todos los elementos mínimos. Tomemos al azar un elemento  $a \in A_{\min}$  y elijamos  $b \in A_{\max}$  de un modo tal que  $b \geq a$  ( $b$  puede ser igual a  $a$ ). Sea  $Q = P \setminus \{a, b\}$ . Es evidente que  $|Q| < |P|$ . Por consiguiente, según la hipótesis de inducción,  $Q$  puede descomponerse en  $s(Q)$  cadenas, mas  $s(Q) = n - 1$ , en virtud de la hipótesis. De aquí, al agregar a dichas cadenas una cadena  $\{a, b\}$ , obtendremos una descomposición de  $P$  en  $n$  cadenas. Por consecuencia, en este caso  $d(P) \leq n = s(P)$ . La demostración del teorema queda establecida.

Es lícita también la afirmación dual.

**Teorema 8.** Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces, el número mayor de elementos en la cadena de  $P$  es igual al número mínimo de anticadenas disjuntas que contienen todos los elementos del conjunto  $P$ .

*Demostración.* Sea  $l(P)$  el número mínimo de anticadenas disjuntas que cubren todos los elementos del conjunto finito parcialmente ordenado  $P$ ;  $C(P)$  es una familia de todas las cadenas en  $P$ , y  $m(P) = \max_{C \in C(P)} |C|$ . Se necesita demostrar que  $l(P) = m(P)$  para todo  $P$ .

Es obvio que  $m(P) \leq l(P)$ , puesto que ninguna anticadena contiene más de un elemento de la cadena. Por inducción respecto de  $m = m(P)$  demostraremos la desigualdad inversa. Cuando  $m = 1$  ella, evidentemente, se verifica. Sea  $l(Q) \leq m(Q)$  para todos los conjuntos parcialmente ordenados  $Q$  tales que  $m = m(Q) < n$ . Entonces, si  $m(P) = n$ , analicemos la anticadena  $A$  que incluye todos los elementos máximos de  $P$ . Está claro que

$A \neq \emptyset$ , puesto que el elemento máximo de cada cadena máxima está contenido en  $A$ . Veamos un conjunto parcialmente ordenado  $P \setminus A$ . Es fácil mostrar que  $m(P \setminus A) = n - 1$ . En efecto, sea  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  una cadena de potencia  $n$  en  $(P \setminus A)$ . Puesto que  $m(P) = n$ , esta cadena es máxima y, por lo tanto,  $x_n \in A$ , lo que contradice la suposición:  $x_n \in (P \setminus A)$ . Entonces, en  $(P \setminus A)$  no hay cadenas de  $n$  elementos, y, por hipótesis de inducción, llegamos a que  $l(P \setminus A) \leq m(P \setminus A) = n - 1$ . De aquí,  $l(P) \leq m(P)$  y el teorema queda demostrado.

El teorema 7 fue enunciado por primera vez por Dilworth [92] en 1950 y demostrado con motivo del análisis de los retículos distributivos (véase § 8.2). Sin embargo, muy pronto se comprendió que este teorema tiene un campo de aplicación mucho más amplio. Más aún, el teorema resultó ser equivalente a varios teoremas de *mínim-máx* del análisis combinatorio, por ejemplo, al teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos (§ 3.2), al de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo (§ 6.4), al de Menger sobre la separación de los vértices y a otros. Merced a las numerosas interpretaciones, los razonamientos aducidos más arriba ocupan en el análisis combinatorio uno de los lugares centrales.

Enunciemos ahora una serie de teoremas y, a continuación, interpretándolos de tal o cual modo, demostremos la equivalencia entre algunos de ellos.

Recordemos que se denomina grafo bipartido a un grafo  $G = G(V, E)$ , en el cual el conjunto de vértices  $V = S \cup T$  se divide en dos conjuntos disjuntos  $S$  y  $T$  de un modo tal que cada arista  $(a, b)$  une cierto vértice  $a \in S$  con el vértice  $b \in T$ . El grafo  $G$  es bipartido cuando y sólo cuando todos los ciclos simples de él tienen longitud par.

Cualquier relación binaria  $R \subseteq S \times T$  sobre los conjuntos finitos  $S$  y  $T$  puede considerarse como un grafo orientado bipartido  $G(S \cup T, R)$ , en el que todas las aristas están orientadas de  $S$  a  $T$ , con la particularidad de que  $(a, b)$  es un arco en  $G$ , si y sólo si  $a \in S$ ,  $b \in T$ , y  $(a, b) \in R$ , y viceversa. Por eso, en adelante no distinguiremos la relación binaria  $R \subseteq S \times T$  y el grafo bipartido correspondiente  $G(S \cup T, R)$ , empleándolos como entes intercambiables. Cualquier familia  $\{A_i \mid i \in T\}$  de subconjuntos del conjunto  $S$  engendra una relación binaria  $R \subseteq S \times T$ , a saber,  $(a, i) \in R$  cuando y sólo cuando  $a \in A_i$  y cualquier relación binaria puede, obviamente, considerarse en este sentido como un sistema de conjuntos.

Sea  $G(S \cup T, R)$  un grafo bipartido. Se llama *combinación de pares* en el grafo  $G$  a un conjunto  $E$  de aristas, de las cuales no hay ningún par que tengan vértices comunes. Denotemos con  $S(E)$  y  $T(E)$  los conjuntos de vértices de la combinación de pares  $E$ , situados en los conjuntos  $S$  y  $T$ , respectivamente. Un subconjunto  $A \subseteq S$  se denomina *transversal parcial* en  $S$ , si existe tal combinación de pares  $E$  que  $A = S(E)$ . Del modo análogo se define también la transversal parcial para  $B \subseteq T$ .

Dicho de otro modo, el conjunto  $A \subseteq S$  es una transversal parcial del grafo  $G(S, T, R)$  cuando y sólo cuando existe un encaje  $\varphi: A \rightarrow T$  tal que  $(a, \varphi(a)) \in R$ , cualquiera que sea  $a \in A$ .

El teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos (véase § 3.2) puede ahora enunciarse en términos de los grafos bipartidos.

**Teorema 9.** Sea  $G(S, T, R)$  un grafo bipartido con conjuntos finitos de vértices  $S$  y  $T$ . Entonces,  $A \subseteq S$  será una transversal parcial, si, y sólo si,  $|B| \leq |R(B)|$  para todo  $B \subseteq A$ , donde

$$R(B) = \bigcup_{a \in B} \{y \in T \mid (a, y) \in R\}.$$

Efectivamente, sea  $\{A_i \mid i \in T\}$  una familia finita de subconjuntos del conjunto  $S$ ; aquí, los subconjuntos  $A_i$  no son forzosamente distintos. Definamos una relación binaria:

$$(i, a) \in R, \text{ siempre que } a \in A_i.$$

Entonces,  $R(J) = \bigcup_{j \in J} A_j$  para todo  $J \subseteq T$ ; ahora, del teorema 9 obtenemos el teorema de P. Hall del § 3.2:

**Teorema 10 (P. Hall).** Una familia de conjuntos  $\{A_i \mid i \in T\}$  tiene transversal (o bien un sistema de representantes distintos) cuando y sólo cuando

$$\left| \bigcup_{j \in J} A_j \right| \geq |J| \text{ para todo } J \subseteq T.$$

Recordemos la formulación del teorema sobre el flujo máximo y el corte mínimo (véase teorema 4 del § 6.5).

**Teorema 11 (Ford, Fulkerson).** Para cualquier red con una capacidad de paso expresada en números enteros, el valor máximo de un flujo de la entrada  $s$  a la salida  $t$  es igual a la capacidad de paso mínima del corte que separa  $s$  de  $t$ .

En el § 6.4 se ha deducido, del teorema sobre el flujo máximo y corte mínimo, el teorema de König, a saber:

**Teorema 12.** Sea  $G = G(S, T, R)$  un grafo bipartido arbitrario. Entonces, el número máximo de aristas de la combinación de pares en el grafo  $G$  es igual a la potencia mínima del conjunto  $(S, T)$ -separador de los vértices del grafo  $G$ .

Recordemos que el conjunto de vértices en un grafo arbitrario  $G(V, E)$  recibe el nombre de conjunto  $(S, T)$ -separador de vértices, donde  $S, T \subseteq V$  y  $S \cap T = \emptyset$ , si al eliminar estos vértices del grafo, junto con las aristas incidentes (o con los arcos) se rompen todas las cadenas (o caminos) que llevan de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$ . Diremos que dos cadenas (o dos caminos) del vértice  $a$  al vértice  $b$  del grafo  $G$  no tienen vértices comunes, si ellas tienen de común sólo los vértices  $a$  y  $b$ . Llamemos conjunto  $(S, T)$ -separador de aristas (o de arcos) a tal familia de aristas (o de arcos) del grafo  $G$ , cuya eliminación de  $G$  rompe todas las cadenas (caminos) que llevan de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$ .

Interpretemos ahora el teorema de König en términos de las matrices. Sea  $A = \|a_{ij}\|$  una matriz rectangular arbitraria con elementos reales. Nos será de interés sólo una cuestión: ¿es igual o no a cero el elemento de la matriz? Llamemos líneas de la matriz tanto sus filas, como las columnas. El conjunto de elementos de la matriz distintos de cero se llamará *transversal* de la matriz, si ningún par de ellos yace en una línea. Diremos que el conjunto  $M$  de líneas cubre todos los elementos no nulos, si cada elemento no nulo de la matriz  $A$  yace por lo menos en una línea de  $M$ . A la matriz  $A$  se le hace corresponder un grafo bipartido, tomando como vértice el conjunto de filas y el de columnas de la matriz  $A$  y haciendo  $(b_i, c_j) \in R$  cuando y sólo cuando  $a_{ij} \neq 0$ . Aquí, con  $b_i$  y  $c_j$  están designadas la  $i$ -ésima columna y  $j$ -ésima fila, respectivamente, de la matriz  $A$ . Entonces, del teorema 12 obtenemos el teorema de König del § 4.1.

**Teorema 13.** La potencia mayor de la transversal en una matriz es igual al número mínimo de líneas que cubren todos los elementos distintos de cero.

En el § 4.1 hemos demostrado la equivalencia de los teoremas 10 y 13. Así pues, los teoremas 9, 10, 12 y 13 son equivalentes. Demostremos que les son equivalentes también los teoremas 7, 8. Con este fin deduzcamos el teorema de Dilworth del teorema de König, y luego, viceversa. Mas, renunciemos con anterioridad el teorema de Dilworth en términos de los grafos.

Recordemos que el diagrama de Hasse de cualquier conjunto finito parcialmente ordenado representa un grafo orientado sin contornos. Sea  $G$  un grafo orientado sin contornos. La descomposición del grafo en cadenas es tal partición del conjunto de vértices y arcos del grafo  $G$ , que cada vértice de  $G$  pertenece a una y sólo una cadena. La descomposición con un número mínimo de cadenas se denomina mínima. Diremos que  $a$  es mayor que  $b$ , si se tiene una cadena orientada de  $a$  a  $b$ . Dos vértices de un grafo orientado sin contornos se llaman incomparables (o independientes), si no se verifican las desigualdades  $a < b$  y  $b < a$ .

Ahora el teorema 7 puede enunciarse del modo siguiente:

**Teorema 14.** El número máximo de vértices recíprocamente incomparables en un grafo orientado sin contornos es igual al número de cadenas en la descomposición mínima del grafo.

*Los teoremas 7 y 12 son equivalentes.* Demostremos que del teorema de König se deduce el de Dilworth. Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Construyamos un grafo bipartido  $G(P \cup P', R)$  sobre el conjunto de vértices  $P \cup P'$ , donde  $P'$  es un ejemplar más del conjunto  $P$ . Además, los vértices  $x$  e  $y'$ , donde  $y'$  es la copia de  $y$  en  $P'$ , los unimos con una arista solamente en el caso, cuando  $x < y$  en el conjunto parcialmente ordenado  $P$ .

**Lema 2.** Para toda combinación de pares  $M$  en el grafo  $G(P \cup P', R)$  existe una descomposición  $D$  del conjunto parcialmente ordenado  $P$  en cadenas, para la cual  $|M| + |D| = n$ , donde  $n = |P|$ .

*Demostración.* Sea  $M = \{(x_1, x_2'), (x_3, x_4'), \dots, (x_{2k-1}, x_{2k}')\}$ , entonces  $x_1 < x_2, x_3 < x_4, \dots, x_{2k-1} < x_{2k}$  en  $P$ , y sea que podemos agrupar diferentes elementos del conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_k\}$  en cadenas de un modo tal que cada una de éstas contenga dos o más elementos. Las cadenas construidas son disjuntas dos a dos, puesto que  $M$  es una combinación de pares en el grafo  $G$ . Agregando a ellas como cadenas de un solo elemento todos los elementos del conjunto  $P$ , que no figuran en las cadenas construidas, obtendremos la descomposición  $D$  del conjunto  $P$  en cadenas. Si el número de elementos del conjunto  $P$  que integran la  $i$ -ésima cadena de  $D$  es igual

$$a \text{ a } l_i, \text{ entonces } n = |P| = \sum_{i=1}^{|D|} l_i = \sum_{i=1}^{|D|} (l_i - 1) + |D| = |M| + |D|,$$

puesto que  $l_i - 1$  es igual al número de aristas de la combinación de pares  $M$  del grafo bipartido  $G$  que participan en la formación de la  $i$ -ésima cadena de  $D$ .

**Lema 3.** Sea  $X$  tal conjunto de vértices, que cubren todas las aristas del grafo  $G$ , que ya ninguno de sus subconjuntos cubre todas las aristas del grafo  $G$ . Entonces, existe en el conjunto parcialmente ordenado  $P$  una cadena  $A$ , tal que  $|X| + |A| = n$ , donde  $n = |P|$ .

*Demostración.* Sea  $X = \{x_1, \dots, x_i, y_1', \dots, y_j'\}$  un conjunto mínimo de vértices del grafo  $G$  que cubre todas las aristas. Entonces,  $x_i \neq y_j$ , cualesquiera que sean  $i$  y  $j$ . Demostremos esto por reducción al absurdo. Sea, por ejemplo,  $x_i = y_1$ . Puesto que  $X$  es el conjunto mínimo de vértices que cubre todas las aristas del grafo  $G$ , existen las aristas  $(x, y_1')$ , donde  $x \notin X$ , y  $(x_1, y')$ , donde  $y' \notin X$ . Mas, en virtud de la propiedad de transitividad para la relación del orden en  $P$ , y de la construcción del grafo bipartido  $G$ , llegamos a que  $(x, y')$  es una arista en el grafo  $G$ , lo que contradice la suposición de que  $X$  cubre todas las aristas del grafo  $G$ . Por consiguiente, todos los elementos en el conjunto  $\{x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j\}$  son distintos. Por cuanto  $X$  cubre todas las aristas del grafo  $G$ , entonces  $A = P \setminus X$  será una anticadena en  $P$ . Además,  $|X| + |A| = |P| = n$ . El lema queda demostrado.

Supongamos ahora que  $M$  es una combinación de pares máxima en el grafo  $G(P \cup P', R)$ , y  $X$  es el recubrimiento de vértice mínimo de las aristas del grafo  $G$ . Entonces, en virtud del teorema 12, tenemos  $|M| = |X|$ . De aquí, considerando los lemas 2 y 3,  $|D| = |A|$ , puesto que  $|D| = n - |M|$ , y  $|A| = n - |X|$ . Pero,  $|A| \leq |D|$  para cualesquiera  $A, D \subseteq P$ , puesto que ningún par de elementos incomparables pueden yacer en una misma cadena. Por consiguiente,  $\max_A |A| = \min_D |D|$ , es decir, la deducción del teorema 7 a partir del teorema 12 queda establecida.

Para demostrar la afirmación inversa de que el teorema 7 tiene por resultado el teorema 12, es suficiente al grafo bipartido  $G(S \cup T, R)$  hacerle corresponder el conjunto parcialmente ordenado  $S \cup T$  con la relación del orden parcial  $<: x < y$  cuando y sólo cuando  $(x, y) \in R$ . La implicación re-

querida se desprende ahora de las siguientes dos afirmaciones que se comprueban con facilidad:

1) Para cualquier descomposición  $D$  del conjunto  $S \cup T$  en cadenas existe una combinación de pares  $M$  en el grafo  $G(S \cup T, R)$ , para la cual  $|D| + |M| = |S \cup T|$  (a título de  $M$  hace falta tomar un conjunto de todas las cadenas de  $D$  compuestas por dos elementos).

2) Para toda anticadena  $A$  de un conjunto parcialmente ordenado  $S \cup T$  existe un recubrimiento de vértice  $X$  de las aristas del grafo  $G$ , para el cual  $|A| + |X| \leq |S \cup T|$ , puesto que el complemento a la anticadena  $A$  en el conjunto  $S \cup T$  contiene el recubrimiento de vértice  $X$  de las aristas del grafo  $G$ . De este modo queda establecida la equivalencia de los teoremas 7 y 12.

**Ejercicio 15.** Sea  $G(V, E)$  un grafo orientado tal que para  $s$  y  $t \in V$  es válida la igualdad

$$k = |\Gamma(s)| - |\Gamma^{-1}(s)| = |\Gamma^{-1}(t)| - |\Gamma(t)|,$$

y para cualquier  $v \in V - \{s, t\}$ , la igualdad

$$|\Gamma(v)| = |\Gamma^{-1}(v)|.$$

Demuéstrese que en el grafo  $G$  hay  $k$  caminos del vértice  $s$  al vértice  $t$  que no se intersecan por arcos.

Sea  $D(G)$  un grafo orientado obtenido del grafo no orientado  $G$  sustituyendo en éste cada arista por un par de arcos inversamente orientados que son incidentes respecto de los mismos vértices. Señálese que

16. Existe una correspondencia biunívoca entre las cadenas en el grafo  $G$  y los caminos en  $D(G)$ .

17. Para cualesquiera dos vértices  $s$  y  $t$ , el número mínimo de aristas, cuya supresión en el grafo  $G$  rompe todas las cadenas de  $s$  a  $t$ , es igual al número mínimo de arcos cuya eliminación rompe todos los caminos de  $s$  a  $t$  en el grafo  $D(G)$ .

Continuamos la deducción y la demostración de los resultados combinatorios equivalentes.

**Lema 4.** Sea  $G(V, E)$  una red de entrada  $s$  y salida  $t$ , a cada arco de la cual se le asigna una capacidad específica de paso. En este caso son válidas las siguientes igualdades:

1) el valor del flujo máximo en la red  $G$  es igual al número máximo de caminos de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los arcos;

2) la capacidad de paso del corte mínimo en la red  $G$  es igual al número mínimo de arcos, cuya eliminación rompe todos los caminos de  $s$  a  $t$ .

*Demostración.* 1) Sea  $v$  cierto flujo máximo en la red  $G$ , y sea  $G^*$  un grafo orientado obtenido de  $G$  por eliminación de todos los arcos libres del flujo  $v$ . Por cuanto las capacidades de paso de todos los arcos de la red  $G$  son iguales a 1, entonces para todos los arcos  $e$  de la red  $G^*$  tenemos:  $f(e) = 1$ . De aquí, en virtud de la definición de flujo en una red (véase

§ 6.4), para todos los arcos  $e$  en la red  $G^*$ , distintos de  $s$  y  $t$ , tenemos:  $|\Gamma(e)| = |\Gamma^{-1}(e)|$ , mientras que para la entrada  $s$  y la salida  $t$ ,  $v = |\Gamma(s)| - |\Gamma^{-1}(s)| = |\Gamma^{-1}(t)| - |\Gamma(t)|$ . Pero, en virtud de la afirmación citada en el ejercicio 15, en la red  $G^*$ , y, por lo tanto, en la red  $G$  existen  $v$  caminos de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los arcos. De aquí llegamos a que el valor  $v$  del flujo máximo en la red  $G$  no es superior a  $k$  (el número máximo de caminos de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los arcos).

Supongamos ahora que  $P_1, P_2, \dots, P_k$  es un juego de un número máximo de caminos de  $s$  a  $t$  en la red  $G$  que no se intersecan por los arcos. Definamos en  $G$  el flujo  $f$  del modo siguiente:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{si existe tal } i \text{ que } e \in P_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Es evidente que el valor de tal flujo es igual a  $k$ , y el valor del flujo máximo no es inferior a  $k$ . Por consiguiente,  $v \leq k$ , y, debido a la desigualdad antecedente,  $v \geq k$ . De este modo,  $v = k$ , y la primera afirmación del lema queda demostrada.

2. Eliminemos en la red  $G$  todos los arcos del corte mínimo que separa la entrada  $s$  de la salida  $t$ . Entonces, en el grafo orientado obtenido no habrá ningún camino de  $s$  a  $t$ . Por eso, la potencia de este corte no es inferior al número mínimo de arcos cuya eliminación rompe todos los caminos de  $s$  a  $t$ . Para finalizar la demostración de la segunda afirmación del lema, demostremos que es cierta también la relación inversa. En efecto, sea  $T$  un conjunto de arcos cuya eliminación rompe todos los caminos de  $s$  a  $t$  en la red  $G$ , y sea  $S$  un conjunto de vértices que pueden ser alcanzados partiendo de la entrada  $s$ , con ayuda de los caminos que no contienen un arco del conjunto  $T$ . Está claro que  $(S, V \setminus S)$  es un corte en la red  $G$ . Además,  $(S, V \setminus S) \subseteq T$ . Por eso, la potencia del corte mínimo no sobrepasa  $|(S, V \setminus S)|$  y, por consiguiente,  $|T|$ . El lema está demostrado.

Enunciamos ahora una serie de *teoremas de Menger* y demostrémoslos tanto para los grafos orientados, como no orientados, haciendo uso del teorema II sobre el flujo máximo y el corte mínimo.

**Teorema 15.** Sean  $s$  y  $t$  dos vértices en un grafo orientado  $G$ . El número máximo de caminos de  $s$  a  $t$ , en  $G$  que no se intersecan por los arcos es igual a la potencia mínima del conjunto  $(s, t)$ -separador de arcos del grafo  $G$ .

*Demostración.* Vamos a considerar el grafo  $G$  como una red de entrada  $s$  y salida  $t$ , a todo arco del cual le está asignada la capacidad de paso unitaria. Entonces, el teorema en consideración es un corolario del lema 4 y del teorema II.

Supongamos que para un grafo no orientado  $G$  existe el grafo orientado  $D(G)$ , obtenido de  $G$  sustituyendo cada arista de éste por un par de arcos inversamente orientados, que son incidentes respecto de los mismos vértices. Entonces, en virtud de los ejercicios 16 y 17, se deduce la validez del teorema 15 para el grafo no orientado.



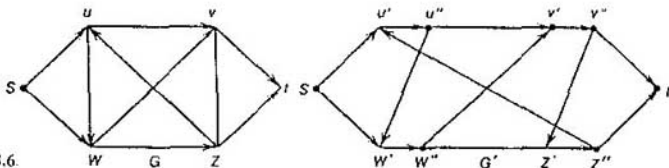


Fig. 8.6.

**Teorema 16.** Sean  $s$  y  $t$  dos vértices de un grafo no orientado  $G$ . El número máximo de cadenas en  $G$  que van de  $s$  a  $t$  y no se intersecan por las aristas es igual a la potencia mínima del conjunto  $(s, t)$ -separador de aristas del grafo  $G$ .

Formulemos los análogos de los teoremas 15 y 16 para los vértices.

**Teorema 17.** Sean  $s$  y  $t$  dos vértices no adyacentes en un grafo orientado  $G$ . Entonces, la potencia mínima del conjunto  $(s, t)$ -separador de vértices en el grafo  $G$  es igual al número máximo de caminos que van de  $s$  a  $t$  y que no tienen vértices comunes.

Con el fin de demostrar el teorema 17 construyamos un grafo orientado  $G'$  a partir del grafo orientado  $G(V, E)$  con dos vértices no adyacentes  $s$  y  $t$ . Dividamos para ello los vértices  $v \in V \setminus \{s, t\}$  en dos nuevos vértices  $v'$  y  $v''$ , uniéndolos con un arco  $(v', v'')$ . Luego, sustituyamos cada arco del grafo  $G$  con el vértice terminal  $v \in V \setminus \{s, t\}$  por un arco nuevo que tiene  $v'$  en calidad de vértice terminal; sustituyamos, además, cada arco con el vértice inicial  $v \in V \setminus \{s, t\}$  por un arco que tiene  $v''$  en calidad de vértice inicial. El grafo  $G$  y el  $G'$ , construido a partir de  $G$ , se representan en la fig. 8.6.

**Ejercicios.** Demuéstrese que para los grafos construidos más arriba:

18. Todo camino de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G'$  corresponde al camino de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G$  que se obtiene por contracción de todos los arcos del tipo  $(v', v'')$ , y viceversa, cada camino de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G$  corresponde al camino de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G'$  obtenido por división de todos los vértices del camino, distintos de  $s$  y  $t$ .

19. El número máximo de caminos que van de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G'$  y que no se intersecan por los arcos es igual al número máximo de caminos de  $s$  a  $t$  que no tienen vértices comunes.

20. Dos caminos de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G'$  no se intersecan por los arcos, cuando y sólo cuando los caminos que les corresponden en el grafo  $G$  no se intersecan por vértices.

21. La potencia mínima de un conjunto  $(s, t)$ -separador de arcos en el grafo  $G'$  es igual a la potencia mínima del conjunto  $(s, t)$ -separador de vértices del grafo  $G$ .

La validez del teorema 17 se deduce de las afirmaciones, fácilmente comprobables, enunciadas en los ejercicios 18 . . . 21.

**Teorema 18.** Sean  $s$  y  $t$  dos vértices no adyacentes de un grafo no orien-

tado  $G$ . Entonces, la potencia mínima del conjunto  $(s, t)$ -separador de vértices en el grafo  $G$  es igual al número máximo de cadenas que van de  $s$  a  $t$  y que no tienen vértices comunes.

*Demostración.* Es suficiente aplicar el teorema 17 al grafo  $D(G)$ .

Los teoremas 17 y 18 se generalizan fácilmente.

**Teorema 19.** Sea  $G(V, E)$  un grafo orientado y supongamos que  $S, T \subseteq V$ . Entonces, la potencia mínima del conjunto  $(S, T)$ -separador de vértices es igual al número máximo de caminos que van de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$  y que no tienen vértices comunes.

*Demostración.* Agreguemos al grafo  $G$  dos vértices nuevos  $s^*$  y  $t^*$ , como también todos los arcos del tipo  $(s^*, s)$ , donde  $s \in S$ , y todos los arcos del tipo  $(t, t^*)$ , donde  $t \in T$ . Del teorema 17, aplicado al nuevo grafo construido, se deduce el teorema 19.

Razonando análogamente, del teorema 18 obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 20 (Menger).** Sea  $G(V, E)$  un grafo no orientado y  $S, T \subseteq V$ . Entonces, la potencia mínima del conjunto  $(S, T)$ -separador de vértices es igual al número máximo de cadenas que van de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$  y que no tienen vértices comunes.

Es obvio que si en los teoremas 19 y 20 suponemos que  $S = \{s\}$ ,  $T = \{t\}$ , es decir, que  $S$  y  $T$  son conjuntos de un solo elemento, obtendremos las afirmaciones de los teoremas 17 y 18.

*Deduzcamos ahora el teorema 11 sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, basándonos en los teoremas de tipo de Menger.* Sea  $G(V, E)$  una red de entrada  $s$  y salida  $t$ , en cuyos arcos vienen dadas las capacidades de paso que se expresan en números enteros. Construyamos una red nueva  $G'$  sobre el mismo conjunto de vértices, sustituyendo cada arco  $e \in E$  con una capacidad de paso  $c(e)$  por  $c(e)$  de los arcos igualmente orientados y borrando todos los arcos con capacidades de paso nulas. La red  $G$  y la red nueva  $G'$ , construida a partir de  $G$ , están representadas en la fig. 8.7, donde los números en los arcos del grafo  $G$  expresan sus capacidades de paso.

Sean  $R$  y  $R'$  los cortes que separan la entrada  $s$  de la salida  $t$  en las redes  $G$  y  $G'$ , respectivamente, y que están definidas por un mismo conjunto de vértices. Entonces

$$|R'| = \sum_{e \in R} c(e),$$

donde  $c$  son las capacidades de paso de los arcos de la red  $G$ . Así pues, al poner  $N = \min_R \sum_{e \in R} c(e)$ , llegamos a que  $|R'| \geq N$ . Entonces, en virtud del teorema 15, existen  $N$  (y este número es máximo) caminos de  $s$  a  $t$  en la red  $G'$  que no se intersecan por los arcos.

Sea  $f(e)$  el número de arcos paralelos al arco  $e$  en la red  $G'$ , ocupados por dichos caminos. En este caso  $f(e)$  es el flujo de  $s$  a  $t$  de magnitud  $N$

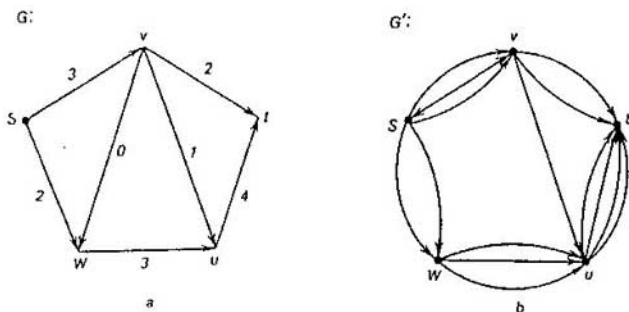


Fig. 8.7.

en la red  $G(V, E)$  (aquí se han empleado también los resultados del lema 4). La implicación requerida está demostrada.

Demostremos que *del teorema 20 (de Menger) se deduce la validez del teorema 12 (de König)*. Sea  $G(S \cup T, R)$  un grafo bipartido sobre el conjunto de vértices  $S \cup T$ ,  $S \cap T = \emptyset$ . Obviamente, el conjunto de vértices  $A$  cubre todas las aristas del grafo  $G$ , cuando y sólo cuando  $A$  es un conjunto  $(S, T)$ -separador de vértices del grafo  $G$ . Para toda combinación de pares de  $n$  aristas en el grafo  $G$  pueden elegirse  $n$  cadenas que van de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$ , y viceversa,  $k$  cadenas de  $S$  a  $T$ , que no tienen vértices comunes y contienen  $k$  aristas del grafo  $G$  que no se intersecan por las vértices. Por consiguiente, el número máximo de cadenas de  $S$  a  $T$ , que no tienen vértices comunes, es igual al número máximo de aristas de la combinación de pares en el grafo  $G$ . Pero, en virtud del teorema 20, el número máximo de cadenas que van de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$  y que no tienen vértices comunes, es igual a la potencia mínima del conjunto  $(S, T)$ -separador de vértices. Por consiguiente, el teorema 12 queda demostrado.

Todas las implicaciones establecidas en el libro, entre los teoremas de Menger, König, P. Hall, Dilworth y el de Ford-Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo están reunidas en el grafo orientado (véase fig. 8.8), en el cual los vértices corresponden a los teoremas, y el arco  $(A, B)$  está presente en el grafo cuando y sólo cuando queda demostrado que el teorema  $B$  se deduce del teorema  $A$ . Según podemos ver en el grafo que se muestra en la fig. 8.8, para finalizar la demostración de la equivalencia entre los teoremas citados es suficiente, por ejemplo, deducir uno de los teoremas de Menger a partir del teorema de König.

*Deduzcamos el teorema 18 (de Menger) del teorema 12 (de König)*, recurriendo al método de inducción matemática. La idea de tal demostración surge de las obras [134, 135]. Con ello acabemos la comprobación de la equivalencia entre los teoremas de Ford-Fulkerson, Menger, König, P. Hall y Dilworth y también ilustramos con un ejemplo concreto la idea de la de-

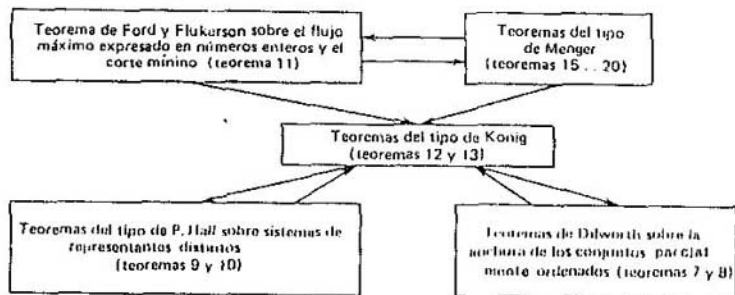


Fig. 8.8.

mostración de los teoremas de Menger por el método de inducción matemática.

**Lema 5.** Supongamos que  $G(V, E)$  es un grafo no orientado arbitrario, en el que se distinguen dos vértices no adyacentes  $s, t \in V$ , y que  $X \subseteq V$  es un conjunto mínimo  $(s, t)$ -separador de vértices del grafo  $G$ , tal que  $|X| = k$ . Entonces, en  $G(V, E)$  existen  $k$  cadenas de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los vértices.

*Demostración.* Un vértice del grafo  $G$ , distinto de  $s$  y  $t$ , y no adyacente a ninguno de ellos, recibe el nombre de vértice interior del grafo  $G$ . Demostremos el lema por inducción respecto de  $n$  (el número de vértices interiores del grafo  $G$ ). Sea  $n = 0$ , es decir, en  $G$  no hay vértices interiores. Entonces, el grafo  $G$  tiene la forma mostrada en la fig. 8.9. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_p$  los vértices del grafo  $G$  que son adyacentes tanto a  $s$ , como a  $t$ , simultáneamente. Es evidente que  $x_1, x_2, \dots, x_p \subseteq X$ . Por eso, cuando  $p = k$ , el sistema buscado de  $k$  cadenas que no se intersecan por los vértices se halla en seguida. Si  $p < k$ , construyamos un subgrafo  $G'$ , del grafo  $G$ , suprimiendo todos los vértices  $x_1, x_2, \dots, x_p$  junto con las aristas incidentes. Ahora, para demostrar el lema, basta con encontrar en el subgrafo  $G'$ ,  $k - p$  cadenas de  $s$  a  $t$ , que no se intersecan por vértices.

Así pues, sea  $p < k$ , y sean  $A$  y  $T \subseteq V \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  los conjuntos de vértices del subgrafo  $G'$ , adyacentes a los vértices  $s$  y  $t$ , respectivamente. Examinemos un grafo bipartido auxiliar  $G^*(SUT, R)$  sobre el conjunto de vértices  $SUT$ ,  $SN \cap T = \emptyset$ , en el cual  $(x, y) \in R$  cuando y sólo cuando  $x \in S$ ,  $y \in T$ , y  $(x, y) \in E$  (fig. 8.10).

En el grafo  $G^*(SUT, R)$  se encontrará una combinación de pares con  $k - p$  aristas. Demostremoslo por reducción al absurdo. Supongamos que en el grafo  $G^*(SUT, R)$  no hay combinaciones de pares con  $k - p$  aristas, es decir, la potencia máxima de las combinaciones de pares del grafo  $G^*$  es inferior a  $k - p$ . Entonces, en virtud del teorema 12 (de König), en  $G^*(SUT, R)$  existe un conjunto  $(S, T)$ -separador  $X_0 \subseteq SUT$ , cuyo número de vértices

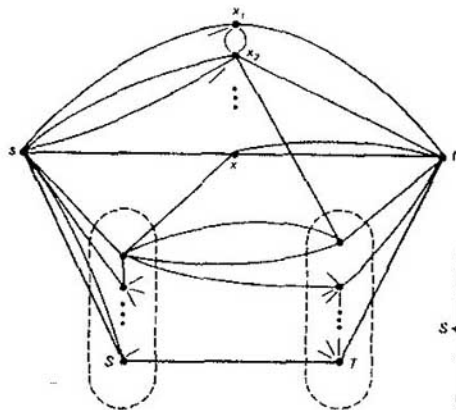


Fig. 8.9.

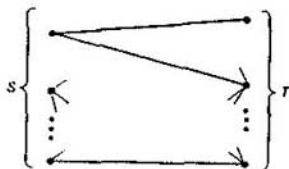


Fig. 8.10.

es menos de  $k - p$ . Pero  $X_0 \cup \{x_1, \dots, x_p\}$  será, evidentemente, un conjunto  $(s, t)$ -separador de vértices en el grafo  $G$  con un número de vértices inferior a  $k$ . Hemos llegado, pues, a una contradicción con la hipótesis del lema. De este modo, en  $G^*(SUT, R)$  existe una combinación de pares con  $k - p$  aristas, y en el grafo  $G$ ,  $k$  cadenas de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los vértices. El lema está demostrado para todos los grafos sin vértices interiores.

Admitamos que el lema está demostrado para todos los grafos con un número de vértices interiores inferior a  $n_0 > 0$ . Veamos un grafo arbitrario  $G(V, E)$  con un número de vértices interiores igual a  $n_0$  y un conjunto mínimo  $(s, t)$ -separador de los vértices  $X$ , donde  $|X| = k$ . Sea  $x_1$  uno de los vértices interiores de este grafo. En el grafo  $G'$ , obtenido de  $G$  por eliminación del vértice  $x_1$  junto con las aristas incidentes, las condiciones del lema ya es inferior a  $n_0$ , y, por lo tanto, en virtud de la hipótesis de inducción, se encontrarán  $k$  cadenas de  $s$  a  $t$ , que no se intersecan por los vértices, en  $G'$ , y por consiguiente, en el grafo  $G$ . El incumplimiento de las condiciones del lema significa que  $x_1 \in X$ . Supongamos que  $G_0$  es un subgrafo del grafo  $G$  engendrado por el conjunto de vértices  $V \setminus X$ ;  $V_s$  es el conjunto de vértices del subgrafo  $G_0$  unidos con el vértice  $s$  en  $G_0$ , y  $V_t = (V \setminus X) \setminus V_s$ . Sean  $G_s$  y  $G_t$  los subgrafos del grafo  $G$  engendrados por los conjuntos de vértices  $V_s \cup X$  y  $V_t \cup X$ , respectivamente. Sobre el conjunto de vértices  $V_1 = V_s \cup X \cup \{t'\}$  construyamos un grafo  $G_1$ , a partir del grafo  $G_s$ , adicionando un nuevo vértice  $t'$  y todas las aristas del tipo  $(x, t')$ , donde  $x \in X$ . Además, sobre el conjunto de vértices  $V_2 = V_t \cup X \cup \{s'\}$  construyamos el grafo  $G_2$ , a partir del grafo  $G_t$ , juntando un nuevo vértice  $s'$  y agregando todas las aristas del tipo  $(s', x)$ , donde  $x \in X$ . Los grafos  $G$  y  $G_1, G_2$ , cons-

G.

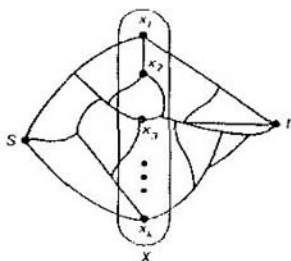
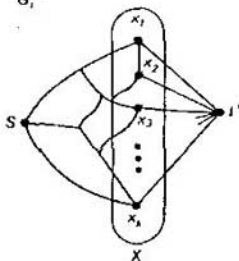
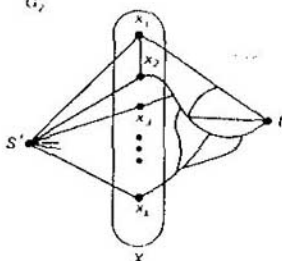
 $G_1$  $G_2$ 

Fig. 8.11.

truidos a partir de  $G$ , se exponen en la fig. 8.11. Por construcción, en el grafo  $G_1$  se tiene un conjunto mínimo  $(s, t')$ -separador de  $k$  vértices, y en el grafo  $G_2$ , un conjunto mínimo  $(s', t)$ -separador de  $k$  vértices, puesto que es precisamente tal, por ejemplo, el propio conjunto  $X$ .

En el grafo  $G_1$  los vértices  $s$  y  $t'$  no son adyacentes, puesto que  $s \notin X$ . Además, cada vértice interior de  $G_1$  es también interior en  $G$ , pero, al mismo tiempo  $x_i$ , siendo vértice interior en  $G$ , no lo es en  $G_1$ . Por eso el número de vértices interiores del grafo  $G_1$  es inferior a  $n_0$ . Mas en este caso, por la hipótesis de inducción, se encontrarán  $k$  cadenas de  $s$  a  $t'$  en el grafo  $G_1$ , las cuales no se intersecan por los vértices. De un modo análogo mostramos que se encontrarán  $k$  cadenas de  $s'$  a  $t$  en el grafo  $G_2$ , las cuales no se intersecan por los vértices. De la construcción de los grafos  $G_1$  y  $G_2$  obtenemos automáticamente  $k$  cadenas de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G$ , las cuales no se intersecan por los vértices. De este modo, el lema queda demostrado.

Si en el grafo  $G$  con dos vértices no adyacentes  $s$  y  $t$  se tiene un sistema de  $k$  cadenas de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los vértices, entonces el conjunto  $(s, t)$ -separador de vértices ha de contener por lo menos un vértice de cada cadena, o bien, dicho de otro modo, la potencia de cada conjunto  $(s, t)$ -separador de vértices del grafo  $G$  no debe ser inferior a  $k$ . De aquí y del

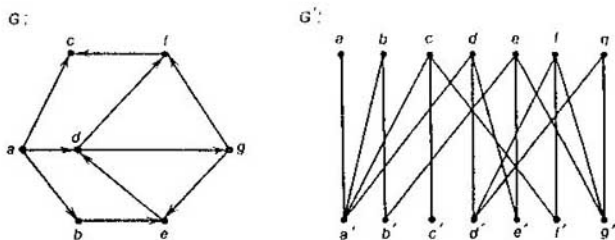


Fig. 8.12.

lema 5 obtenemos directamente el teorema 18. Así pues, la implicación está demostrada y, por consiguiente, queda establecida la equivalencia de los teoremas de Ford-Fulkerston, König, P. Hall, Menger y Dilworth.

Es de interés el problema de buscar (las demostraciones de) todas las implicaciones entre los teoremas recién citados del análisis combinatorio. Proponemos que el mismo lector halle las implicaciones que faltan. En otras palabras, proponemos que el lector termine de construir el grafo mostrado en la fig. 8.8, hasta que se obtenga un grafo orientado completo sin lazos. Una parte de las implicaciones que faltan o las demostraciones nuevas de las implicaciones ya establecidas pueden encontrarse en las obras [1, (cap. 8, § 1), 8, 25 (caps 7 y 12), 28, 114 (cap. 5), 120, 122, 123 (§ 15.7), 124 (cap. IV, § 4) y 133, 135]. Así, por ejemplo, en [122] Harary obtuvo, partiendo del teorema original de Menger [119] (véase el teorema 18), diferentes teoremas de tipo de Menger, incluidos teoremas sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, de König, P. Hall, Dilworth y otros. En [120] se da un resumen de los teoremas de tipo de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos (véase el teorema 10). Ford y Fulkerson [28] obtuvieron, basándose en su teorema sobre el flujo máximo de números enteros y el corte mínimo, los teoremas de König, Menger, Dilworth y P. Hall (véanse los teoremas 4.1, 4.2, cap. 11, § 8 y teorema 10.1 [28]). En [121] el teorema sobre el flujo máximo y el corte mínimo se deduce del teorema de Menger, y en [25] se exponen detalladamente las correlaciones entre los teoremas de Menger y de König sobre las combinaciones de pares para los grafos bipartidos.

Sea  $G(V, E)$  un grafo orientado finito y supongamos que  $S, T \subseteq V$  son tales que  $|S| = |T| = k$ . Construyamos un grafo bipartido  $G'(V \cup V', E')$  sobre un conjunto de vértices  $V \cup V'$ , donde  $V'$  es un ejemplar más del conjunto  $V$ . Con  $v' \in V'$  denotemos el vértice que corresponde al vértice  $v \in V$ , y con  $T' \subseteq V'$ , el conjunto correspondiente a  $T \subseteq V$ . El conjunto de aristas  $E'$  en el grafo bipartido  $G'$  se define mediante la relación

$$E' = \{(v, v') \mid v \in V\} \cup \{(v, v') \mid (u, v) \in E\}.$$

El grafo  $G$  y el  $G'$ , construido a partir de  $G$ , están representados en la fig. 8.12.

**Lema 6.** Sea  $G(V, E)$  un grafo orientado finito y  $S, T \subseteq V$ , tales que  $|S| = |T| = k$ . En el grafo  $G$  hay  $k$  caminos de  $S$  a  $T$ , que no se intersecan por los vértices, cuando y sólo cuando existe en el grafo  $G'$  una combinación de pares  $M = \{(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)\}$  tal que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = V \setminus T$ ,  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = V \setminus S$ .

*Demostración.* Sea  $P_1, P_2, \dots, P_k$  una familia de caminos de  $S$  a  $T$  que no se intersecan por los vértices, donde  $|S| = |T| = k$ . Definamos  $\varphi: V' \setminus T' \rightarrow V \setminus S$ , haciendo

$$\varphi(u') = \begin{cases} u, & \text{si } u \notin P_i \text{ para todo } i, i = 1, \dots, k; \\ v, & \text{si } u \in P_i, \text{ y } v \text{ sigue tras } u \text{ en } P_i. \end{cases}$$

Es evidente que  $\varphi$  es una aplicación biunívoca y que para todo  $u' \in V' \setminus T'$  tenemos  $(\varphi(u'), u') \in E'$ . De este modo,  $M = \{(\varphi(u'), u') \mid u' \in V' \setminus T'\}$  es una combinación de pares y  $\{\varphi(u') \mid u' \in V' \setminus T'\} = V \setminus S$ .

Demostremos la afirmación inversa. Sea  $M = \{(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)\}$  una combinación de pares en el grafo  $G'$ , donde  $\{y_1, \dots, y_n\} = V \setminus S$ , y  $\{x_1, \dots, x_n\} = V \setminus T$ . La aplicación isomorfa  $\varphi: V' \setminus T' \rightarrow V \setminus S$  se define de una manera evidente, a saber:  $y_i = \varphi(x_i')$  para cualquier  $x_i' \in V \setminus T$ . Definamos, para cada  $s \in S$ , el camino  $P_s$  en el grafo  $G$  que va del vértice  $s$  a uno de los vértices del conjunto  $T$ . Si  $s \in S \cap T$ , entonces  $P_s = \{s\}$ . Si  $s \notin S \cap T$ , entonces  $s \notin T$ . Por eso siempre existe un vértice  $s' \in V' \setminus T'$  tal que  $\varphi(s') = s \in V \setminus S$ . Si  $u_1 \in T$ , suponemos que  $P_s = \{s, u_1\}$ . Si  $u_1 \notin T$ , entonces, por ser  $\varphi$  inyectiva, se encontrará un vértice  $u_2 = \varphi(u_1') \in V \setminus S$ , tal que  $u_2 \neq u_1$ . Si  $u_2 \in T$ , suponemos  $P_s = \{s, u_1, u_2\}$ . Si  $u_2 \notin T$ , entonces, por ser  $\varphi$  inyectiva, se encontrará un vértice  $u_3 = \varphi(u_2') \in V \setminus S$ , tal que  $u_3 \neq u_2$ . Continuamos este proceso hasta que se encuentre por primera vez el vértice  $u_j \in T$ , y entonces suponemos  $P_s = \{s, u_1, u_2, \dots, u_j\}$ . Por ser la aplicación  $\varphi$  inyectiva, deducimos que los caminos  $P_s$ , construidos para diferentes  $s \in S$ , no se intersecan por los vértices. De este modo queda demostrado el lema.

Para el grafo  $G$  (expuesto en la fig. 8.12) con  $S = \{a, f, g\}$  y  $T = \{c, d, e\}$  se tienen tres itinerarios que no se intersecan por los vértices:  $P_a = \{a, c\}$ ,  $P_f = \{f\}$ ,  $P_g = \{g, e, d\}$  que van de los vértices de conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$ , y a estos caminos les corresponde, según el lema 6, una combinación de pares  $M = \{(b, b'), (c, a'), (d, e'), (e, g')\}$ , tal que  $\{b, c, d, e\} = V \setminus S$ , y  $\{b', a', e', g'\} = V' \setminus T'$ .

El lema 6 se emplea para generalizar los matroides transversales con los grafos bipartidos  $G(SUT, R)$  (véase § 8.4, como también el concepto de ganmoide en [1]).

**Ejercicios 22.** Dedúzcanse los teoremas 17 y 19 a partir del lema 6 y del teorema 12.

**23.** Demuéstrase el teorema 17 por el método de inducción matemática según el número de vértices interiores del grafo.



## 8.2. RETÍCULOS

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto arbitrario parcialmente ordenado, y sea  $B$  un subconjunto no vacío del conjunto citado. El elemento  $a \in A$  se denomina *cota superior exacta* (*supremo*) del conjunto  $B$ , siempre que  $a \geq b$  para todo  $b \in B$ , y si de la validez de la relación  $v \geq b$  para todo  $b \in B$  se deduce que  $v \geq a$ . De un modo dual se define la *cota inferior exacta* (*ínfimo*) del conjunto  $B$ : el elemento  $a \in A$  se llama cota inferior exacta, si  $a \leq b$  para todo  $b \in B$ , y si de la condición  $u \leq b$  para todo  $b \in B$  se deduce que  $u \leq a$ . Las cotas exactas superior e inferior del conjunto  $B$  en el conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  las designaremos con los símbolos  $\sup_A B$  y  $\inf_A B$ , respectivamente. A veces, sin embargo, el índice  $A$  se omitirá. Directamente de las definiciones se desprende la validez de las siguientes afirmaciones:

- Si  $a \leq b$ , entonces  $\sup\{a, b\} = b$ , e  $\inf\{a, b\} = a$ .
- Sea  $B \subseteq C$ . Si existen  $\sup B$  y  $\sup C$  ( $\inf B$  e  $\inf C$ , respectivamente), entonces  $\sup B \leq \sup C$  ( $\inf B \geq \inf C$ , respectivamente).
- Si  $A \subseteq \mathcal{A}(S)$ , entonces  $\sup A$  coincide con la unión de todos los subconjuntos de la familia  $A$ , e  $\inf A$ , con su intersección.

Se propone que el lector mismo compruebe la validez de estas afirmaciones.

Un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  se denomina *retículo* (o *estructura*), si para cualesquiera  $a, b \in A$  existen  $\sup\{a, b\}$  e  $\inf\{a, b\}$ . El retículo no tiene que tener obligatoriamente 0 y 1. Son retículo toda cadena, un conjunto de todos los conjuntos ordenado por inclusión (véase el ejemplo 4 del § 8.1) y algunos otros conjuntos parcialmente ordenados cuyos ejemplos se darán a conocer más abajo.

Si un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  es un retículo, entonces el conjunto parcialmente ordenado  $(A, \geq)$ , dual respecto del primero, es también un retículo. Así pues, el principio de dualidad es aplicable para los retículos.

Emplearemos las siguientes designaciones:

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \quad a \vee b = \sup\{a, b\}$$

denominando  $\wedge$  *intersección* y  $\vee$ , *unión*. Los símbolos  $\wedge$  y  $\vee$  en los retículos representan operaciones binarias que poseen las siguientes propiedades:

- $a \wedge a = a$ ,  $a \vee a = a$  (idempotencia);
- $a \wedge b = b \wedge a$ ,  $a \vee b = b \vee a$  (conmutatividad);
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ ,  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$  (asociatividad);
- $a \wedge (a \vee b) = a$ ,  $a \vee (a \wedge b) = a$  (absorción).

La relación de orden  $\leq$  en los retículos puede ser caracterizada con ayuda de las operaciones  $\wedge$  y  $\vee$ . A saber,

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a,$$

o bien

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Tales características permiten considerar los retículos como conjuntos con dos operaciones binarias  $\wedge$  y  $\vee$ , las cuales satisfacen las propiedades de idempotencia, conmutatividad, asociatividad y absorción.

Observemos que el requisito de idempotencia no es obligatorio, puesto que la idempotencia de las operaciones es un corolario de ambas propiedades de absorción. En efecto, usando sucesivamente diferentes propiedades de absorción, llegamos a que  $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a$ , y  $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a$ .

**Teorema 21.** Sea  $A$  un conjunto con dos operaciones binarias  $\wedge$  y  $\vee$ , las cuales son idempotentes, conmutativas, asociativas y satisfacen las propiedades de absorción. Supongamos que  $a \leq b$  significa que  $a \vee b = b$ . Entonces, la relación  $\leq$  es relación de orden en el conjunto  $A$ , y un conjunto parcialmente ordenado que surge resulta ser un retículo, con la particularidad de que

$$\begin{aligned} a \vee b &= \sup\{a, b\} \\ a \wedge b &= \inf\{a, b\}. \end{aligned}$$

*Demostración.* La reflexividad de la relación  $\leq$  se desprende de la idempotencia de la unión. Si  $a \leq b$ , y  $b \leq a$ , es decir,  $a \vee b = b$ , y  $b \vee a = a$ , entonces, en virtud de la conmutatividad,  $a = b$ , es decir, la relación  $\leq$  resulta antisimétrica. Si  $a \vee b = b$ , y  $b \vee c = c$ , entonces, en virtud de la asociatividad, tenemos

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c,$$

lo que demuestra la transitividad de la relación  $\leq$ . Por consiguiente, la relación  $\leq$  es una relación de orden parcial en el conjunto  $A$ . Luego,  $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$  (aquí se han empleado sucesivamente las propiedades de asociatividad e idempotencia) y

$$b \vee (a \vee b) = b \vee (b \vee a) = (b \vee b) \vee a = b \vee a = a \vee b$$

(se han aprovechado sucesivamente las propiedades de conmutatividad, asociatividad, idempotencia y, de nuevo, la propiedad de conmutatividad). De aquí,  $a \leq a \vee b$  y  $b \leq a \vee b$ . Si  $a \leq u$  y  $b \leq u$ , entonces, haciendo uso de la idempotencia, conmutatividad y asociatividad de la operación de unión, tenemos:  $(a \wedge b) \vee u = a \vee (b \vee u) = a \vee u = u$ , es decir,  $a \vee b \leq u$ . Recordando la definición de la cota superior exacta, nos convencemos de que  $a \vee b = \sup\{a, b\}$ . Por fin, de las propiedades de conmutatividad y absorción tenemos

$$(a \wedge b) \vee a = a \vee (a \wedge b) = a$$

y

$$(a \wedge b) \vee b = b \vee (a \wedge b) = b \vee (b \wedge a) = b,$$

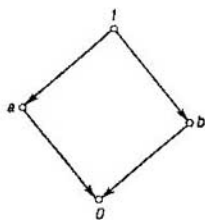


Fig. 8.13.

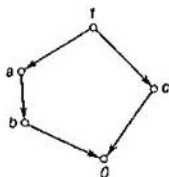


Fig. 8.14.

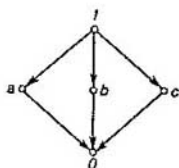


Fig. 8.15.

es decir,  $a \wedge b \leq a$ , y  $a \wedge b \leq b$ . Si  $u \leq a$  y  $u \leq b$ , entonces, en virtud de las propiedades de asociatividad y absorción y por definición de la relación  $\leq$ , obtenemos

$$u \wedge (a \wedge b) = (u \wedge a) \wedge b = (u \wedge (u \vee a)) \wedge b = u \wedge b = u \wedge (u \vee b) = u.$$

De aquí, en virtud de las propiedades de conmutatividad y absorción, se deduce que

$$u \vee (a \wedge b) = (u \wedge (a \wedge b)) \vee (a \wedge b) = (a \wedge b) \vee ((a \wedge b) \wedge u) = (a \wedge b),$$

es decir,  $a \wedge b \geq u$ . De este modo,  $a \wedge b = \inf\{a, b\}$  y el teorema queda demostrado.

Observemos que los razonamientos duales permiten llegar a las mismas deducciones que se obtienen al definir la relación  $\leq$  por la condición  $a \leq b$ , si  $a \wedge b = a$ .

Así pues, cualquier retículo finito siempre puede ser descrito con ayuda de una tabla de intersecciones/uniones o del diagrama de Hasse. Por ejemplo, sea  $A = \{0, a, b, 1\}$  cuyo diagrama de Hasse viene expuesto en la fig. 8.13. Entonces, el retículo  $A$  se define completamente mediante la siguiente tabla de intersecciones/uniones:

Tabla 8.2

$\vee$	$\wedge$	0	a	b	1	$\vee$	$\wedge$	0	a	b	1
0		0	0	0	0	b		b	1	1	b
a		a	0	0	a	1		1	1	1	1

Los valores en la diagonal están omitidos en esta tabla, ya que  $x \vee x = x$ , y  $x \wedge x = x$  para todos los  $x \in A$ . Además, en virtud de la conmutatividad de las operaciones  $\wedge$  y  $\vee$ , esta tabla define por completo el retículo. Para convencerse de esto, basta comprobar sólo las identidades de asociatividad y absorción. El mismo lector puede hacerlo.

Al describir los retículos, emplearemos los métodos que combinan ambos métodos citados. Describamos, como ejemplo, dos retículos en un conjunto de cinco elementos  $0, a, b, c, 1$ , cuyos diagramas de Hasse están ex-

puestos en las figs 8.14 y 8.15. El retículo expuesto en la fig. 8.14, con  $b < a$ ,  $c \vee b = 1$ , y  $a \wedge c = 0$ , recibe el nombre de *pentágono*. La descripción aducida del pentágono es completa, pues todas las demás relaciones del pentágono se deducen de las aducidas. El retículo expuesto en la fig. 8.15, con  $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = 0$ , y  $a \vee b = a \vee c = b \vee c = 1$ , se llama *diamante*. El subconjunto  $B$  del retículo  $A$  se denominará también pentágono o diamante, si es un subretículo que, al ser un conjunto parcialmente ordenado, es isomorfo al pentágono o diamante, respectivamente. De este modo, al afirmar que  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$  es un pentágono (diamante, respectivamente), suponemos que la aplicación  $\varphi: b_1 \rightarrow 0, b_2 \rightarrow a, b_3 \rightarrow b, b_4 \rightarrow c, b_5 \rightarrow 1$  es un isomorfismo del retículo  $B$  sobre el retículo que se muestra en la fig. 8.14 (en 8.15, respectivamente).

Precisemos el concepto de isomorfismo de los retículos. Corrientemente, para los retículos se introducen dos conceptos equivalentes de isomorfismo.

1. Los retículos  $(L_0, \leq)$  y  $(L_1, \leq)$  se denominan isomorfos, si son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados. Ya hemos empleado esta definición de isomorfismo de los retículos.

2. Los retículos  $(L_0; \wedge, \vee)$  y  $(L_1; \wedge, \vee)$  se denominan isomorfos, si existe un isomorfismo  $\varphi$  del conjunto  $L_0$  sobre el  $L_1$ , tal que para cualesquiera  $a, b \in L_0$ :

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b);$$

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

Pese a la equivalencia de estas definiciones, en lo que sigue adelante se distinguirán estos dos conceptos de isomorfismo de los retículos con el fin de evitar toda clase de confusión al generalizarlos.

Renunciaremos también a las designaciones  $(L; \wedge, \vee)$  y  $(L, \leq)$  para los retículos y conjuntos parcialmente ordenados y escribiremos simplemente letras mayúsculas, indicando los conjuntos principales, a excepción de los casos en que esto sea necesario para una mejor asimilación del texto.

El isomorfismo de los conjuntos parcialmente ordenados se generaliza del modo siguiente.

Una aplicación  $\varphi: A_0 \rightarrow A_1$  se llama *isótona* (o bien conservadora del orden) de un conjunto parcialmente ordenado  $A_0$  en otro conjunto parcialmente ordenado  $A_1$ , siempre que  $a \leq b$  en  $A_0$  lleva consigo  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$  en  $A_1$ . Un ejemplo de aplicación isótona  $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$  se aduce en la fig. 8.16, donde  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b) = c$ ,  $\varphi(1) = 1$ .

Se llama *homomorfismo* del retículo  $(L_0; \wedge, \vee)$  en el retículo  $(L_1; \wedge, \vee)$  la aplicación  $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$  que satisface las condiciones

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b);$$

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b),$$

cualesquiera que sean,  $a, b \in L_0$ .

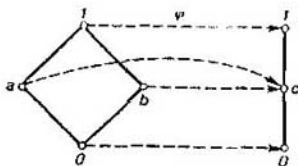


Fig. 8.16.

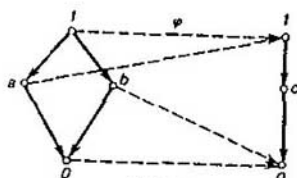


Fig. 8.17.

En la fig. 8.17 se expone el ejemplo del homomorfismo  $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$ .

Todo homomorfismo de los retículos es una aplicación isótona. En efecto, si  $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$  es un homomorfismo, entonces  $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$  para cualesquiera  $a, b \in L_0$ . Sea  $x, y \in L_0$ , y  $x \leq y$  en  $L_0$ . Entonces,  $y = x \vee y$ , y por consiguiente,  $\varphi(y) = \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ , es decir,  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$  en  $L_1$ . Así pues, el homomorfismo  $\varphi$  es también una aplicación isótona.

Lo recíproco no es cierto. Por ejemplo, la aplicación isótona  $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$  expuesta en la fig. 8.16 no es un isomorfismo, puesto que

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(1) = 1 \neq c = c \vee c = \varphi(a) \vee \varphi(b)$$

Recordemos que llamamos producto directo  $P \times Q$  de los conjuntos parcialmente ordenados  $P$  y  $Q$  al conjunto de todos los pares del tipo  $(x, y)$ , donde  $x \in P, y \in Q$ , con la particularidad de que  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$  en  $P \times Q$  cuando y sólo cuando  $x_1 \leq x_2$  en  $P, y_1 \leq y_2$  en  $Q$  (véase § 8.1).

**Teorema 22.** El producto directo  $P \times Q$  de cualesquiera dos retículos  $P$  y  $Q$  es un retículo.

*Demostración.* Sean  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  elementos arbitrarios del conjunto parcialmente ordenado  $P \times Q$ . Por cuanto  $P$  y  $Q$  son retículos, para todo elemento  $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$  del conjunto parcialmente ordenado  $P \times Q$  tenemos:  $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \geq (x_1, y_1)$  y  $(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) \geq (x_2, y_2)$ . Sea  $(u, v) \geq (x_2, y_2)$ , o bien, lo que es equivalente,  $u \geq x_2$  en  $P$ , y  $v \geq y_2$  en  $Q$ , siendo  $i = 1, 2$ . De aquí, en virtud de la definición de cota superior exacta,  $u \geq x_1 \vee x_2$ , y  $v \geq y_1 \vee y_2$ , así que  $(u, v) \geq (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$  en  $P \times Q$ . Esto demuestra que

$$(x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2) = (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2).$$

De aquí se desprende que la unión situada en el segundo miembro existe.

Mediante los razonamientos duales llegamos a que

$$(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) = (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2),$$

por lo cual  $P \times Q$  es un retículo y el teorema queda demostrado.

Un retículo que satisface la identidad

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$$

o bien (lo que es equivalente) la condición siguiente:  $a \geq b$ , lleva consigo  $(a \wedge c) \vee b = a \wedge (b \vee c)$  y se llama *modular*. Un ejemplo importante de retículos modulares es el de subespacios de un espacio lineal (véase el ejemplo 9

en el § 8.1). En efecto, si  $A, B, C$  son subespacios y si  $A \supseteq B$ , entonces, evidentemente,  $(B + C) \cap A \supseteq B + (A \cap C)$ . Viceversa, si el vector  $a$  se dispone en  $(B + C) \cap A$ , entonces  $a = b + c$ , donde  $b \in B$  y  $c \in C$ . De aquí,  $c(a - b) \in (C \cap A)$ , es decir,  $a \in (B + (A \cap C))$  y, por lo tanto,  $(B + C) \cap A \subseteq B + (A \cap C)$ . De un modo análogo se comprueba que también son modulares los retículos de los divisores normales de un grupo arbitrario, de los ideales de un anillo y de los submódulos del módulo. Un ejemplo típico de un retículo no modular es el diagrama que se expone en la fig. 8.14.

Demos a conocer ahora una representación intuitiva de un «retículo más general» que está engendrado por cierto conjunto de elementos y que satisface ciertas correlaciones. Los «retículos más generales» se denominarán en adelante *libres*. Estos retículos se construirán por formación sucesiva de elementos «nuevos» con ayuda de las operaciones de unión e intersección hasta que se obtenga un retículo. Además, los elementos «nuevos» se identificarán con los «antiguos», si y sólo si las igualdades entre ellos pueden deducirse o bien de las identidades del retículo, o bien de las correlaciones prefijadas. Ilustremos lo dicho con un ejemplo de construcción de un «retículo más general» que está engendrado por los elementos  $a, b, c$  y que satisface la relación  $b < a$ . Formemos, ante todo, las uniones e intersecciones  $a \vee c, b \vee c, a \wedge c, b \wedge c$ . Ha de notarse que  $a \vee b \vee c = (a \vee b) \vee c = a \vee c$ , puesto que  $a \vee b = a$ ; análogamente,  $a \wedge b \wedge c = b \wedge c$ . Demostremos ahora que los siete elementos  $a, b, c, a \vee c, b \vee c, a \wedge c$  y  $b \wedge c$ , de los que ya disponemos, son distintos dos a dos. Recordemos que dos de ellos serían iguales, si la igualdad entre ellos se deduciera de la relación  $b < a$  y de los axiomas del retículo. Por eso, para mostrar que cualesquiera dos de los elementos citados son distintos, basta encontrar un retículo con los elementos  $a, b, c$  que satisfaga la relación  $b < a$ , en la que estos dos elementos son distintos. Por ejemplo, para mostrar que  $a \neq a \vee c$ , tomemos un retículo:  $\{0, 1, 2\}$ , donde  $0 < 1 < 2$ , y pongamos:  $b = 0, a = 1, c = 2, b \wedge c = 0 < 1 = a$ . Entonces,  $a = 1 \neq 2 = 1 \vee 2 = a \vee c$ . El paso siguiente consiste en la formación, a base de estos elementos, de las nuevas uniones e intersecciones, tales como  $b \vee (a \wedge c), (b \vee c) \wedge a$ . Es fácil notar que todas las demás uniones e intersecciones son iguales a uno de los elementos introducidos, por ejemplo,  $b \wedge (a \wedge c) = b \wedge c, a \vee (a \wedge c) = a$ . Demostremos ahora que los nueve elementos  $a, b, c, a \vee c, b \vee c, a \wedge c, b \wedge c, b \vee (a \wedge c)$  y  $a \wedge (b \vee c)$  forman un retículo. Con este fin hace falta demostrar que de estos nueve elementos ya no obtendremos elementos nuevos con ayuda de las operaciones de unión e intersección. Todas las  $\binom{9}{2} = 36$  uniones y el mismo número de intersecciones, que han de ser comprobadas, se calculan de un modo trivial. Por ejemplo,  $a \vee (b \vee (a \wedge c)) = (a \vee b) \vee (a \wedge c) = a$  en virtud de la propiedad de absorción, y puesto que  $a \vee b = a$ ; análogamente,  $c \wedge (a \wedge (b \vee c)) = (c \wedge a) \wedge (b \vee c) = a \wedge c$ , puesto

que  $c \wedge a \leq b \vee c$ . El «retículo más general» obtenido se muestra en la fig. 8.18.

Se llama *diversidad* de retículos a una clase de todos los retículos, cada uno de los cuales satisface cierto juego de identidades prefijado. La clase de todos los retículos o la clase de todos los retículos modulares son ejemplos de la diversidad de retículos.

Demos ahora a conocer la definición estricta de «retículo más general» o de retículo libre respecto a cierta diversidad de retículos.

Sea  $A$  un conjunto parcialmente ordenado y sea  $K$  cierta diversidad de retículos. Un retículo  $F_K(A)$  se denomina libre en la diversidad  $K$ , engendrada por el conjunto parcialmente ordenado  $A$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $F_K(A) \in K$ ;
- b)  $A \subseteq F_K(A)$  y para cualesquiera  $a, b, c \in A$ :  $\inf_A \{a, b\} = c$  ( $\sup_A \{a, b\} = c$ ) cuando y sólo cuando  $a \wedge b = c$  en  $F_K(A)$  ( $a \vee b = c$  en  $F_K(A)$ , respectivamente);

c)  $A$  es el conjunto generador del retículo  $F_K(A)$ ;

d) Sea  $L \in K$  y  $\varphi: A \rightarrow L$ , una aplicación isótoma tal que si  $a, b, c \in A$  e  $\inf_A \{a, b\} = c$  ( $\sup_A \{a, b\} = c$ , respectivamente), entonces  $\varphi(a) \wedge \varphi(b) = \varphi(c)$  ( $\varphi(a) \vee \varphi(b) = \varphi(c)$  en  $L$ , respectivamente). Entonces la aplicación puede ser prolongada hasta que se obtenga un homomorfismo reticular  $\Psi: F_K(A) \rightarrow L$ , es decir, un isomorfismo tal que  $\varphi(a) = \Psi(a)$  para todo  $a \in A$ .

El retículo  $F_K(A)$  se llama también retículo  $K$ -libre sobre el conjunto parcialmente ordenado  $A$ .

Cuando  $K$  coincide con la diversidad de todos los retículos, omitiremos el índice  $K$  y al retículo libre sobre  $A$  lo llamaremos  $F(A)$ . Si  $A$  es una anticadena y  $|A| = n$ , denotaremos  $F_K(n)$  ó  $F(n)$  y llamaremos este retículo  $K$ -libre o, simplemente, libre de  $n$  elementos generadores. En 1900 Dedekind mostró que un retículo modular libre  $F_M(3)$  de tres elementos generadores tiene 28 elementos y su diagrama tiene la forma expresada en la fig. 8.19, donde los elementos generadores están designados con  $x, y, z$ , mientras que

$$a = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z), \quad b = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z),$$

$$x_1 = (x \wedge a) \vee b, \quad y_1 = (y \wedge a) \vee b, \quad z_1 = (z \wedge a) \vee b.$$

En el teorema que sigue se da una caracterización muy útil de los retículos modulares.

**Teorema 23.** Un retículo  $L$  es modular, si y sólo si no contiene pentágonos.

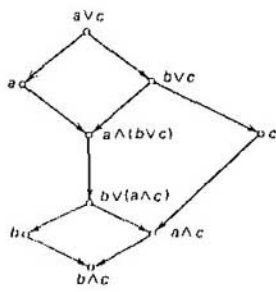


Fig. 8.18.

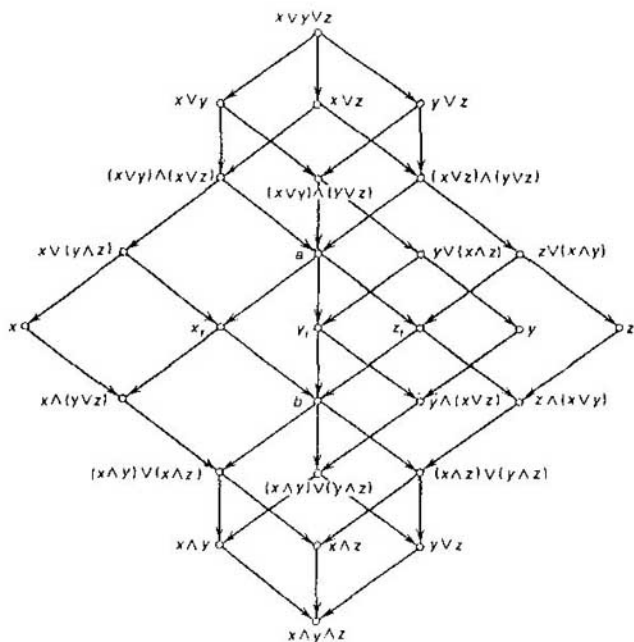


Fig. 8.19.

*Demostración.* Si  $L$  es un retículo modular, también es modular todo subretículo suyo. Por cuanto el pentágono no es un retículo modular, no puede encajarse en  $L$ . La necesidad está demostrada.

A la inversa, sea  $L$  un retículo no modular. En este caso existen los elementos  $a, b, c \in L$ , tales que  $b \leq a$  y  $(a \wedge c) \vee b \neq a \wedge (c \vee b)$ . El retículo libre que está engendrado por los elementos  $a, b, c$ , y que satisface la relación  $b < a$  se muestra en la fig. 8.18. Un subretículo en  $L$ , engendrado por los elementos  $a, b, c$ , debe ser una imagen homomorfa de este retículo libre. Los siguientes cinco elementos del retículo libre:  $a \wedge c$ ,  $b \vee (a \wedge c)$ ,  $a \wedge (b \vee c)$ ,  $c$  y  $b \vee c$  forman un pentágono y no pueden identificarse para un homomorfismo correspondiente, puesto que al identificar cualesquiera dos de los elementos citados, serán identificados también los elementos  $b \vee (a \wedge c)$  y  $a \wedge (c \vee b)$ , lo que contradice nuestra suposición. El teorema queda pues demostrado.

Un retículo que satisface una de las siguientes identidades equivalentes:

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= a \wedge (b \vee c); \\ (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= a \vee (b \wedge c), \end{aligned}$$



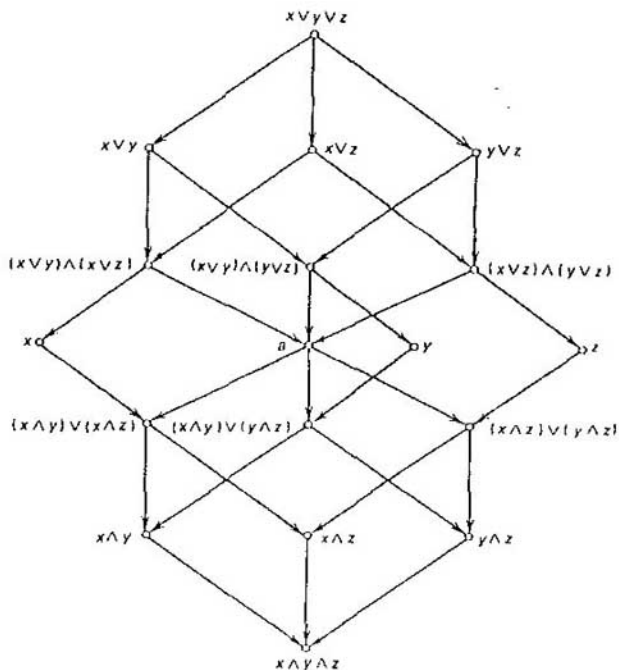


Fig.8.20.

se denomina *distributivo*. Es evidente que un retículo, dual respecto del retículo distributivo, es también distributivo. Un ejemplo muy importante de un retículo distributivo es el booleano, es decir el retículo  $\mathcal{P}(S)$  de todos los subconjuntos de un conjunto arbitrario  $S$ . Es también retículo distributivo cualquier cadena. Cabe notar que cualquier retículo distributivo es modular. Sin embargo, no todo retículo modular es distributivo. Por ejemplo, un retículo modular de todos los subespacios del espacio lineal no es distributivo. Los retículos cuyos diagramas se dan en las figs. 8.14 y 8.15 no son distributivos. Una familia de todos los retículos distributivos forma una diversidad de retículos. Un retículo distributivo libre  $F_D(3)$  de tres elementos generadores tiene 18 elementos y su diagrama se expone en la fig. 8.20. No es difícil ver que el diagrama  $F_D(3)$  se obtiene del diagrama  $F_M(3)$  (véase fig. 8.19) «pegando»

$$\begin{array}{ll}
 x \vee (y \wedge z) & \text{con } (x \vee y) \wedge (x \vee z); & x \wedge (y \vee z) & \text{con } (x \wedge y) \vee (x \wedge z); \\
 y \vee (x \wedge z) & \text{con } (x \vee y) \wedge (y \vee z); & y \wedge (x \vee z) & \text{con } (x \wedge y) \vee (y \wedge z); \\
 z \vee (x \wedge y) & \text{con } (x \vee z) \wedge (y \vee z); & z \wedge (x \vee y) & \text{con } (x \wedge z) \vee (y \wedge z)
 \end{array}$$

(estos pares de elementos coinciden debido a la distributividad). Al realizarse tal «pegado», los elementos  $a$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  y  $b$  del retículo modular libre también «se pegan» formando un elemento. Así pues, en el retículo distributivo

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

El mismo lector puede convencerse de esto.

**Teorema 24.** Un retículo modular  $L$  es distributivo, si y sólo si no contiene diamantes.

*Demostración.* Si  $L$  es un retículo distributivo, todo subretículo suyo será también distributivo. Por cuanto el diamante no es un retículo distributivo, a él no se le puede encajar en  $L$ . La necesidad está demostrada.

Viceversa, sea  $L$  un retículo modular, pero no distributivo. Entonces, se encontrarán tales elementos  $x, y, z \in L$  que  $x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ . Un retículo modular libre engendrado por  $x, y, z$  está representado en la fig. 8.19. Del diagrama de este retículo se ve que sus elementos  $a, b, x_1, y_1, z_1$  forman un diamante. Por eso, en cualquier retículo modular dichos cinco elementos forman un subretículo que es isomorfo a la imagen homomorfa del diamante. Pero, el diamante tiene sólo dos imágenes homomorfas: el propio diamante y el retículo de un solo elemento. En el primer caso la suficiencia del teorema está demostrada. Al tratar el segundo caso, observemos que al pegar los elementos  $a$  y  $b$ , se pegan también los elementos  $x \wedge (y \vee z)$  y  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ , lo que contradice nuestra suposición. Por consecuencia, todo retículo no distributivo contiene un diamante y el teorema queda demostrado.

De los teoremas 23 y 24 obtenemos las siguientes caracterizaciones útiles de los retículos distributivos y modulares:

**Teorema 25.** Un retículo  $L$  es distributivo cuando y sólo cuando no contiene pentágonos ni tampoco diamantes.

**Corolario 1.** a) El retículo  $L$  es distributivo cuando y sólo cuando para cualesquiera  $a, b, c \in L$  de las relaciones  $a \wedge c = b \wedge c$  y  $a \vee c = b \vee c$  se deduce que  $a = b$ .

b) El retículo  $L$  es modular cuando y sólo cuando para todos los  $a, b, c \in L$  de las relaciones  $b \geq a$ ,  $a \wedge c = b \wedge c$  y  $a \vee c = b \vee c$  se deduce que  $a = b$ .

La propiedad más importante de la modularidad se expresa por la siguiente afirmación.

**Teorema 26.** Si  $a$  y  $b$  son elementos de un retículo modular  $L$ , los intervalos  $[a \wedge b, a]$  y  $[b, a \vee b]$  son isomorfos. En este caso el isomorfismo se realiza mediante las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x \vee b & (a \wedge b \leq x \leq a) \\ \psi(y) &= a \wedge y & (b \leq y \leq a \vee b). \end{aligned}$$

*Demostración.* Está claro que  $\varphi$  y  $\psi$  son aplicaciones isótonas, con la particularidad de que  $\psi(\varphi(x)) = a \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$  (en virtud de la

identidad de la modularidad y merced a la condición  $x \geq a \wedge b$ ) y  $\varphi(\psi(y)) = (a \wedge y) \vee b = (a \vee b) \vee y = y$  (en virtud de la identidad de la modularidad y merced a la condición  $y \leq a \vee b$ ). Por consiguiente,  $\varphi$  y  $\psi$  son isomorfismos, lo que se trataba de demostrar.

Dos intervalos  $[x, y]$  y  $[x', y']$  del retículo  $L$  se denominan *transpuestos*, si  $[x, y] = [a, a \vee b]$  y  $[x', y'] = [a \wedge b, b]$  para ciertos  $a, b \in L$ . Diremos que los intervalos  $[x, y]$  y  $[x', y']$  son *proyectivos* (la designación es  $[x, y] \sim [x', y']$ ), si existe una sucesión finita de intervalos

$$[x, y], [x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n], [x', y'],$$

en la cual cualesquiera dos intervalos vecinos son transpuestos.

**Ejercicio 1.** Sea  $\mathcal{P}(S)$  un booleano. Demuéstrese que dos intervalos  $[A, B]$  y  $[C, D]$  del retículo de Boole  $\mathcal{P}(S)$  son proyectivos cuando y sólo cuando  $B - A = D - C$ , donde  $A, B, C, D \subseteq S$ .

Directamente del teorema 26 se desprende que en un retículo modular los intervalos proyectivos son isomorfos. De aquí se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 27 (de Jordan-Hölder para retículos modulares).** Cualesquiera dos cadenas máximas que unen los elementos maximal y minimal de un retículo modular finito son de longitud igual. Si  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ , y  $b_0 = a_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n = a_n$  representan un par de tales cadenas máximas, existe una permutación  $\sigma$  de índices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , tal que  $[a_{i-1}, a_i] \sim [b_{\sigma(i)-1}, b_{\sigma(i)}]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Además, si el retículo en consideración es distributivo, la permutación  $\sigma$  está unívocamente definida.

Así pues, una familia  $\mathcal{I} = \{[a_{i-1}, a_i] \mid i = 1, \dots, n\}$  de intervalos de la cadena máxima  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  de un retículo distributivo finito es unívoca con una exactitud de hasta una proyectividad. Sobre  $\mathcal{I}$  puede introducirse una relación de orden  $\leq$ : para  $[x, y]$  y  $[z, w] \in \mathcal{I}$  diremos que  $[x, y] \leq [z, w]$ , si para cualquier cadena máxima  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  existen  $p$  y  $q$ , tales que  $p \leq q$  y  $[a_p, a_{p+1}] \sim [x, y]$ ,  $[a_q, a_{q+1}] \sim [z, w]$ .

Del teorema 27 obtenemos

**Corolario 2.** Supongamos que  $S$  es un conjunto finito;  $L$ , un subretículo del retículo de Boole  $\mathcal{P}(S)$ ;  $S^-$ , el elemento minimal y  $S^+$ , un complemento en  $S$  del elemento maximal del retículo  $L$ . Si  $A_0 = S^-$ ,  $A_1, \dots, A_n = S - S^+$  es la cadena máxima en  $L$  y  $\mathcal{I} = \{A_i - A_{i-1}\}; i = 1, \dots, n\}$ , entonces

$$(S^-, \{F : F \in \mathcal{I}\}, S^+)$$

es una partición del conjunto  $S$ , la cual no depende de la elección de la cadena máxima. Además, los conjuntos  $S^-$  y  $S^+$  pueden ser vacíos, y todos los  $F \in \mathcal{I}$  no vacíos.

Cabe notar que  $F \leq F'$ , donde  $F, F' \in \mathcal{I}$ , cuando y sólo cuando para todo  $A \in L$  de  $F' \subseteq A$  se deduce que  $F \subseteq A$ .

Un conjunto parcialmente ordenado  $A$  se llama *retículo completo*, si ca-

da subconjunto suyo no vacío  $B$  tiene  $\sup_A B$  e  $\inf_A B$ . Los retículos completos son: el segmento  $[0, 1]$  de orden corriente; el conjunto de todos los subconjuntos de cierto conjunto ordenado por inclusión; toda cadena finita. Un retículo completo lo constituye también un conjunto parcialmente ordenado  $B(S_n)$  de todas las particiones no ordenadas del conjunto finito  $S_n$  (véase el ejemplo 8 del § 8.1). Está claro que cualquier retículo completo ha de tener 0 y 1. Por eso, un retículo de números enteros de orden corriente no es un retículo completo.

Por una partición dada  $\pi$  se puede determinar la relación de equivalencia  $\rho$ , suponiendo  $a\rho b$  cuando y sólo cuando  $a$  y  $b$  se contienen en un mismo bloque de la partición  $\pi$ . Viceversa, si  $\rho$  es una relación de equivalencia, entonces la familia de clases contiguas de equivalencia  $\rho$  en el conjunto  $A$  (se llama clase contigua de equivalencia  $\rho$ , definida por el elemento  $a \in A$ , al subconjunto  $\{x \in A \mid x\rho a\}$ ) es la partición del conjunto  $A$ . Así pues, existe una correspondencia biunívoca entre las particiones y las relaciones de equivalencia. Por lo tanto, el conjunto de todas las relaciones de equivalencia, definidas sobre el conjunto  $A$  y ordenado del modo siguiente:  $\rho \leq \tau$ , si  $a\rho b$ , lleva consigo  $a\tau b$ , y forma un retículo completo.

Ejercicios. Compruébese que

2. El conjunto de todas las particiones del conjunto  $A$ , ordenado según la reunión de los bloques, es un retículo completo.
3. Una suma ordenada de retículos completos  $\{A_\alpha \mid \alpha \in L\}$ , donde  $L$  es un retículo completo, es retículo completo.
4. Un producto directo de los retículos completos es retículo completo.
5. Un producto ordenado de retículos completos  $\{A_\alpha \mid \alpha \in L\}$ , donde  $L$  es un retículo completo que satisface la condición de mínimo, es un retículo completo.

Un retículo  $L$  se denomina *retículo con complementos relativos*, si para todo elemento  $c$  perteneciente a cualquier intervalo  $[a, b]$  existe un elemento  $d$ , tal que  $c \vee d = b$ , y  $c \wedge d = a$ . Este elemento  $d$  recibe el nombre de *complemento* del elemento  $c$  en el intervalo  $[a, b]$ . El complemento se define de una manera no unívoca. Por ejemplo, en el retículo expuesto en la fig. 8.21 los elementos  $c$  y  $d$  son complementos del elemento  $b$  en el intervalo  $[s, 1]$ . No obstante, los elementos  $a$  y  $s$  sirven uno para otro de únicos complementos en el intervalo  $[a, b]$ . Un retículo con 0 y 1 se denomina *retículo con complementos*, si cada uno de sus elementos tiene complemento en el intervalo  $[0, 1]$ . Los complementos en el intervalo  $[0, 1]$  se llaman simplemente *complementos*. Debido al corolario 1, en cualquier intervalo dado  $[a, b]$  del retículo distributivo  $L$  el elemento  $c$  puede tener, como máximo, un único complemento relativo. Cada retículo modular  $L$  con complementos es un retículo con complementos relativos. El pentágono (véase fig. 8.14) es un retículo no modular con complementos, siendo éstos, sin embargo, no relativos.

Se denomina *retículo de Boole* un retículo distributivo con complementos.

**Teorema 28.** En un retículo de Boole  $L$  cualquier elemento  $x$  tiene uno

y sólo un complemento  $x$ . Además, para cualesquiera  $x, y \in L$ , tienen lugar las relaciones:

- $x \wedge x = 0, x \vee x = 1$  (de complementariedad);
- $\bar{\bar{x}} = x$  (de involución);
- $\overline{x \wedge y} = x \vee \bar{y}, \overline{x \vee y} = x \wedge \bar{y}$  (leyes de Morgan)

*Demostración.* Por ser distributivo el retículo de Boole  $L$ , la correspondencia  $x \rightarrow \bar{x}$  es unívoca. Pero, en vista de que el concepto de complemento es simétrico,  $x$  es un complemento para  $\bar{x}$ , de donde  $x = \bar{\bar{x}}$  en virtud de la unicidad de los complementos en  $L$ . La propiedad de involución queda demostrada. Por consiguiente, la correspondencia  $x \rightarrow \bar{x}$  es biunívoca.

Demostremos ahora que

$$(*) \quad x \wedge a = 0, \text{ cuando y sólo cuando } x \leq \bar{a}.$$

En efecto, si  $x \leq \bar{a}$ , entonces  $x \wedge a \leq a \wedge \bar{a} = 0$ , y si  $x \wedge a = 0$ , tendremos  $x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee \bar{a}) =$  (debido a la distributividad)  $= (x \wedge a) \vee (x \wedge \bar{a}) = 0 \vee (x \wedge \bar{a}) = x \wedge \bar{a}$ . De este modo (\*) queda demostrada.

Si  $a \leq b$ , entonces  $b \wedge a \leq b \wedge b = 0$  y por lo tanto, en virtud de (\*),  $b \leq a$ . Dicho de otro modo, la correspondencia biunívoca  $x \rightarrow \bar{x}$  invierte el orden. Por cuanto la correspondencia  $x \rightarrow \bar{x}$  también invierte el orden, entonces  $x \rightarrow \bar{\bar{x}}$  es un isomorfismo autódual, lo que demuestran las leyes de Morgan.

Del teorema 28 se deduce que cada retículo de Boole es autódual (es decir, es isomorfo respecto de un retículo dual hacia sí mismo). Por cuanto los complementos en el retículo de Boole son únicos, éste puede considerarlo como un álgebra con dos operaciones binarias  $\vee, \wedge$ , una operación de complementariedad  $\bar{\phantom{x}}$  y dos elementos marcados:  $0$  y  $1$ . Se llama *álgebra de Boole* a un álgebra con las operaciones  $\vee, \wedge$  y dos fronteras universales:  $0$  y  $1$ , que satisfacen las propiedades de: idempotencia, conmutatividad, asociatividad, absorción (véase la definición de retículo), modularidad (retículo modular), distributividad (retículo distributivo), fronteras universales (retículo con  $0$  y  $1$ ), complementariedad (retículo con complementos), involución y leyes de Morgan (retículo de Boole) (véase § 2.1). Por ejemplo, el conjunto  $\mathcal{P}(S)$  de todos los subconjuntos del conjunto  $S$  (booleano) es un álgebra de Boole. Luego, cualquier subálgebra de un álgebra de Boole es de por sí un álgebra de Boole. Las álgebras de Boole son un producto directo de las álgebras de Boole y los intervalos de las álgebras de Boole.

**Ejercicios.** Demuéstrese que

6. Un conjunto de números enteros no negativos, ordenado respecto de la divisibilidad (véase el ejemplo 5 del § 8.1) es un retículo distributivo (consideramos que  $0$  divide a  $0$ ; aquí,  $\sup\{a, b\}$  es el mínimo común múltiplo de los números  $a$  y  $b$ ;  $\inf\{a, b\}$  es el máximo común divisor de los números  $a$  y  $b$ ).

7. Un retículo de Boole finito es isomorfo al retículo de todos los subconjuntos de un cierto conjunto finito.

8. Cualquier retículo distributivo se encaja en un retículo de Boole.

9. Todo retículo modular con complementos únicos es un retículo de Boole.

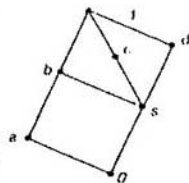


Fig. 8.21.

**Teorema 29.** En un retículo  $L$  de longitud finita y complementos relativos, cada elemento  $a$  es una unión de átomos contenidos en él.

*Demostración.* Si  $a > 0$ , entonces o bien  $a$  es un átomo, o bien  $a > b > 0$  para cierto  $b \in L$ . Sea  $c$  un complemento relativo del elemento  $b$  en el intervalo  $[0, a]$ . Por inducción a lo largo del intervalo  $[0, a]$  se demuestra que los elementos  $b$  y  $c$  son ambos una unión de átomos. Pero, en tal caso, esto es lícito también para  $a = b \vee c$ . El teorema está demostrado.

**Colorario 3.** En un retículo modular de longitud finita con complementos cada elemento es una unión de átomos contenidos en él.

Se dice que un retículo  $L$  satisface la condición de recubrimiento por arriba, si para cualesquiera sus elementos  $a, b$  ( $a \neq b$ ) las condiciones  $a \wedge b \prec b$  y  $a \wedge b \prec a$  llevan consigo  $a \prec a \vee b$ , y  $b \prec a \vee b$ . La condición de recubrimiento por debajo se define de un modo dual: el retículo  $L$  satisface la condición de recubrimiento por debajo, si para cualesquiera  $a, b \in L$  ( $a \neq b$ ) las condiciones  $a \prec a \vee b$  y  $b \prec a \vee b$  traen consigo  $a \wedge b \prec a$  y  $a \wedge b \prec b$ . Del teorema 26 se deduce que el retículo modular posee las condiciones de recubrimiento tanto por arriba, como por debajo.

Un retículo  $L$  se llama *semimodular*, si satisface la condición de recubrimiento por arriba, o bien (lo que es equivalente) si para cualesquiera  $a, b, c \in L$  la condición  $a \prec b$  trae consigo  $a \vee c \prec b \vee c$ , o bien  $a \vee c = b \vee c$ . Son ejemplos de retículos semimodulares los retículos modulares y algunos retículos importantes que aparecen en las geometrías (véase § 8.4). Dos ejemplos más de retículos semimodulares se exponen en la fig. 8.22.

Sea  $A$  un conjunto parcialmente ordenado con 0. Definamos en él una *función de altura* (o de *rango*) del modo siguiente:  $r(a)$  es igual a la longitud de la cadena más larga en el intervalo  $[0, a]$  (si tal cadena no existe, suponemos  $r(a) = \infty$ ). Si  $A$  es un conjunto parcialmente ordenado de longitud finita  $N$ , entonces,  $0 \leq r(a) \leq N$  para cualquier elemento  $a \in A$ . En un retículo semimodular de longitud finita el rango  $r(a)$  coincide con la longitud de la cadena máxima arbitraria en el intervalo  $[0, a]$ . Esto se deduce del siguiente teorema muy importante.

**Teorema 30** (condición de Jordan—Hölder). En un retículo semimodular  $L$  de longitud finita, cualesquiera dos cadenas máximas entre  $a, b \in L$  arbitrarios, tales que  $a \leq b$ , son de longitud igual.

*Demostración.* Sea  $a = a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_n = b$  una cadena máxima de longitud  $n$  en  $[a, b]$ . Demostremos, por inducción respecto de  $n$ , que cualquier otra cadena máxima es de longitud  $n$ . Para  $n = 0$ , la afirmación es obvia. Si  $n = 1$ , entonces  $a \prec b$ , y por lo tanto, la cadena máxima en  $[a, b]$  es única. Supongamos que nuestro teorema es lícito para todos los subretículos  $[a, b]$  de longitud inferior a  $n$ , donde  $n \geq 2$ . Sea  $a = b_1 \prec b_2 \prec \dots \prec b_m = b$  otra cadena máxima en  $[a, b]$ . Si  $a_1 = b_1$ , entonces en el retículo semimodular  $[a_1, b]$  la cadena máxima  $a_1 \prec \dots \prec a_n = b$  es de una longitud igual a  $n - 1$ ; por consiguiente, la cadena máxima  $a_1 \prec b_2 \prec \dots \prec b_m = b$  ha de tener una longitud igual a  $n - 1$ ;

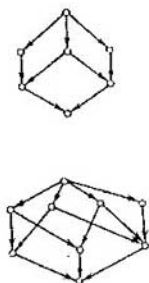


Fig. 8.22.

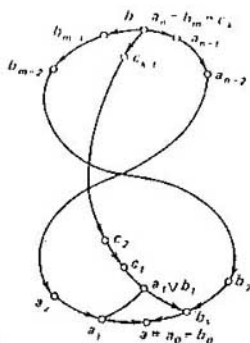


Fig. 8.23.

por eso  $n = m$ . Si  $a_1 \neq b_1$  (véase fig. 8.23), entonces examinemos una cadena máxima de longitud  $k$  en  $[a_1 \vee b_1, b]$ . Por ser el retículo semimodular, tenemos  $(a_1 \vee b_1) \succ a_1$  y  $(a_1 \vee b_1) \succ b_1$ . Por consiguiente,  $a_1 \prec (a_1 \vee b_1) \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_k = b$  es la cadena máxima de longitud  $k + 1$  en  $[a_1, b]$ , y  $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n = b$  es también una cadena máxima, pero de longitud  $n - 1$  en  $[a_1, b]$ . De este modo, en virtud de la suposición inductiva,  $k + 1 = n - 1$ . Análogamente,  $k + 1 = m - 1$ , por lo cual  $n = m$ . El teorema está demostrado.

De un modo dual se demuestra que en todo retículo  $L$  de longitud finita, que satisface la condición de recubrimiento por debajo, cualesquiera dos cadenas máximas entre los elementos arbitrarios  $a, b \in L$  tienen igual longitud, es decir, se cumple la condición de Jordan—Hölder para cadenas.

**Ejercicios.** Demuéstrase que

10. Si en un conjunto parcialmente ordenado  $A$  con 0 se cumple la condición de Jordan—Hölder para cadenas, su función de rango  $r(a)$ , definida para todo  $a \in A$ , satisface las siguientes condiciones:

- $r(0) = 0$ ;
- de  $a \prec b$  se deduce que  $r(b) = r(a) + 1$ .

11. Si en un conjunto parcialmente ordenado  $A$  está definida una función  $r$ , tal que  $r(0) = 0$  y de  $a \prec b$  se deduce que  $r(b) = r(a) + 1$ , entonces  $A$  satisface la condición de Jordan—Hölder para las cadenas y esta función coincide con su función de rango.

La modularidad y la semimodularidad pueden caracterizarse en términos de función de rango.

**Teorema 31.** Sea  $L$  un retículo de longitud finita con 0. El retículo  $L$  es semimodular cuando y sólo cuando satisface la condición de Jordan—Hölder para cadenas y para todos los  $a, b \in L$  tiene lugar la desigualdad

$$r(a) + r(b) \geq r(a \wedge b) + r(a \vee b),$$

donde  $r$  es la función de rango del retículo  $L$ .

*Demostración.* Por ser  $L$  semimodular en el retículo  $L$  se cumple la con-

dicción de Jordan—Hölder para las cadenas. Sea  $a \wedge b = c_0 < c_1 < \dots < c_t = b$  una cadena máxima en el intervalo  $[a \wedge b, b]$ . De acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de esta cadena es igual a  $r(b) - r(a \wedge b)$ . Teniendo presente la condición de recubrimiento por arriba para los retículos semimodulares, llegamos a que para  $L$

$$a \vee (a \wedge b) = a = (a \vee c_0) \leq (a \vee c_1) \leq \dots \leq (a \vee c_t) = a \vee b$$

es también una cadena máxima, pero en el intervalo  $[a, a \vee b]$ . La longitud de esta cadena no sobrepasa la de la primera cadena (algunos elementos pueden coincidir), es decir, no es superior al número:  $r(b) - r(a \wedge b)$ . Por otra parte, de acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de esta cadena es igual a  $r(a \vee b) - r(a)$ . Por eso,  $r(b) - r(a \wedge b) \geq r(a \vee b) - r(a)$ . La necesidad está demostrada.

Demostremos ahora la suficiencia. Sean  $a, b \in L$  tales que  $a > (a \wedge b)$ ,  $b > (a \wedge b)$  y  $a \neq b$ . Entonces, en virtud de la condición de Jordan—Hölder (véase ejercicio 10):  $r(a) = r(b) = r(a \wedge b) + 1$ . Sustituyamos estas igualdades en la desigualdad mencionada en la hipótesis del teorema y obtendremos:  $r(a \vee b) \leq r(a) + 1$ ,  $r(a \vee b) \leq r(b) + 1$ . De aquí se desprende directamente que  $(a \vee b) \geq a$ , y  $(a \vee b) \leq b$ . Demostremos que  $a \vee b \neq a$ . Por reducción al absurdo tenemos: sea  $a \vee b = a$ . Entonces,  $a > b$  y  $a \wedge b = b$ ; mas esto contradice a que  $b > (a \wedge b)$ . Por consiguiente,  $(a \vee b) > a$ . Análogamente se comprueba que  $(a \vee b) > b$ . El teorema está demostrado.

Del teorema 31 y de la dualidad de las condiciones de recubrimiento por arriba y por debajo obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 4.** Si en un retículo  $L$  de longitud finita con  $0$  se cumple la condición de recubrimiento por debajo, entonces para cualesquiera  $a, b \in L$  tiene lugar la desigualdad:  $r(a) + r(b) \leq r(a \wedge b) + r(a \vee b)$ .

Otra aplicación del teorema 31 es la siguiente afirmación:

**Corolario 5.** Para un retículo  $L$  de longitud finita son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- $L$  es un retículo modular;
- el retículo  $L$  satisface las condiciones de recubrimiento tanto por arriba, como por debajo;
- $L$  no contiene pentágonos;
- para cualesquiera  $a, b \in L$  se verifica la igualdad

$$r(a) + r(b) = r(a \wedge b) + r(a \vee b).$$

*Demostración.* Ya se ha establecido que a) trae consigo b). El teorema 31 y el corolario 4 estipulan que de b) se deduce d). La equivalencia entre a) y c) está demostrada en el teorema 23. Para finalizar la demostración del corolario demostremos que de d) se deduce c). Por reducción al absurdo: supongamos que el retículo  $L$  contiene un pentágono  $\{0, a, b, c, 1\}$  (véase fig. 8.14) y para este retículo se cumple la condición d). Entonces



$$\begin{aligned} r(a) \vdash r(c) &= r(a \vee c) \vdash r(a \wedge c) = r(1) = r(0) \\ &= r(b \vee c) \vdash r(b \wedge c) = r(b) \vdash r(c). \end{aligned}$$

De donde,  $r(a) = r(b)$ , lo que es imposible, puesto que  $b < a$ . El corolario está demostrado.

Sea  $L$  un retículo con  $0$ . El subconjunto  $I$  del conjunto  $L \setminus \{0\}$  se denomina *independiente*, si para cualesquiera subconjuntos finitos  $A$  y  $B$  suyos es válida la igualdad

$$\inf \{ \sup A, \sup B \} = \sup (A \cap B).$$

**Teorema 32.** Un subconjunto finito  $I$  del retículo  $L$  es independiente cuando y sólo cuando la aplicación  $\varphi: A \rightarrow \sup A$ , definida para todos los  $A \in \mathcal{P}(I)$ , es un isomorfismo entre el retículo del booleano  $\mathcal{P}(I)$  y el subretículo del retículo  $L$ , generado por el conjunto  $I$ .

*Demostración.* Tenemos  $\sup \{ \sup A, \sup B \} = \sup \{ A \cup B \}$ , y por eso, si el conjunto  $I$  es independiente (es decir, si  $\inf \{ \sup A, \sup B \} = \sup \{ A \cap B \}$ ), entonces  $\varphi$  es un homomorfismo de los retículos. Si la aplicación  $\varphi$  no es biunívoca, entonces  $\sup A = \sup B$  para algunos subconjuntos  $A \subseteq I$ ,  $B \subseteq I$ ,  $A \neq B$ . Sea, por ejemplo,  $A \not\subseteq B$  y  $a \in (A \setminus B)$ . Entonces,  $a \leq \sup B$ ,  $a \notin B$ ; por eso,  $a = \inf \{ a, \sup B \} = \inf \{ \sup \{ a \}, \sup B \} = \sup \{ \{ a \} \cap B \} = \sup \emptyset = 0$ , lo que es imposible. Por consiguiente  $\varphi$  es un isomorfismo.

Dejemos al lector la demostración de la afirmación recíproca.

Es evidente que el subconjunto de un elemento  $\{a\}$  es siempre independiente. Un subconjunto  $\{a, b\}$  es independiente cuando y sólo cuando  $a \wedge b = 0$  ( $a, b \in (L \setminus \{0\})$ ,  $a \neq b$ ). Para que sea independiente un subconjunto  $\{a, b, c\}$ , donde  $a, b, c \in (L \setminus \{0\})$  y todos los elementos  $a, b, c$  son distintos dos a dos, es necesario exigir que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= 0; & (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= a; \\ b \wedge (a \vee c) &= 0; & (b \vee c) \wedge (b \vee a) &= b; \\ c \wedge (a \vee b) &= 0; & (c \vee a) \wedge (c \vee b) &= c. \end{aligned}$$

En los retículos modulares y semimodulares podemos limitarnos a un número menor de relaciones.

**Teorema 33.** Si  $L$  es un retículo modular con cero  $0$ , entonces un subconjunto de  $n$  elementos  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq L \setminus \{0\}$  es independiente cuando y sólo cuando  $(a_i \vee \dots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

*Demostración.* La necesidad de las condiciones del teorema se obtendrá al suponer  $A = \{a_1, \dots, a_i\}$ ,  $B = \{a_{i+1}\}$ . Supongamos ahora que el subconjunto  $\{a_1, \dots, a_n\}$  satisface las condiciones del teorema. Sea  $A, B \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces,  $\inf \{ \sup A, \sup B \} = 0$ . Efectivamente, sea  $a_k \in A \cup B$  con el índice máximo  $k$ . Sea, por ejemplo,  $a_k \in B$ . En este caso, por ser el retículo  $L$  modular para cualesquiera  $x, y, z \in I$ , tenemos  $x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z)$ . Al sustituir en la última igualdad  $x$  por  $\sup A$ , y por

$a_k$ , y  $z$  por  $\sup(B - \{a_k\})$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \inf\{\sup A, \sup B\} &= \sup A \wedge (a_k \vee \sup(B - \{a_k\})) = \\ &= \sup A \wedge ((a_k \wedge (\sup A \vee \sup(B - \{a_k\}))) \vee \sup(B - \{a_k\})) = \\ &= \sup A \wedge \sup(B - \{a_k\}) = \inf\{\sup A, \sup(B - \{a_k\})\}, \end{aligned}$$

puesto que  $a_k \wedge (\sup A \vee \sup(B - \{a_k\})) \leq (a_1 \vee \dots \vee a_{k-1}) \wedge a_k = 0$ .

Procediendo de este modo, podemos eliminar todos los elementos  $a_i$  que figuran en el conjunto  $A \cup B$ , y obtener, como resultado, la igualdad

$$\inf\{\sup A, \sup B\} = \sup \emptyset = 0.$$

En el caso general, en virtud de la modularidad y de la condición  $A \cap C \cap (B - A) = \emptyset$ , tenemos

$$\begin{aligned} &= x_1 \wedge [y_1 \vee (b \wedge (x_2 \vee y_2))] = x_1 \wedge [y_1 \vee (b \wedge [a_n \wedge (x_2 \vee y_2)])] = \\ &= x_1 \wedge [y_1 \vee ((a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{n-1}) \wedge a_n \wedge (x_2 \vee y_2))] = x_1 \wedge [y_1 \vee (0 \wedge (x_2 \vee y_2))] = \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

Ejercicios 12. Demuéstrese que la afirmación del teorema 33 es lícita para los retículos semimodulares con 0.

Sea  $L$  un retículo modular con 0. Demuéstrese que

13. Si  $a_i \leq b_i$ ,  $a_i, b_i \in L$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son independientes, entonces  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son también independientes.

14. Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son elementos independientes del retículo  $L$  y  $a_i = a_{i1} \vee a_{i2} \vee \dots \vee a_{in}$ , donde  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  son elementos independientes del retículo  $L$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces los elementos  $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}$  son independientes.

**Teorema 34.** Si  $a_1, \dots, a_n$  son elementos independientes de un retículo modular  $L$  con cero 0, entonces un subretículo  $H$  del retículo  $L$  generado por los intervalos  $[0, a_i]$ , donde  $i = 1, \dots, n$ , es isomorfo al producto directo  $[0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$ .

*Demostración.* Sea  $H'$  un subretículo del retículo  $L$  generado por los intervalos  $[0, a_1], \dots, [0, a_{n-1}]$ ,  $b = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{n-1}$ , y

$$M = \{x_1 \vee x_2 \mid x_1 \in H', x_2 \leq a_n\}.$$

Por cuanto  $[0, a_i] \subseteq [0, b]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces  $H' \subseteq [0, b]$ , por lo que  $x_1 \wedge b = x_1$  para todo  $x_1 \in H'$ . Haciendo uso de la independencia de los elementos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y de la ley modular, obtenemos para cualesquiera  $x_1, y_1 \in H'$  y  $x_2, y_2 \in [0, a_n]$ :

$$\begin{aligned} &= x_1 \wedge (y_1 \vee x_2 \vee y_2) = (x_1 \wedge b) \wedge (y_1 \vee x_2 \vee y_2) = x_1 \wedge (b \wedge (y_1 \vee (x_2 \vee y_2))) = \\ &= x_1 \wedge [y_1 \vee (b \wedge (x_2 \vee y_2))] = x_1 \wedge [y_1 \vee (b \wedge [a_n \wedge (x_2 \vee y_2)])] = \\ &= x_1 \wedge [y_1 \vee ((a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{n-1}) \wedge a_n \wedge (x_2 \vee y_2))] = x_1 \wedge [y_1 \vee (0 \wedge (x_2 \vee y_2))] = \\ &= x_1 \wedge [y_1 \vee 0] = x_1 \wedge y_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &x_2 \wedge (y_1 \vee x_1 \vee y_2) = (x_2 \wedge a_n) \wedge (y_1 \vee x_1 \vee y_2) = x_2 \wedge [a_n \wedge ((x_1 \vee y_1) \vee y_2)] = \\ &= x_2 \wedge [y_2 \vee (a_n \wedge (x_1 \vee y_1))] = x_2 \wedge [y_2 \vee (a_n \wedge (b \wedge (x_1 \vee y_1)))] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x_2 \wedge [y_2 \vee [a_n \wedge (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{n-1}) \wedge (x_1 \vee y_1)]] = \\
 &= x_2 \wedge [y_2 \vee (0 \wedge (x_1 \vee y_2))] = x_2 \wedge [y_2 \vee 0] = x_2 \wedge y_2.
 \end{aligned}$$

Sirviéndonos de la ley modular, de estas igualdades deducimos que

$$\begin{aligned}
 (x_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee y_2) &= (x_1 \vee x_2) \wedge [(y_1 \vee x_2 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee y_2)] = \\
 &= [(x_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee x_2 \vee y_2)] \wedge (y_1 \vee y_2) = [x_2 \vee [x_1 \wedge (y_1 \vee x_2 \vee y_2)]] \wedge (y_1 \vee y_2) = \\
 &= [x_2 \vee (x_1 \wedge y_1)] \wedge (y_1 \vee y_2) = (x_1 \wedge y_1) \vee [x_2 \wedge (y_1 \vee y_2)] = \\
 &= (x_1 \wedge y_1) \vee [x_2 \wedge [(y_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee x_1 \vee y_2)]] = \\
 &= (x_1 \wedge y_1) \vee [(y_1 \vee y_2) \wedge (x_2 \wedge (y_1 \vee x_1 \vee y_2))] = (x_1 \wedge y_1) \vee [(y_1 \vee y_2) \wedge (x_2 \wedge y_2)] = \\
 &= (x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2).
 \end{aligned}$$

Así pues, el conjunto  $M$  queda cerrado también respecto de la intersección y, por lo tanto, coincide con el subretículo  $H$ . Más aún, la última igualdad, junto con la igualdad evidente

$$(x_1 \vee x_2) \vee (y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee y_1) \vee (x_2 \vee y_2)$$

señalan que

$$\varphi(x, y) = x \vee y$$

es un homomorfismo reticular del producto directo  $H' \times [0, a_n]$  sobre  $H$ . Si  $x_1 \vee x_2 = y_1 \vee y_2$ , entonces, por cuanto

$$x_2 \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) \leq a_n \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) = 0$$

y

$$y_2 \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) \leq a_n \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) = 0,$$

con ayuda de la ley modular obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) = x_1 \wedge (y_1 \vee y_2) \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) = \\
 &= x_1 \wedge [(y_1 \vee y_2) \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1})] = x_1 \wedge [y_1 \vee (y_2 \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}))] = \\
 &= x_1 \wedge [y_1 \vee 0] = x_1 \wedge y_1 = y_1 \wedge x_1 = y_1 \wedge [x_1 \vee 0] = \\
 &= y_1 \wedge [x_1 \vee (x_2 \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}))] = y_1 \wedge [(x_1 \vee x_2) \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1})] = \\
 &= y_1 \wedge (y_1 \vee y_2) \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) = y_1.
 \end{aligned}$$

De un modo análogo se establece que  $x_2 = y_2$ . De este modo,  $\varphi$  resulta ser un isomorfismo. Aprovechando la suposición de inducción, llegamos a que

$$H \cong H' \times [0, a_n] \cong [0, a_1] \times \dots \times [0, a_{n-1}] \times [0, a_n].$$

El teorema está demostrado.

**Ejercicios.** Sea  $L$  un retículo modular,  $a, b, c \in L$ . Demuéstrese que

15. (Von J. Neumann [114]). Un subretículo en  $L$  generado por los elementos  $a, b, c \in L$ , es distributivo cuando y sólo cuando

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

16. (Birkhoff [115]). Sean  $C_0, C_1$  las cadenas en  $L$ . Entonces, un subretículo en  $L$  generado por el conjunto  $C_0 \cup C_1$  es distributivo.

17. Un subretículo en  $L$ , generado por  $\{a \wedge b, a\} \cup \{a \vee b, b\}$  es isomorfo al retículo  $\{a \wedge b, a\} \times \{a \wedge b, b\}$ .

18. Compruébese que un subretículo generado por  $\{a \wedge b, a\} \cup \{a \wedge b, b\}$  no coincide con  $\{a \wedge b, a \vee b\}$ . Demuéstrase que para la coincidencia es suficiente exigir que el retículo  $L$  sea distributivo.

Más abajo señalaremos que los resultados, formulados en los ejercicios 15. . . 17, se emplean para resolver los problemas combinatorios de optimización. Si se encuentran dificultades en la resolución de los ejercicios, recomendamos referirse al libro de Grätzer (véase cap. 4, § 1[32]).

**Teorema 35.** Sea  $L$  un retículo semimodular con 0 y con una función de rango  $r$ . El conjunto de átomos  $I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  del retículo  $L$  es independiente cuando y sólo cuando

$$r(a_1 \vee \dots \vee a_n) = n.$$

*Demostración.* Supongamos que  $(a_1 \vee \dots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Demostremos por inducción respecto de  $i$  que  $r(a_1 \vee \dots \vee a_i) = i$ . Para  $i = 1$  la afirmación es válida. Si  $r(a_1 \vee \dots \vee a_i) = i$ , entonces, por ser el retículo semimodular, tenemos  $(a_1 \vee \dots \vee a_i) \prec (a_1 \vee \dots \vee a_i \vee a_{i+1})$  y por eso  $r(a_1 \vee \dots \vee a_i \vee a_{i+1}) = r(a_1 \vee \dots \vee a_i) + 1 = i + 1$ . Con esto queda demostrada la necesidad.

Para demostrar la suficiencia mostremos que el conjunto de átomos  $I$  satisface la condición del teorema 32. De la condición  $r(a_1 \vee \dots \vee a_n) = n$  tenemos  $r(\sup A) = |A|$  para cualquier subconjunto  $A \subseteq I$ , de modo que la aplicación  $\varphi: A \rightarrow \sup A$  es biunívoca. Es evidente que la aplicación  $\varphi$  conserva las uniones. Tomemos ahora  $A, B \subseteq I$ , y sea  $a = \inf\{\sup A, \sup B\}$ ,  $b = \sup\{A \cup B\}$ . Entonces  $a \geq b$ , y de la condición de semimodularidad tenemos

$$r(\sup A) + r(\sup B) \geq r(a) + r(\sup\{A \cup B\}),$$

de modo que  $|A| + |B| \geq r(a) + |A \cup B|$ . De aquí concluimos que

$$r(a) \leq |A| + |B| - |A \cup B| = |A \cap B|.$$

Por otro lado,  $r(a) \geq r(b) = |A \cap B|$ , por consiguiente,  $r(a) = r(b)$ , y  $a = b$ , es decir,  $\inf\{\sup A, \sup B\} = \sup(A \cap B)$ . De aquí proviene que  $\varphi$  es un isomorfismo, y, en virtud del teorema 32, el conjunto de átomos  $I$  es independiente. El teorema está demostrado.

Un retículo semimodular atómico completo (es decir, cualquier elemento lo representamos en forma de una reunión de átomos) sin cadenas infinitas se llama *geométrico* o *matroidal*.

Demos a conocer algunas definiciones.

Sea  $\mathcal{P}(S)$  un conjunto de todos los subconjuntos de  $S$ . Diremos que sobre el conjunto  $S$  está dado el *operador de clausura*, si a todo elemento de  $A \in \mathcal{P}(S)$  se le hace corresponder unívocamente un determinado elemento de  $A \in \mathcal{P}(S)$ , llamado *clausura* de  $A$ , con la particularidad de que dicha correspondencia satisface, para todos los  $A, B \in \mathcal{P}(S)$ , las condiciones

siguientes:

1.  $A \subseteq \bar{A}$ ;
2. Si  $A \subseteq B$ , entonces  $A \subseteq \bar{B}$  (propiedad de conservación del orden);
3.  $\bar{\bar{A}} = A$  (idempotencia).

El conjunto  $A$  se llama *cerrado*, si coincide con su clausura.

Se denomina *pregeometría* (o *matroide*)  $G(S)$  a un conjunto  $S$  con un operador de la clausura  $\bar{\phantom{x}}$ , que satisface las propiedades:

a) de sustitución: para cualesquiera  $p, q \in S$  y para todo  $A \in \mathcal{P}(S)$ , de  $p \in A \cup \{q\}$  y  $p \notin A$  se deduce que  $q \in \overline{A \cup \{p\}}$ ;

b) de base finita: para todo  $A \in \mathcal{P}(S)$  existe un subconjunto finito  $A_f \subseteq A$  tal que  $\overline{A_f} = \bar{A}$ .

Se denomina *geometría combinatoria* (en adelante, siempre geometría) a una pregeometría en la que todos los subconjuntos de un solo elemento, como también el conjunto vacío, son cerrados.

La definición de una geometría sobre el conjunto  $S$  se diferencia de la definición de una topología sobre  $S$  en que no se requiere el cumplimiento de la condición  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  para todos los  $A, B \in \mathcal{P}(S)$ , pero subsiste la propiedad de sustitución, la cual, en general, puede no cumplirse para la clausura de la topología.

Llamemos superficie a todo conjunto cerrado de una geometría. Las superficies de una geometría  $G$ , ordenadas por inclusión, forman un retículo completo  $L(G)$  con operaciones binarias  $\vee$  y  $\wedge$ :  $A \wedge B = A \cap B$ ,  $A \vee B = \overline{A \cup B}$ , donde  $A$  y  $B$  son las superficies de la geometría  $G$ .

**Teorema 36.** Sea  $G = (S, \bar{\phantom{x}})$  una geometría. Entonces, el retículo  $L(G)$  es geométrico. Viceversa, si  $L$  es un retículo geométrico,  $S$ , un conjunto de átomos del retículo  $L$ , y el conjunto  $\{a \in S \mid a \leq \sup A\}$  es la clausura  $\bar{A}$  de cualquier subconjunto  $A \subseteq S$ , entonces  $G = (S, \bar{\phantom{x}})$  es una geometría y el retículo de ella  $L$  es isomorfo a  $L(G)$ .

*Demostración.* Sea  $G = (S, \bar{\phantom{x}})$  una geometría. El hecho de que el retículo  $L(G)$  es completo, sin cadenas infinitas y atómico se comprueba sin dificultad alguna. Por eso proponemos que el lector mismo lo haga individualmente a título de ejercicio. Demostremos que  $L(G)$  es un retículo semimodular. Supongamos que  $A, B \in L(G)$ ,  $B = \overline{A \cup \{p\}}$  y  $p \notin A$ . Afirmamos que en este caso  $A \prec B$ . En efecto, si  $C \in L(G)$  y  $A \subset C \subseteq B$ , entonces existe un elemento  $q \in (C \setminus A)$  y  $q \in C \subseteq B = \overline{A \cup \{p\}}$ ; por eso, según la propiedad de sustitución,  $p \in \overline{A \cup \{q\}} \subseteq C$ . Por consiguiente,  $B = \overline{A \cup \{p\}} \subseteq C$ . Resulta que  $B = C$ ; de aquí,  $A \prec B$ . Sea ahora  $D \in L(G)$ . Entonces,  $B \vee D = \overline{B \cup D} = \overline{A \cup D \cup \{p\}}$  y  $A \vee D = \overline{A \cup D}$ ; de aquí, o bien  $p \in \overline{A \cup D}$  y, por eso,  $A \vee D = B \vee D$ , o bien  $p \notin \overline{A \cup D}$ , y en este caso,  $A \vee D \prec B \vee D$ . El teorema queda demostrado en una dirección.

Al contrario, sea  $L$  un retículo geométrico;  $S$ , un conjunto de átomos en  $L$  y  $\bar{A} = \{a \in S \mid a \leq \sup A\}$  para todo  $A \subseteq S$ . Está claro que  $A \rightarrow \bar{A}$  es un operador de clausura. Efectivamente, sea  $a \in \bar{A}$ . Para cada  $A \subseteq S$  se cumple la desigualdad  $a \leq \sup A$ . Por lo tanto,  $A \subseteq \bar{A}$ . Si  $A \subseteq B$  para  $A, B \subseteq S$ , y

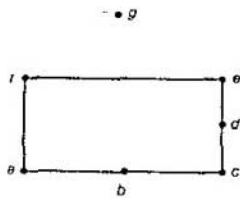


Fig. 8.24.

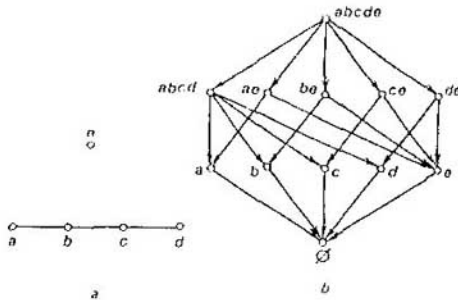


Fig. 8.25.

$a \in A$ , entonces  $a \leq \sup B$ . De aquí,  $\sup A \leq \sup B$ , y, por consiguiente,  $A \subseteq B$ .

La definición de retículo geométrico asegura el cumplimiento de las condiciones de base finita y de carácter cerrado de los subconjuntos de un solo elemento y del conjunto vacío. Comprobemos el cumplimiento de la propiedad de sustitución. Sea  $p \in \overline{AU}\{q\}$  y  $p \notin A$ . Por cuanto  $\{q\}$  es un átomo, entonces, por ser el retículo semimodular  $\overline{AU}\{q\} = (\overline{AV}\{q\}) \leftarrow \overline{A}$ , por lo que de  $A \subset \overline{AU}\{p\} \subseteq \overline{AU}\{q\}$  se deduce  $\overline{AU}\{p\} = \overline{AU}\{q\}$ ; de este modo  $q \in \overline{AU}\{p\}$ . Con ello queda establecido que  $(S, \sup)$  es una geometría.

Demostremos ahora que los retículos son isomorfos. Denotemos con  $\varphi$  la aplicación  $A \rightarrow \sup A$ , donde  $A \subseteq S$ ,  $A \in L(G)$ . Entonces ella aplica, pues,  $L(G)$  en  $L$ . Por cuanto cada elemento del retículo  $L$  es una reunión de átomos, entonces la inclusión  $A \subseteq B$  es equivalente a la desigualdad  $A \leq \sup B$ . Por eso  $\varphi$  es la aplicación biunívoca «sobre», y ambas aplicaciones  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son monótonas. Por consiguiente,  $\varphi$  es un isomorfismo. El teorema está demostrado.

Así pues, el retículo de un subespacio define por completo una geometría, y viceversa. Los diagramas de los retículos geométricos son, por regla general, muy engorrosos para que puedan utilizarse. Sin embargo, a menudo se presta la posibilidad de dibujar la geometría, asociando el dibujo con el retículo. Los elementos de rango  $k$  ( $k \geq 0$ ) se denominarán  $k$ -superficies. En tal caso las 1-superficies se llamarán puntos; 2-superficies, rectas; 3-superficies, planos, etc. Observemos que un plano es una unión reticular de cualquier recta suya y un punto suyo no dispuesto en dicha recta, etc. Lo último puede formularse del modo siguiente:

(\*\*) toda  $k$ -superficie y una 1-superficie, no situada en la primera, yace en la única  $(k + 1)$ -superficie.

Al representar las geometrias, las rectas se dibujan en forma de segmentos (o las curvas). Dibujaremos sólo aquellas  $k$ -superficies, que no pueden

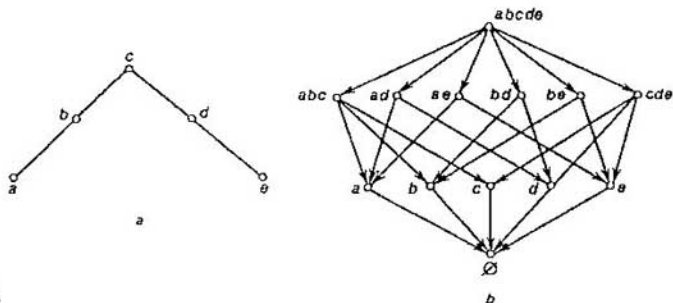


Fig. 8.26.

ser restablecidas unívocamente según el dibujo, si sólo se emplea la propiedad (\*). Aclaremos esto con un ejemplo. En la fig. 8.24 está representada una geometría de rango 3 con un conjunto de puntos  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ , con la particularidad de que las rectas  $ad, ae, ag, bd, be, bf, bg, cf, cg, df, dg, eg$  y los planos  $abcg, afg, cdeg, efg, adg, aeg, bdg, beg, bfg, cfg, dfg$  no están trazados, puesta que pueden obtenerse con ayuda de la propiedad (\*\*).

En las figs. 8.25a . . . 8.28a están representadas las geometrías, y en las figs. 8.25b . . . 8.28b, los diagramas de sus retículos, respectivamente.

Hemos de notar que las representaciones de las geometrías son mucho más sencillas en comparación con los diagramas complejos de sus retículos.

Los matroides (o geometrías) surgen en gran cantidad, sobre todo en el álgebra, teoría de los grafos, geometría, teoría de las transversales, análisis combinatorio, etc. El estudio de ellos comenzó por el conocido problema de los siete puentes de Königsberg resuelto por Euler hace 200 años. La exposición de la teoría de los matroides la continuaremos en el § 8.4, donde daremos a conocer otros ejemplos de matroides y de sus aplicaciones.

Detengámonos brevemente en los resultados referentes a la anchura de los retículos geométricos enunciados a tenor con el teorema 1 (de Sperner).

Sea  $L$  un retículo geométrico finito. Designemos con  $E(i)$  el conjunto

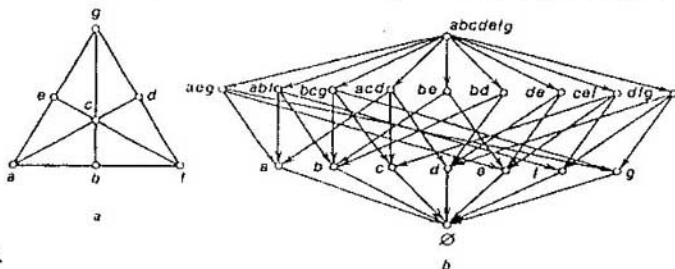


Fig 8.27.

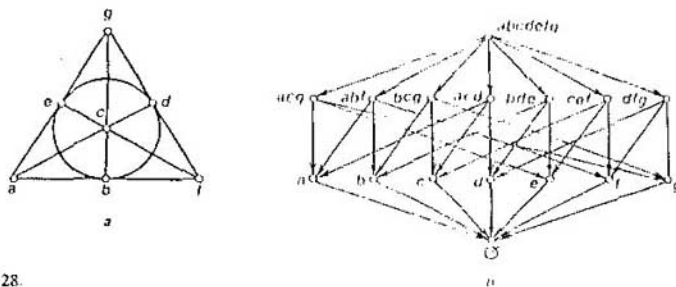


Fig. 8.28.

de todos los elementos del retículo  $L$  de rango  $i$ , y sea

$$W_i = |E(i)|.$$

Observemos que el conjunto  $E(i)$  es una anticadena del retículo  $L$ .

**Teorema 37.** Sea  $L$  un retículo geométrico finito en el cual todo elemento  $a$  de rango  $i$  se cubre por  $k_i$  elementos y cubre  $m_i$  elementos (los números  $k_i$  y  $m_i$  sólo dependen del rango  $i$ ). Entonces, la anchura de  $L$  es igual a

$$\max_{0 \leq i \leq r(L)} W_i.$$

*Demostración.* Supongamos que  $n = r(L)$  y  $\max_{0 \leq i \leq n} W_i = W_k$ . En este

caso  $E(k)$  es una anticadena con  $W_k$  elementos. Resta por demostrar que si  $A$  es una anticadena arbitraria en  $L$ , entonces  $|A| \leq W_k$ . Para cualquier  $a \in L$  designemos mediante  $s(a)$  el número de todas las cadenas máximas que pasan por  $a$ . Es evidente que si  $r(a) = i$ , tendremos  $s(a) = m_1 m_2 \dots m_i k_i \dots$

$\dots k_{n-1}$ . Por consiguiente,  $s(a)$  depende solamente del rango  $i$ . Por cuanto cada cadena máxima tiene exactamente un solo elemento de rango  $i$ , el número  $S$  de todas las cadenas máximas en  $L$  será igual a  $s(a) W_i$ . De aquí,

la desigualdad  $W_i \leq W_k$  nos dicta que  $s(a) = \frac{S}{W_i} \geq \frac{S}{W_k}$ . Por fin, cada

cadena máxima pasa por un elemento  $a$  lo sumo de la anticadena  $A$ . Por consiguiente,

$$S \geq \sum_{a \in A} s(a) \geq |A| \cdot \frac{S}{W_k},$$

es decir,  $|A| \leq W_k$ , lo que se trataba de demostrar.

Un retículo geométrico finito  $L$  de rango  $n$  se llama *unimodal*, si para cierto número  $k$  se verifican las desigualdades  $W_1 \leq \dots \leq W_{k-1} \leq W_k$  y  $W_k \geq W_{k+1} \geq \dots \geq W_{n-1}$ . Sean  $A$  y  $B$  unos subconjuntos del retículo  $L$ . Diremos que entre  $A$  y  $B$  existe una *paridad*, si existe una aplicación biunívoca  $\varphi: A \rightarrow B$  (o bien  $\varphi: B \rightarrow A$ , si  $|A| \geq |B|$ ), tal que para todo  $a \in A$  (para todo  $a \in B$ , respectivamente) son comparables los elementos  $a$  y  $\varphi(a)$ .

**Teorema 38.** Sea  $L$  un retículo geométrico finito de rango  $n$ . Si  $L$  es uni-



modal y existe paridad entre  $E(i)$  y  $E(i + 1)$  para todo  $i < n$ , entonces la anchura de  $L$  es igual a  $W_k$ , donde

$$W_1 \leq \dots \leq W_k, W_k \geq \dots \geq W_{n-1}.$$

*Demostración.* Para cualquier subconjunto  $A \subseteq L$  el número

$$d(A) = \max_{a, b \in A} (r(a) - r(b))$$

se denominará diámetro del subconjunto  $A$ . Sea  $A$  una anticadena del retículo  $L$ . La desigualdad  $|A| \leq W_k$  se demostrará por inducción respecto del diámetro  $d(A)$ . Si  $d(A) = 0$ , entonces  $A \subseteq E(i)$  para cierto  $i$ . De aquí,  $|A| \leq W_i \leq W_k$ . Supongamos ahora que  $d(A) > 0$ , y la desigualdad es válida para las anticadenas de menor diámetro. Por cuanto  $d(A) > 0$ , en la anticadena  $A$  siempre existe un elemento  $a$ , tal que  $r(a) \neq k$ ; admitamos, para concretar,  $r(a) < k$ . Sea  $i = \min_{a \in A} r(a)$ , y  $A = A_0 \cup A_1$ , donde  $A_1 = A \cap E(i)$  y  $A_0 = A \setminus A_1$ . Por hipótesis,  $i < k$ , por eso  $|E(i)| \leq |E(i + 1)|$ , y, por lo tanto, existe una paridad  $\varphi: E(i) \rightarrow E(i + 1)$ . Hagamos  $A' = A_0 \cup \varphi(A_1)$ . Los conjuntos  $A_0$  y  $\varphi(A_1)$  no se intersecan. En efecto, si  $a \in (A_0 \cap \varphi(A_1))$ , es decir,  $a = \varphi(b)$  para cierto  $b \in A_1$ , entonces  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ , y  $a, b$  son comparables, lo que es imposible, puesto que  $A$  es una anticadena. Por consiguiente,  $|A'| = |A|$ . Además,  $A'$  es una anticadena. En efecto, si  $a, b \in A'_i$ ,  $a \neq b$  y  $a, b$  son comparables, entonces  $a \in A_0$  y  $b = \varphi(c)$ , es decir,  $b = \varphi(c)$  para cierto  $c \in A_1$ . Por cuanto  $r(b) = i + 1$ , resulta que  $r(b) < r(a)$ . Por consecuencia,  $b < a$ , pero esto contradice la condición de que  $c \leq b$  y  $c \parallel a$ . Esto quiere decir que  $A'$  es una anticadena. Pero,  $d(A') = d(A) - 1$ , por lo que, en virtud de la suposición de inducción,  $|A'| = |A| \leq W_k$ . El teorema está demostrado.

Aduzcamos sin demostración algunos resultados más sobre los números  $W_k$  en los retículos geométricos.

**Teorema 39.** Sea  $L$  un retículo geométrico finito de rango  $n$ . Entonces

$$W_1 \leq W_t \text{ para } t = 2, 3, \dots, n - 1$$

y

$$W_1 + \dots + W_k \leq W_{n-k} + \dots + W_{n-1} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n - 2.$$

**Teorema 40.** Sea  $L$  un retículo geométrico finito de rango  $n$ . Entonces, cualquiera que sea  $k = 1, \dots, n - 2$ , la igualdad

$$W_1 + \dots + W_k = W_{n-k} + \dots + W_{n-1}$$

se verifica cuando y sólo cuando el retículo  $L$  es modular.

**Teorema 41.** Sea  $L$  un retículo geométrico modular finito de rango  $n$ . Entonces, para cualesquiera  $0 \leq k \leq n$  se verifica la igualdad

$$W_k = W_{n-k}.$$

**Ejercicios 19.** Demuéstrase el teorema 1, haciendo uso del a) teorema 37; b) teorema 38.  
**20.** Generalícese el teorema 37 a los conjuntos parcialmente ordenados.

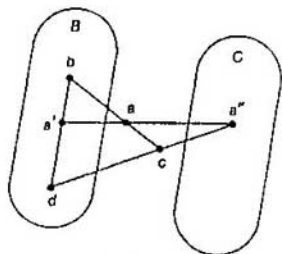


Fig. 8.29.

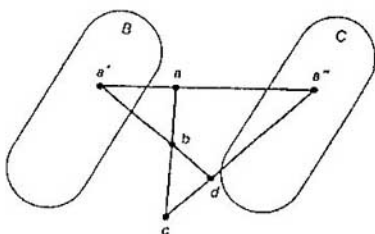


Fig. 8.30.

En el capítulo 5 se ha analizado el *espacio proyectivo* como un par  $(A, L)$ , donde  $A$  es un conjunto de puntos, y  $L$ , una familia de rectas, para la cual se cumplen las siguientes condiciones:

- una recta  $l \in L$  tiene no menos de dos puntos;
- para cualesquiera dos puntos  $a, b \in A$  existe sólo una recta  $l \in L$ , tal que  $a, b \in l$ ;
- para cualesquiera puntos  $a, b, c, d, e \in A$  y rectas  $l_1, l_2 \in L$ , que satisfacen las condiciones:  $a, b, d \in l_1$ , y  $b, c, e \in l_2$ , existe un punto  $f \in A$  y las rectas  $l_3, l_4 \in L$ , tales que  $a, c, f \in l_3$ , y  $d, e, f \in l_4$ .

Detengámonos ahora brevemente en la descripción del espacio proyectivo por medio de sus subespacios lineales. Para cualesquiera  $a, b \in A$  (donde  $a \neq b$ ) designemos con  $a + b$  una recta que contiene los puntos  $a$  y  $b$ . Un subconjunto  $B \subseteq A$  se denomina *subespacio lineal del espacio proyectivo*, si junto con cualesquiera dos puntos de  $B$ , le pertenece también una recta definida por los puntos citados. Dicho de otro modo,  $B$  es un espacio lineal, si  $a, b \in B$  lleva consigo  $a + b \subseteq B$ . Sean  $B, C$  subespacios lineales. Pongamos  $B + C$  igual a la unión de todas las rectas  $b + c$ , tales que  $b \in B, c \in C$ .

**Lema 7.** Para cualesquiera subespacios lineales  $B$  y  $C$  de un espacio proyectivo el conjunto  $B + C$  es un subespacio lineal.

*Demostración.* Tomemos los puntos  $a, b$  y  $c$ , tales que  $c \in a + b$ , y  $a, b \in B + C$ . Demostremos que  $c \in B + C$ . Si  $a, b \in B$ , ó  $a, b \in C$ , tenemos:  $c \in B \cup C \subseteq B + C$ , puesto que  $B, C$  son subespacios lineales. Si  $a \in B$  y  $b \in C$  (o bien, viceversa), entonces por definición de  $B + C$ ,  $c \in B + C$ . De este modo, podemos suponer que  $a \notin B \cup C$ , por lo que existen los puntos  $a' \in B$  y  $a'' \in C$ , tales que  $a \in a' + a''$ . Son posibles dos casos. En el primero  $b \in B \cup C$ ; sea, para concretar,  $b \in B$ . Veamos las rectas  $b + a', b + a, a + a'$  y  $c + a''$  (véase fig. 8.29). Convengamos en considerar que todos los puntos  $b, a, a', a''$  y  $c$  son distintos. Esto quiere decir que la recta  $c + a''$  tiene un punto que yace tanto en  $b + a$ , como en  $a + a''$ . Por consiguiente, en virtud del punto c) en la definición de espacio proyectivo, existe un punto  $d \in B$ , tal que  $d \in b + a'$ , y  $d \in c + a''$ . Si  $d = a''$ , entonces  $a \in B$ , lo que es imposible. De aquí,  $d \neq a''$ , y por eso,  $c \in d + a'' \in B + C$ .

En el segundo caso  $b \notin B \cup C$ . Aprovechemos ahora la condición c) para las rectas  $a + a'$ ,  $a + b$ ,  $a' + b$  y  $a'' + c$  (véase fig. 8.30). Existe un punto  $d \in a' + b$ , tal que  $c \in d + a''$ . Por analogía con el primer caso tenemos  $d \in B + C$ , y, por lo tanto,  $c \in B + C$ . El lema está demostrado.

**Teorema 42.** Los subespacios lineales del espacio lineal forman un retículo geométrico modular.

*Demostración.* Por cuanto la intersección de cualquier número de subespacios lineales es un subespacio lineal, tenemos un espacio de clausuras  $(A, \bar{\phantom{x}})$ . La clausura  $\bar{X}$  del subconjunto  $X \subseteq A$  se describe del modo siguiente:  $\bar{X} = \bigcup_i X_i$ , donde  $X_0 = X$ ,  $X_1 = X + X$ ,  $\dots$ ,  $X_n = X_{n-1} + X_{n-1}$ ,  $\dots$ .

De aquí se deduce que  $(A, \bar{\phantom{x}})$  es un espacio de clausuras con las propiedades de una base finita. Por eso, sus subespacios lineales forman un retículo completo y para cualesquiera subespacios lineales  $X$  y  $Y$  queda válida la siguiente igualdad:  $X \vee Y = \overline{X \cup Y}$ .

Si  $X, Y, Z$  son subespacios lineales y  $X \supseteq Z$ , entonces, evidentemente,  $X \wedge (Y \vee Z) \supseteq (X \wedge Y) \vee Z$ . Mostremos que es válida también la inclusión inversa. Sea  $p \in Y \vee Z$ , es decir,  $p \in X$  y  $p \in Y \vee Z$ . Por cuanto  $p \in Y \vee Z = Y + Z$ , existen los puntos  $p' \in Y$  y  $p'' \in Z$ , tales que  $p \in p' + p''$ . De la inclusión  $X \supseteq Z$  proviene que  $p, (p'' \in X)$ . Si  $p = p''$ , entonces  $p \in Z$ , por lo que  $p \in (X \wedge Y) \vee Z$ . Si  $p \neq p''$ , entonces,  $p' \in p + p'' \subseteq X$ . Por consiguiente,  $p' \in X \wedge Y$  y  $p'' \in Z$ ; de aquí se desprende que  $p \in (X \wedge Y) \vee Z$ , con lo que queda demostrada la modularidad del retículo. Las propiedades restantes de la definición de pregeometría (matroide) o ya están comprobadas, o bien son triviales. La propiedad de sustitución se deduce de la modularidad. El teorema está demostrado.

Por consiguiente, los espacios proyectivos ofrecen ejemplos de matroides modulares y, de hecho, incluso de geometrías combinatorias modulares.

Dos elementos  $a$  y  $b$  de un retículo con complementos  $L$  se denominan *perspectivos*, si disponen de un complemento común, es decir,  $a \vee c = b \vee c = 1$ , y  $a \wedge c = b \wedge c = 0$  para cierto elemento  $c \in L$ . El elemento  $c$  recibe el nombre de *eje de la perspectiva*.

Sea  $L$  un retículo modular con complementos,  $a, b \in L$ . Si  $a$  y  $b$  son perspectivos, el empleo sucesivo de las aplicaciones mencionadas en el teorema 26,

$$[0, a] = [a \wedge c, a] \rightarrow [c, a \vee c] = [c, b \vee c] \rightarrow [b \wedge c, b] = [0, b],$$

permite establecer un isomorfismo entre los intervalos  $[0, a]$  y  $[0, b]$ , el cual se llama *aplicación perspectiva con el eje de la perspectiva  $c$*  y se designa con  $P(a \rightarrow b; c)$ . No es difícil comprender que  $P(a \rightarrow b; c)$  aplica un elemento  $x \in [0, a]$  sobre otro elemento  $y = (x \vee c) \wedge b \in [0, b]$ . Si  $L$  es un retículo compuesto por un conjunto vacío, los puntos y las rectas del plano proyectivo y por el propio plano, la aplicación perspectiva  $P(a \rightarrow b; c)$  pone en correspondencia al punto  $x$  en la recta  $a$  y al punto  $y$  en la recta  $b$  (fig. 8.31). Preci-

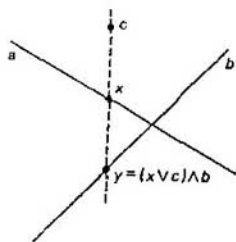


Fig. 8.31.

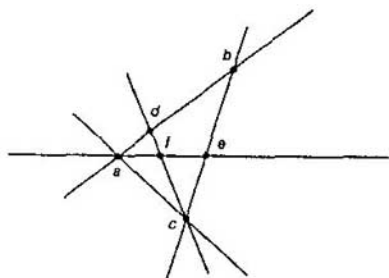


Fig. 8.32.

samente a esta circunstancia se debe la denominación. Además, se ha establecido aquí que los intervalos  $[0, a]$  y  $[0, b]$  son proyectivos. Por eso, por analogía con la proyectividad de los intervalos, emplearemos, para la notación de los elementos perspectivos  $a$  y  $b$ , la designación  $a \sim b$ .

**Lema 8.** Sean  $a$  y  $b$  los puntos distintos (átomos) del retículo geométrico modular  $L$ . Entonces,  $a \vee b$  contiene el tercer punto  $c$  cuando y sólo cuando  $a$  y  $b$  son perspectivos.

*Demostración.* Cualquier tercer punto en  $a \vee b$  es un complemento relativo común para  $a$  y  $b$  en el intervalo  $[0, a \vee b]$ . En este caso, el elemento  $c \vee \overline{(a \vee b)} = x$  será complemento común para  $a$  y  $b$ , cualquiera que sea el complemento  $\overline{(a \vee b)}$  del elemento  $a \vee b$ .

Viceversa, sean  $a$  y  $b$  perspectivos. Entonces,  $1 = a \vee x = b \vee x$  cubre  $x$ . Pongamos  $c = (a \vee b) \wedge x$ . Tendremos

$$r(c) = r(a \vee b) + (r(x) - r(a \vee b \vee x)) = 2 - 1 = 1,$$

puesto que  $a \vee b \vee x = 1$  cubre  $x$ . Quiere decir que  $d \leq a \vee b$  es un punto, y además, distinto de  $a$  y  $b$ , puesto que  $d \leq x$ , y  $a \wedge x = b \wedge x = 0$ . Este es precisamente el tercer punto en  $a \vee b$ . El lema está demostrado.

**Lema 9.** En un retículo geométrico modular  $L$  la perspectividad es una relación de equivalencia.

*Demostración.* Es evidente que en cada retículo con complementos la perspectividad es una relación reflexiva y simétrica. Demostremos que en los retículos geométricos modulares la relación de perspectividad es también transitiva. En efecto, en virtud del lema 8, si  $a \sim b$  y  $b \sim c$ , entonces (a excepción de un caso trivial en que  $a = b$  ó  $b = c$ ) existen los puntos  $d$  en  $a \vee b$  y  $e$  en  $b \vee c$ , tales que se forma una configuración expuesta en la fig. 8.32. Construyamos ahora una «recta»  $d \vee e$ . Es evidente que

$$r((d \vee e) \wedge (a \vee c)) = r(d \vee e) + r(a \vee c) - r(d \vee e \vee a \vee c) \geq 2 + 2 - 3 = 1,$$

puesto que  $d \vee e \vee a \vee c \leq a \vee b \vee c$ . Esto significa que  $d \vee e$  y  $a \vee c$  tienen un punto común  $f$ . Pero, está claro que la recta  $d \vee e$  no puede contener  $a$ , de lo

contrario ella contendría  $avd$ , y, por consiguiente, el punto  $b$ , y junto con éste punto,  $bvc$ , y, por lo tanto,  $c$ , de donde se obtendría  $r(avbvc) = r(dve) = 2$ . De un modo análogo llegamos a que  $dve$  no puede contener  $c$ . Por eso,  $f$  es el tercer punto en  $avc$ , y, de este modo, según el lema, tenemos  $a \sim c$ , lo que se trataba de demostrar.

De aquí se desprende que en cualquier retículo geométrico modular  $L$  la relación de perspectividad parte el conjunto de todos los puntos (átomos) del retículo en clases de equivalencia  $E_i$ , tales que para  $a \in E_i$  y  $b \in E_j$  se cumple la condición  $a \sim b$ , cuando y sólo cuando  $i = j$ .

Sean ahora  $E_1, E_2, \dots, E_k$  las clases de equivalencia que se componen de puntos recíprocamente perspectivos, y  $a_i = \sup E_i$  para  $i = 1, \dots, k$ .

**Lema 10.** En un retículo modular de dimensión finita con complementos los elementos  $a_i$ , que acabamos de encontrar, son independientes.

*Demostración.* Para demostrar la igualdad

$$(a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}) \wedge a_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots, k$$

es suficiente observar que ningún punto de  $a_n$  puede contenerse en  $a_1 \vee \dots \vee a_{n-1}$ , puesto que  $E_i$  no se intersecan, y que todo elemento  $x > 0$  contiene un punto del retículo. El lema queda demostrado.

De los teoremas 29 y 34, como también del lema 10, obtenemos el siguiente resultado importante.

**Teorema 43.** Cualquier retículo modular de longitud finita con complementos es un producto directo  $\{0, a_i\}$ , donde  $a_i = \sup E_i$ , y  $E_i$  son diferentes clases de relación de perspectividad de los puntos del retículo  $L$ .

*Ejercicios.* Demuéstrase que

21. Todo retículo geométrico es isomorfo al producto directo de retículos geométricos directamente indescomponibles.

22. Un retículo geométrico es directamente indescomponible cuando y sólo cuando cualesquiera dos átomos suyos son perspectivos.

23. En un retículo geométrico la relación de perspectividad de los puntos (átomos) es transitiva.

24. Los retículos geométricos distributivos son álgebras de Boole, y sólo álgebras de Boole, de rango finito.

25. La clase de retículos geométricos modulares está formada por productos directos de los retículos de espacios proyectivos y sólo por éstos.

Las afirmaciones de los ejercicios 21. . . 23 caracterizan las propiedades estructurales de los retículos geométricos. Fueron obtenidas por primera vez por F. Maeda [117], y, en una forma más estricta, por Sasaki U. y Fujiwara S. [118]. Los resultados de los ejercicios 24. . . 25 son características completas de las clases de retículos geométricos distributivos y de los retículos geométricos modulares (se obtienen con facilidad de los ejercicios 21. . . 23). Las demostraciones de la mayoría de dichos resultados pueden hallarse en [1, 31, 32 y 116].

Los retículos  $L$  que para cualesquiera  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in L$  satisfacen la desigualdad

$$(a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \leq ((c \vee a_1) \wedge a_0) \vee ((c \vee b_1) \wedge b_0),$$

donde  $c = ((a_0 \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1)) \wedge (((a_0 \vee a_2) \wedge (b_0 \vee b_2)) \vee ((a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2)))$ , se llaman *arguesanos*. Esta desigualdad representa una forma teórico-reticular del teorema de Desargues (véase teorema en el cap. 5). Efectivamente, tiene lugar el siguiente resultado:

**Teorema 44.** Un retículo geométrico modular  $L$  es arguesano cuando y sólo cuando en la geometría proyectiva, asociada con el retículo, es lícito el teorema de Desargues.

La demostración del teorema citado no es difícil, por lo cual se omite aquí. Los que desean, pueden encontrarla en [32]. En la misma obra se aduce la demostración del siguiente resultado que representa el teorema bien conocido de la geometría.

**Teorema 45.** Sea  $L$  un retículo geométrico modular y supongamos que la geometría proyectiva, asociada con  $L$ , es regular (es decir, cada recta tiene no menos de tres puntos). Si el rango del retículo  $L$  no es inferior a 4, el retículo será arguesano.

Ejercicios. Demuéstrase que

26. La arguesidad de un retículo predetermina su modularidad.

27. Un conjunto parcialmente ordenado  $B(S_n)$  (véase ejemplo 8 en el § 8.1) de todas las particiones no ordenadas del  $n =$  conjunto  $S_n$  es un retículo geométrico. Este retículo se llama, a menudo, belliano.

28. Un belliano  $B(S_n)$  es modular, si y sólo si  $n \leq 3$ .

29. Cualquier retículo distributivo finito es encajable en un belliano.

Se denomina *representación* del retículo  $L$  a un encaje de dicho retículo en cierto belliano. Las representaciones de los retículos finitos es uno de los más antiguos problemas no resueltos por completo en la teoría de los retículos. Sólo para clases particulares de los retículos existen actualmente respuestas a este problema. El ejercicio 29, como también los teoremas 44 y 45, sirven de ilustración para algunos resultados en este sentido.

Hemos aclarado aquí sólo algunos de los aspectos de la teoría de los retículos. Para un estudio ulterior de esta teoría recomendamos los libros [31. . . 33].

En conclusión de este párrafo detengámonos en las propiedades estructurales de resolución de algunos problemas de la optimización combinatoria. En el § 6.3, al analizar el algoritmo «ávido», hemos mostrado que él es correcto, es decir, resuelve correctamente cualquier problema concreto de optimización combinatoria sobre el sistema de conjuntos  $\mathcal{S}$ , cuando y sólo cuando  $\mathcal{S}$  es un matroide, o bien, dicho de otro modo, forma un retículo geométrico (véanse los teoremas 2 del § 6.3 y 60 del § 8.4). Resulta que también muchos otros problemas de optimización combinatoria poseen propiedades estructurales muy interesantes. Mostremos esto, pero ante todo establezcamos el teorema de tipo de Jordan—Hölder para las funciones submodulares en los retículos distributivos.

Sea  $K$  un retículo distributivo con cero 0 y unidad 1. Recordemos que un booleano  $\mathcal{P}(S)$ , es decir, un conjunto de todos los subconjuntos de cierto conjunto finito  $S$ , forma un retículo distributivo en el que el cero 0 está

representado por un conjunto vacío  $\emptyset$ , y la unidad 1, por todo el conjunto  $S$ . Una función real  $\mu$ , definida en  $K$ , se denomina submodular, si para todos los  $x, y \in K$  se cumple la desigualdad

$$\mu(x) + \mu(y) \geq \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y).$$

Si para todos los  $x, y \in K$  es válida la igualdad

$$\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y),$$

la función  $\mu$  se denomina *modular*. Son funciones submodulares, por ejemplo, las dimensiones de los subespacios en espacios vectoriales y en las geometrías proyectivas, las funciones de rango en los matroides y polimatroides [128. . .132], la potencia de los subconjuntos u otras. Más aún, las funciones de dimensión de los subespacios en los espacios vectoriales y en las geometrías proyectivas son funciones modulares.

Supongamos que  $\mu$  es una función submodular sobre un retículo distributivo  $K$  con cero 0 y unidad 1;  $L$ , un subretículo del retículo  $K$  con elemento minimal  $a^-$  y elemento maximal  $a^+$ , y que

$$\mathcal{I} = \{[a_i, a_{i+1}] \mid i = 1, 2, \dots, n-1\},$$

donde  $a^- = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = a^+$  es una cadena máxima arbitraria que en el subretículo  $L$  va de  $a^-$  a  $a^+$ . En cada uno de los intervalos de la familia  $\mathcal{I}$  definamos, para todo  $x \in [a_i, a_{i+1}]$  y  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , una función  $\mu_i$ , al poner

$$\mu_i(x) = \mu(x) - \mu(a_i).$$

Además, si los intervalos  $[0, a^-]$  y  $[a^+, 1]$  no son conjuntos vacíos, entonces, pongamos, para  $x \in [0, a^-]$ ,  $\mu^-(x) = \mu(x)$ , y para  $x \in [a^+, 1]$ ,  $\mu^+(x) = \mu(x) - \mu(a^+)$ .

Elijamos ahora en  $L$  alguna otra cadena máxima que va de  $a^-$  a  $a^+$ , por ejemplo,  $a'^- = a'_1, a'_2, \dots, a'_n = a^+$ , y definamos, para todo  $x \in [a'_i, a'_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , una función

$$\mu'_i(x) = \mu(x) - \mu(a'_i).$$

Resulta fácil comprobar que las funciones  $\mu_i$  y  $\mu'_i$ , definidas más arriba, son submodulares.

En virtud del teorema 27, existe una permutación  $\tau$  de índices  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ , definida unívocamente, tal que para todo  $i, i = 1, 2, \dots, n-1$ , tiene lugar la correlación  $[a_i, a_{i+1}] \sim [a'_{\tau(i)}, a'_{\tau(i)+1}]$ .

Sea  $\pi_i: [a_i, a_{i+1}] \rightarrow [a'_{\tau(i)}, a'_{\tau(i)+1}]$  un isomorfismo natural condicionado por la proyectividad de los intervalos de la cadena del retículo. Diremos que para una función submodular  $\mu$  sobre  $K$  se cumple la condición (\*\*\*) , si para cualesquiera dos cadenas máximas de  $a^-$  a  $a^+$  del subretículo  $L$ , a saber:  $a^- = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = a^+$  y  $a'^- = a'_1, a'_2, \dots, a'_{n-1}, a'_n = a^+$ , se verifica, para todo  $x \in [a_i, a_{i+1}]$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , la igualdad

$$\mu_i(x) = \mu(x) - \mu(a_i) = \mu(\pi_i(x)) - \mu(a'_{\tau(i)}) = \mu'_{\tau(i)}(\pi_i(x)).$$

En otras palabras, la condición (\*\*\*) significa que la definición de una «nueva» función submodular  $\mu$ , no depende en cierto sentido de la elección de la cadena máxima en un subretículo del retículo distributivo  $K$ .

**Lema II.** Sean  $a, b$  unos elementos arbitrarios del subretículo  $L$ , tales que  $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$ , donde  $\mu$  es una función submodular sobre el retículo distributivo  $K$ . Entonces, para todo  $x \in \{a \wedge b, a \vee b\}$  se verifican las desigualdades:

- 1)  $\mu(x) + \mu(a) = \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a)$ ;
- 2)  $\mu(x) + \mu(b) = \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b)$ ;
- 3)  $\mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(x) + \mu(a \wedge b)$ ;
- 4)  $\mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) = \mu(a \vee b) + \mu(x)$ ;

*Demostración.* Por ser la función  $\mu$  submodular, tenemos

$$\mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) \geq \mu((x \wedge a) \vee (x \wedge b)) + \mu((x \wedge a) \wedge (x \wedge b))$$

y

$$\mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) \geq \mu((x \vee a) \vee (x \vee b)) + \mu((x \vee a) \wedge (x \vee b)).$$

Por cuanto  $x \in \{a \wedge b, a \vee b\}$ , entonces  $(x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \wedge (a \vee b) = x$ ;  $(x \vee a) \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$  (aquí se han aprovechado la propiedad de distributividad de las operaciones reticulares y el hecho de que  $x \leq a \vee b$ , y  $x \geq a \wedge b$ ) y  $(x \wedge a) \wedge (x \wedge b) = x \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$ ,  $(x \vee a) \vee (x \vee b) = x \vee (a \vee b) = a \vee b$  (aquí se han aprovechado las propiedades de asociatividad, conmutatividad e idempotencia de las operaciones reticulares y el hecho de que  $x \geq a \wedge b$ , y  $x \leq a \vee b$ ). Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) &\geq \mu(x) + \mu(a \wedge b), \\ \mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) &\geq \mu(a \vee b) + \mu(x). \end{aligned}$$

Además, por ser submodular  $\mu$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \mu(x) + \mu(a) &\geq \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a) \\ \mu(x) + \mu(b) &\geq \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b). \end{aligned}$$

Sumemos las últimas cuatro desigualdades y obtendremos

$$\mu(a) + \mu(b) \geq \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b),$$

pero, por hipótesis del lema,  $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$ . Por consiguiente, en todas las cuatro desigualdades los segundos miembros son iguales a los primeros. El lema está demostrado.

**Lema 12.** Sea  $L$  un subretículo del retículo distributivo finito  $L$ , tal que para todos los  $a, b \in L$  se verifica la igualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

Entonces, para todo par de intervalos proyectivos  $\{a, a'\}$  y  $\{b, b'\}$ , donde  $a, a', b, b' \in L$ , y para cada  $x \in \{a, a'\}$  resulta válida la igualdad  $\mu(x) -$



-  $\mu(\pi(x)) = \mu(a) - \mu(b) = \mu(a') - \mu(b')$ , donde  $\pi$  es un isomorfismo natural de  $[a, a']$  en  $[b, b']$  condicionado por la proyectividad de los intervalos.

*Demostración.* Si demostramos la validez del lema para los intervalos transpuestos, entonces, en virtud de la definición de intervalos proyectivos, el lema será válido también para cualquier par de intervalos. Por eso, demostraremos el lema para los intervalos transpuestos. Sea  $a, b \in L$ . En virtud del teorema 26, la aplicación  $\varphi(x) = x \wedge a = y$ , definida para todo  $x \in [b, a \vee b]$ , fija una aplicación isomorfa del intervalo  $[b, a \vee b]$  en  $[a \wedge b, a]$ . Debido a la igualdad 3), del lema 11 tenemos, para todo  $x \in [b, a \vee b]$ :

$$\mu(a \wedge b) + \mu(x) = \mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(\varphi(x)) + \mu(b).$$

De aquí,  $\mu(x) - \mu(\varphi(x)) = \mu(b) - \mu(a \wedge b) = \mu(a \vee b) - \mu(a)$ . De este modo, el lema es lícito para cualesquiera intervalos transpuestos  $[b, a \vee b]$  y  $[a \wedge b, a]$ . Con ello queda demostrado el lema.

Directamente del lema 12 y del teorema 27 obtenemos el siguiente resultado importante.

**Teorema 46** (del tipo de Jordan--Hölder para funciones submodulares sobre un retículo distributivo). Sea  $L$  un subretículo del retículo distributivo finito  $K$ , y sea  $\mu$  una función submodular sobre  $K$ . La condición (\*\*\*) para la función submodular  $\mu$  tiene lugar cuando y sólo cuando para todos los  $a, b \in L$  se verifica la igualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \wedge b) + \mu(a \vee b)$$

El subretículo  $L$  del retículo distributivo  $K$  se denomina  $\mu$ -esqueleto, si la función submodular  $\mu$ , definida sobre  $K$ , es modular en  $L$ , es decir, si para todos los  $a, b \in L$  se cumple la igualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

De este modo, el teorema 46 afirma que la condición (\*\*\*) para una función submodular  $\mu$  se cumple cuando y sólo cuando el subretículo  $L$  es un  $\mu$ -esqueleto.

Supongamos que  $S$  es un conjunto finito;  $\mu$ , una función submodular definida sobre:  $\mathcal{P}(S)$ ;  $L$ , un  $\mu$ -esqueleto del booleano:  $\mathcal{P}(S)$ ;  $(S^-, \{F \mid F \in \mathcal{F}\}, S^+)$ , una partición del conjunto  $S$  (véase el corolario 2) que no depende de la elección de la cadena máxima de  $S^-$  a  $S - S^+$  en el subretículo  $L$ , donde  $S^-$  es el elemento minimal, y  $S - S^+$ , el elemento maximal del subretículo  $L$ . Entonces, en virtud del teorema 46, cada cadena máxima  $S^- = A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = S - S^+$  en  $L$  fija un mismo conjunto  $\{\mu^-, \{\mu^F \mid F \in \mathcal{F}\}, \mu^+\}$  de funciones submodulares, donde

$$\mu^-(X) = \mu(X) \text{ para } X \subseteq S^-;$$

$$M^F(X) = \mu(X \cup A_i) - \mu(A_i) \text{ para } X \subseteq A_{i+1} - A_i = F \in \mathcal{F}, \text{ donde} \\ i = 1, \dots, n-1;$$

$$\mu^+(X) = \mu(X \cup (S - S^+)) - \mu(S - S^+) \text{ para } X \subseteq S^+.$$

De aquí llegamos al siguiente

**Corolario 6.** Sea  $\mu$  una función submodular sobre el booleano  $\mathcal{P}(S)$ . Si  $L$  es un  $\mu$ -esqueleto, entonces la familia  $\{\mu^-, \{\mu^F \mid F \in \mathcal{F}\}, \mu^+\}$  de funciones submodulares no depende de la elección de las cadenas máximas en el subretículo  $L$ .

Las propiedades de los  $\mu$ -esqueletos de retículos distributivos se examinan en [128]. No vamos a detenernos en ellas y pasemos al análisis de los problemas de optimización combinatoria enunciados en términos de minimización de la función submodular  $\mu$  sobre el retículo distributivo  $K$ :

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x),$$

donde  $\mu_i(x)$  es una función submodular sobre el retículo distributivo  $K$ , y  $c_i$ , unos coeficientes reales positivos,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Proposición 1.** Sea  $\min\{\mu(x) \mid x \in K\} = w$ ,  $\mu(y_1) = \mu(y_2) = w$ . Entonces,  $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$ .

*Demostración.* Tenemos  $2w = \mu(y_1) + \mu(y_2) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1) + \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_2) = \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) \geq$  (por ser las funciones  $\mu_i$  submodulares)  $\geq \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2)) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1 \vee y_2) + \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1 \wedge y_2) = \mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) \geq$  (puesto que  $w$  es el valor mínimo de  $\mu(x)$ )  $\geq w + w = 2w$ .

Por cuanto  $\mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) = 2w$ ,  $\mu(y_1 \vee y_2) \geq w$ , y  $\mu(y_1, y_2) \geq w$ , entonces,  $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$ .

De la desigualdad

$$\sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) = \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2)),$$

tenemos (en virtud de que para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , los coeficientes  $c_i > 0$ ):

$$\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2) = \mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2).$$

Llegamos, pues, al

**Corolario 7.** Una familia  $L$  de todos los elementos del retículo distributivo  $K$ , sobre los cuales la función submodular  $\mu(x)$  alcanza su valor mínimo, forma un  $\mu$ -esqueleto del retículo  $K$ . Más aún, el subretículo  $L$  es también  $\mu_i$ -esqueleto del retículo  $K$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

El  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ -esqueleto  $L$  del retículo  $K$  obtenido, depende, evidentemente, no sólo de las funciones submodulares  $\mu_i$ , sino también de los coeficientes positivos  $c_i$ . Por eso, el esqueleto  $L$  del retículo  $K$  se denotará también con  $L(c_1, \dots, c_m)$ , subrayando su dependencia de  $c_1, c_2, \dots, c_m$ .

Es obvio que para todo  $\lambda > 0$  tenemos la igualdad

$$L(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_m) = L(c_1, c_2, \dots, c_m).$$

Veamos un símplex  $(m-1)$ -dimensional  $S^{m-1}$  [124], en el cual cada

punto tiene las coordenadas  $\left(\frac{c_1}{c_0}, \frac{c_2}{c_0}, \dots, \frac{c_m}{c_0}\right)$ , donde  $c_0 = c_1 + \dots + c_m$ . Entonces, el esqueleto  $L$  del retículo  $K$  puede considerarse como función en el símplice  $S^{m-1}$  con valores en la familia de todos los subretículos del retículo distributivo  $K$ . Observemos que en este caso el conjunto de puntos en  $S^{m-1}$ , a los cuales corresponde un retículo fijo del retículo  $K$ , forma un poliedro convexo [124]. Además, si los poliedros, correspondientes a los esqueletos  $L_1$  y  $L_2$ , tienen una arista común en  $S^{m-1}$ , entonces el subretículo generado por los elementos de  $L_1 \cup L_2$  es el esqueleto del retículo  $K$  correspondiente a dicha arista común. Así pues, el símplice  $(m-1)$ -dimensional  $S^{m-1}$  está dotado de la estructura del complejo poliédrico.

Si algunas de las funciones submodulares  $\mu_i(x)$  son monótonas, la estructura del complejo poliédrico puede caracterizarse de un modo aún más detallado.

En efecto, supongamos que  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  son funciones submodulares no decrecientes, y  $\mu_{p+1}, \mu_{p+2}, \dots, \mu_q$ , funciones submodulares no crecientes sobre un retículo distributivo  $K$ . Veamos dos vértices (es decir, aristas 0-dimensionales) del complejo, cuyas coordenadas  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  y  $(c'_1, c'_2, \dots, c'_m)$  son de tal género que

$$\begin{aligned} c_i &\geq c'_i && \text{para } i = 1, 2, \dots, p; \\ c_i &\leq c'_i && \text{para } i = p+1, \dots, q; \\ c_i &= c'_i && \text{para } i = q+1, \dots, m. \end{aligned}$$

$$\text{Sea } w = \min \left\{ \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x) \mid x \in K \right\}, \text{ y } w' = \min \left\{ \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(x) \mid x \in K \right\}.$$

**Proposición 2.** Si  $y \in L(c_1, \dots, c_m)$  e  $y' \in L(c'_1, \dots, c'_m)$ , entonces

$$y \wedge y' \in L(c_1, \dots, c_m), \quad y \vee y' \in L(c'_1, \dots, c'_m)$$

y para todo  $i, i = 1, \dots, m$ , se verifican las igualdades

$$\mu_i(y) + \mu_i(y') = \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y').$$

*Demostración.* Si  $y \in L(c_1, \dots, c_m)$  e  $y' \in L(c'_1, \dots, c'_m)$ , entonces

$$\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) = w \text{ y } \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = w'.$$

Por consiguiente,  $w + w' = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = \sum_{i=1}^p [(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y) + \mu_i(y'))] + \sum_{i=p+1}^q [c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) \geq$  (por ser submodulares las funciones  $\mu_i(x) \geq \sum_{i=1}^p [(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y'))] + \sum_{i=p+1}^q [c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) =$  (sumemos y reste-

$$\begin{aligned}
& \text{mos de las sumas obtenidas } \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') \text{ y } \sum_{i=p+1}^q c'_i \mu_i(y \vee y') = \\
& = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') + \sum_{i=1}^p [(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i \mu_i(y \wedge y') - \\
& - c_i \mu_i(y \wedge y')] + \sum_{i=p+1}^q [(c'_i - c_i) \mu_i(y') + c_i \mu_i(y \vee y') - c'_i \mu_i(y \vee y')] = \\
& = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') + \sum_{i=1}^p (c_i - c'_i) (\mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y')) + \\
& + \sum_{i=p+1}^q (c'_i - c_i) (\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y')) \geq (\text{en virtud de que para } i = 1, 2, \dots \\
& \dots, p \text{ se verifican las desigualdades } c_i - c'_i \geq 0, \text{ y } \mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y') \geq 0, \\
& \text{puesto que } \mu_i \text{ es una funci3n submodular no decreciente e } y \geq y \wedge y' \text{ en el} \\
& \text{ret3culo } K; \text{ y para } i = p + 1, \dots, q \text{ se verifican las desigualdades} \\
& c'_i - c_i \geq 0, \text{ y } \mu_i(y') - \mu_i(y \vee y') \geq 0, \text{ puesto que } \mu_i \text{ son funci3nes submo-} \\
& \text{dulares no crecientes e } y' \leq y \vee y' \text{ en el ret3culo } K, \text{ y, por consiguiente, en vir-} \\
& \text{tud de que la segunda y tercera sumas en la 3ltima expresi3n son no ne-} \\
& \text{gativas)} \geq \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') \geq w + w', \text{ puesto que } w = \\
& = \min \left\{ \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x) \mid x \in K \right\} \text{ y } w' = \min \left\{ \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(x) \mid x \in K \right\}.
\end{aligned}$$

De aqu3, por cuanto las expresiones primera y 3ltima son iguales, tenemos

$$\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') = w + w'.$$

Por consiguiente, puesto que

$$w = \min \left\{ \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x) \mid x \in K \right\} \text{ y } w' = \min \left\{ \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(x) \mid x \in K \right\},$$

llegamos a que  $\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') = w$ , y  $\sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') = w'$ . De este modo, hemos establecido que  $y \wedge y' \in L(c_1, \dots, c_m)$  e  $y \vee y' \in L(c'_1, \dots, c'_m)$ . Adem3s, queda demostrado que

$$\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y')$$

y tambi3n

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^p c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + \sum_{i=p+1}^q c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y) + \\
& + \mu_i(y')) = \sum_{i=1}^p c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + \sum_{i=p+1}^q c_i (\mu_i(y \vee y') + \\
& + \mu_i(y \wedge y')) + \sum_{i=q+1}^m c_i \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y').
\end{aligned}$$

Teniendo presente la última igualdad, la submodularidad de las funciones  $\mu_i(x)$  y el hecho de que  $c_i > 0$ ,  $c_i' > 0$ , llegamos a que para todos los  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  son válidas las igualdades

$$\mu_i(y) + \mu_i(y') = \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y').$$

La proposición está demostrada.

Directamente de la proposición 2 se deduce el

**Corolario 8.** El conjunto  $L(c_1, \dots, c_m) \cup L(c_1', \dots, c_m')$  constituye un  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ -esqueleto del retículo  $K$ .

Al demostrar la proposición 2, se ha establecido que

$$\sum_{i=1}^p (c_i - c_i') [\mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y')] = 0,$$

$$\sum_{i=p+1}^q (c_i' - c_i) [\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y')] = 0.$$

De aquí, en virtud de que para todo  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $c_i \geq c_i'$  y  $\mu_i$  son funciones submodulares no decrecientes y de que para todo  $i$ ,  $i = p + 1, \dots, q$ ,  $c_i \leq c_i'$  y  $\mu_i$  son funciones submodulares no crecientes, tenemos

$$(c_i - c_i')(\mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y')) \text{ para } i = 1, 2, \dots, p,$$

$$(c_i' - c_i)(\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y')) \text{ para } i = p + 1, \dots, q.$$

Si para  $i = 1, 2, \dots, p$  ponemos  $c > c_i'$ , obtendremos que  $\mu_i(y) = \mu_i(y \wedge y')$ . Análogamente, si para  $i = p + 1, \dots, q$  ponemos  $c_i' > c_i$ , resultará que  $\mu_i(y') = \mu_i(y \vee y')$ . De este modo, para  $i = 1, 2, \dots, p$ , si  $c_i > c_i'$  y  $\mu_i$  son funciones submodulares estrictamente decrecientes, tenemos  $y = y \wedge y'$ , y para  $i = p + 1, \dots, q$ , si  $c_i' > c_i$  y  $\mu_i$  son funciones submodulares estrictamente crecientes, entonces  $y' = y \vee y'$ . En otras palabras, esto quiere decir que todos los elementos del esqueleto  $L(c_1, \dots, c_m)$  son inferiores o iguales a los elementos del esqueleto  $L(c_1', \dots, c_m')$  respecto del orden del retículo  $K$ .

Así pues, la proposición 2 y el corolario 8 permiten obtener, a partir de las soluciones ya conocidas de dos diferentes problemas de optimización, nuevas soluciones para cada uno de los mismos. Si  $\mu_i(x)$  son funciones submodulares en el booleano  $\mathcal{P}(S)$ , el conjunto de soluciones del problema de minimización de la función  $\mu(x) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x)$ , donde  $c_i > 0$ , forma un subretículo  $L$  del booleano  $\mathcal{P}(S)$  (corolario 7). Cada cadena máxima que une los elementos minimal y maximal de  $L$  prefija las particiones del conjunto  $S$  (corolario 2) y de la función submodular  $\mu(x)$  (corolario 6), las cuales no dependen de la elección de la cadena máxima. Esto resulta ser útil al resolver problemas prácticos (véanse [128..132 y 136]).

### 8.3. FUNCIONES DE INCIDENCIA E INVERSIÓN DE MOEBIUS

Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito y sea  $K$  un campo de característica 0 (comúnmente, el campo de números reales). Estudiemos la clase  $\mathcal{A}(P)$  de funciones  $f(x, y)$  que toman valores en el campo  $K$  y que están definidas para todos los  $x, y \in P$ . Exijamos que  $f(x, y) = 0$ , si no se cumple la condición  $x \leq y$ . La suma de tales dos funciones, como también la multiplicación por los escalares, se definirán del modo siguiente:

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y);$$

$$(\alpha \cdot f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y);$$

y el producto (o convolución)  $f * g$ , del modo siguiente:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y).$$

El producto citado está definido correctamente, puesto que por ser el conjunto  $P$  localmente finito, el número de sumandos en el segundo miembro es finito y  $(f * g)(x, y) = 0$  cada vez que  $x \not\leq y$ .

Un conjunto  $\mathcal{A}(P)$  con operaciones de adición, multiplicación (o convolución) y multiplicación por escalares recibe el nombre de *álgebra de incidencia* del conjunto parcialmente ordenado  $P$  sobre  $K$ , mientras que los elementos de dicho conjunto se llaman funciones de incidencia del conjunto  $P$ .

No es difícil notar que la multiplicación de las funciones de incidencia es asociativa y distributiva, mientras que de elemento neutro con relación a la multiplicación (convolución) sirve la función de Kronecker (o función delta):

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Demostremos, por ejemplo, que la operación de multiplicación (convolución) es asociativa. Sea  $f, g, h \in \mathcal{A}(P)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (f * (g * h)) &= \sum_{zx \leq z \leq y} f(x, z)(g * h)(z, y) = \sum_{zx \leq z \leq y} f(x, z) \left( \sum_{tz \leq t \leq y} g(z, t)h(t, y) \right) = \\ &= \sum_{tx \leq t \leq y} \left( \sum_{zx \leq z \leq t} f(x, z)g(z, t) \right) h(t, y) = \sum_{tx \leq t \leq y} (f * g)(x, t)h(t, y) = \\ &= ((f * g) * h)(x, y). \end{aligned}$$

En vista de las observaciones citadas, se ve que el álgebra de incidencia es realmente un álgebra asociativa sobre el campo  $K$ . Además,  $\mathcal{A}(P)$  es conmutativa cuando y sólo cuando el conjunto parcialmente ordenado  $P$  es una anticadena, es decir, cuando dicho conjunto está ordenado de un modo trivial.

**Teorema 47.** Una función de incidencia  $f$  en  $\mathcal{A}(P)$  tiene funciones inver-

sas tanto izquierda, como derecha, cuando y sólo cuando  $f(x, x) \neq 0$  para todo  $x \in P$ . Más aún, las funciones inversas derecha e izquierda coinciden.

*Demostración.* Sea

$$\sum_{zx \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y) = \delta(x, y).$$

Por cuanto  $1 = \delta(x, x) = f(x, x)g(x, x)$  para todo  $x$  de  $P$ , la condición  $f(x, x) \neq 0$  para todo  $x \in P$  será, evidentemente, necesaria.

Viceversa, sea  $f(x, x) \neq 0$  para todo  $x \in P$ . Entonces,  $g(x, x) = \frac{1}{f(x, x)}$  para todo  $x \in P$ . Hallemos, ahora,  $g(x, y)$  para  $x < y$ . Supongamos, sin restringir la generalidad de los razonamientos, que ya tenemos los valores de  $g(z, y)$  para todos los  $z$  tales que  $x < z \leq y$ . Para  $x < y$  tenemos

$$(f * g)(x, y) = \delta(x, y) = 0 = \sum_{zx \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y),$$

y, por consiguiente,

$$-f(x, x)g(x, y) = \sum_{zx < z \leq y} f(x, z)g(z, y).$$

De aquí podemos hallar  $g(x, y)$ , puesto que  $f(x, x) \neq 0$ , y todos los sumandos de la suma finita en el segundo miembro de la última igualdad son conocidos. Así pues, no sólo hemos demostrado que  $f$  tiene función inversa derecha, sino que obtuvimos también la fórmula recurrente para su cálculo.

Análogamente, de la relación  $(g * f)(x, y) = \delta(x, y)$  obtenemos la fórmula recurrente para determinar la función inversa izquierda para  $f$ .

Supongamos ahora que  $g_1$  y  $g_2$  son funciones inversas para  $f$  de  $A(P)$ , derecha e izquierda, respectivamente, es decir,  $f * g_1 = g_2 * f = \delta$ . Por ser asociativa la multiplicación de las funciones de incidencia,  $g_2 = g_2 * \delta = g_2 * (f * g_1) = (g_2 * f) * g_1 = \delta * g_1 = g_1$ , es decir, las funciones inversas izquierda y derecha coinciden. La demostración queda terminada.

Una función, inversa de  $f$ , se denotará con  $f^{-1}$ . Introduzcamos, además, las siguientes designaciones:  $f^0 = \delta$ ,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f * f$ ,  $f^3 = f * f^2$ , ...,  $f^k = f * f^{k-1}$ , ... y  $f^{-k} = (f^{-1})^k$ .

Además de la función de Kronecker  $\delta(x, y)$ , ya analizada, se destacan a menudo, entre otras funciones de incidencia en  $A(P)$ , las siguientes:

$$\text{zeta-función } \zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

$$\text{lambda-función } \lambda(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y, \text{ o bien } y \text{ cubre } x; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

función de cadenas (eta-función)

$$\eta(x, y) = \zeta(x, y) - \delta(x, y);$$

función de recubrimiento (kappa-función)

$$\kappa(x, y) = \lambda(x, y) - \delta(x, y);$$

función de Moebius (my-función)

$$\mu(x, y) = \zeta^{-1}(x, y);$$

función de longitud (rho-función)

$\varrho(x, y) = l(x, y)$ , donde  $l(x, y)$  es la longitud del intervalo  $[x, y]$  en  $P$ . Las razones, por las que se destacan dichas funciones y sus denominaciones se harán claras, si estudiamos las propiedades de estas funciones de incidencia. La definición de la función de Moebius  $\mu(x, y)$ , como función inversa de la zeta-función  $\zeta(x, y)$  de  $A(P)$  es correcta. En efecto,  $\zeta(x, x) = 1 \neq 0$  para todo  $x \in P$ . Por eso, en virtud del teorema 47,  $\zeta$  tiene su inversa  $\mu$ , la cual es para  $\zeta$  tanto la inversa izquierda, como la derecha. Más aún, en virtud del teorema 47, la función de Moebius  $\mu(x, y)$  del conjunto finito local parcialmente ordenado  $P$  puede ser calculada para  $x, y \in P$  fijos, tales que  $x < y$  de un modo recurrente con ayuda de las fórmulas

$$\mu(x, y) = - \sum_{z: x \leq z < y} \mu(x, z) = - \sum_{z: x < z \leq y} \mu(z, y) \quad (1)$$

tomándose en consideración las condiciones de que  $\mu(x, x) = 1$  para cualquier  $x \in P$ .

Sea  $P^*$  un conjunto parcialmente ordenado, dual respecto a  $P$ . Entonces, si  $\zeta(x, y) \in A(P)$ , y  $\zeta^*(x, y) \in A(P^*)$ , tendremos  $\zeta^*(x, y) = \zeta(x, y)$  para cualesquiera  $x, y$  de  $P$ . Es evidente que las igualdades análogas tienen lugar para las lambda-funciones, las funciones de Kronecker, de cadenas, de recubrimiento y de longitud; además, en virtud del teorema 47 y la propiedad análoga de la zeta-función, también son válidas para las funciones de Moebius. De este modo, las funciones de incidencia mencionadas no cambian, si en lugar de  $P$  examinamos  $P^*$ .

Para comprender mejor el sentido de las definiciones introducidas, analicemos las representaciones matriciales de las funciones de incidencia. Con este fin prolonguemos al principio la relación de orden parcial  $\leq$  sobre el conjunto ordenado y localmente finito  $P$ , hasta que se obtenga una relación de orden  $\prec$ , que convierte  $P$  en un conjunto bien ordenado (esto es siempre realizable en virtud del teorema 4), luego hagamos uso del conjunto bien ordenado para marcar con índices los elementos del conjunto  $P$ . Resultará en este caso que si  $x_\alpha \leq x_\beta$ , entonces  $\alpha \prec \beta$ . Ahora, a toda función de incidencia  $f(x, y)$  de  $A(P)$  se le hace corresponder una matriz  $F = \|f_{\alpha\beta}\|$  con elementos del campo  $K$ , en la cual las filas y las columnas están concordadas con los índices del conjunto  $P$ , a saber,  $f_{\alpha\beta} = f(x_\alpha, x_\beta)$ . Hablando en general, la matriz obtenida puede ser también de orden infinito. En el caso de un conjunto finito parcialmente ordenado  $P$  las matrices de funciones de incidencia serán de orden  $|P|$ , mientras que como conjunto de índices en este caso pueden elegirse los números naturales de 1 a  $|P|$  (véase teorema 2).

La matriz de las funciones de incidencia  $f(x, y) \in A(P)$ , obtenida de este modo, es, obviamente, una matriz triangular superior, es decir, en la que debajo de la diagonal principal solamente hay ceros.



Veamos unos cuantos ejemplos. Sea  $Z$  una matriz de la zeta-función de  $A(P)$ . Si  $P = \mathcal{P}(S)$ , donde  $S = \{a, b, c\}$ , entonces

$$Z = \begin{pmatrix} \emptyset & a & b & c & ab & bc & ac & abc \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \emptyset \\ a \\ b \\ c \\ ab \\ bc \\ ac \\ abc \end{matrix}$$

Si  $P$  es una cadena de 5 elementos, entonces

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $P$  es una anticadena de 5 elementos, entonces

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean  $F = \|f_{\alpha\beta}\|$  y  $G = \|g_{\alpha\beta}\|$  matrices de las funciones de incidencia  $f$  y  $g$  de  $A(P)$ , respectivamente, de cuyos índices sirven los elementos del conjunto bien ordenado  $(P; <)$ . Entonces, si  $h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ ,  $t(x, y) = \alpha \cdot f(x, y)$  y  $p(x, y) = (f * g)(x, y)$ , tendremos  $H = F + G$ ,  $T = \alpha \cdot F$ , y  $P = F \cdot G$ . Las primeras dos igualdades son evidentes. Comprobemos que  $P = F \cdot G$ , es decir,  $p_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} f_{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta}$ . Efectivamente,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma} f_{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} &= \sum_{\gamma} f(x_{\alpha}, x_{\gamma}) g(x_{\gamma}, x_{\beta}) = \sum_{j:\alpha < j < \beta} f(x_{\alpha}, x_j) g(x_j, x_{\beta}) = \\ &= (\text{aprovechemos el hecho de que, para } \gamma < \alpha, f(x_{\alpha}, x_{\gamma}) = 0, \text{ y, para } \\ &\beta < \gamma, g(x_{\gamma}, x_{\beta}) = 0) = \sum_{x_{\gamma}, x_{\alpha} \leq x_{\gamma} \leq x_{\beta}} f(x_{\alpha}, x_{\gamma}) g(x_{\gamma}, x_{\beta}) = p(x_{\alpha}, x_{\beta}) = p_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

De aquí, si  $P$  es un conjunto finito parcialmente ordenado,  $A(P)$  puede considerarse como una subálgebra del álgebra de todas las matrices triangulares superiores de orden  $|P|$ . Las representaciones matriciales facilitan considerablemente el estudio de los conjuntos parcialmente ordenados y la comprensión de la esencia de introducción de las álgebras de incidencia sobre ellos.

Inmediatamente de las definiciones de las funciones de incidencia se deducen las siguientes identidades:

$$\text{a) } f = f * \delta = \delta * f; \quad \text{b) } \delta^k = \delta^{k-1} = \dots = \delta;$$

$$\text{c) } \zeta^n(x, y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \eta^i(x, y); \quad \eta^n(x, y) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \zeta^i(x, y);$$

$$\text{d) } \lambda^n(x, y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \kappa^i(x, y); \quad \kappa^n(x, y) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \lambda^i(x, y);$$

e)  $(x * \zeta)(x, y)$  = al número de todos los átomos en el intervalo  $[(x, y)]$  de  $P$ .

f)  $(\zeta * \kappa)(x, y)$  = al número de todos los coátomos en el intervalo  $[x, y]$  de  $P$ .

Para obtener las identidades c) y d) hace falta servirse también del binomio de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Comprobemos la validez de la identidad c). Tenemos  $(x * \zeta)(x, y) = \sum_{zx \leq z \leq y} \kappa(x, z) \zeta(z, y) =$  (por cuanto  $\kappa(x, z) \neq 0$  sólo cuando  $x < z$ ) =  $\sum_{zx < z \leq y} \kappa(x, z) \zeta(z, y) =$  (puesto que  $\zeta(z, y) = 1$  para todo  $z \leq y$ ) =  $\sum_{zx < z \leq y} \kappa(x, z)$ . Pero si  $\kappa(x, z) \neq 0$ , entonces  $\kappa(x, z) = 1$ . La identidad

e) queda demostrada. La identidad f) se obtiene de c) de un modo dual.

Además,

$$\begin{aligned} f^2(x, y) &= (f * f)(x, y) = \sum_{z_1: x \leq z_1 \leq y} f(x, z_1) f(z_1, y); \\ f^3(x, y) &= (f * f^2)(x, y) = (f * (f * f))(x, y) = \\ &= \sum_{z_1: x \leq z_1 \leq y} f(x, z_1) \left( \sum_{z_2: z_1 \leq z_2 \leq y} f(z_1, z_2) f(z_2, y) \right) = \\ &= \sum_{z_1, z_2: x \leq z_1 \leq z_2 \leq y} f(x, z_1) f(z_1, z_2) f(z_2, y). \end{aligned}$$

Ahora, por inducción obtenemos la identidad

$$\text{g) } f^k(x, y) = \sum_{z_1, z_2, \dots, z_{k-1}: x \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{k-1} \leq y} f(x, z_1) f(z_1, z_2) \dots f(z_{k-1}, y).$$

Directamente de g) y de las definiciones de las funciones de incidencia  $\zeta, \eta, \kappa$  del conjunto parcialmente ordenado y localmente finito  $P$  obtenemos las identidades:

h)  $\eta^k(x, y)$  = al número de todas las cadenas de longitud  $k$  entre  $x$  e  $y$  en  $P$  (puesto que  $\eta(x, z_1) \eta(z_1, z_2) \dots \eta(z_{k-1}, y) = 1$  cuando y sólo cuando  $x < z_1 < z_2 < \dots < z_{k-1} < y$ );

i)  $\kappa^k(x, y) =$  al número de todas las cadenas máximas de longitud  $k$  entre  $x$  e  $y$  en  $P$  (puesto que  $\kappa(x, z_1)\kappa(z_1, z_2) \dots \kappa(z_{k-1}, y) = 1$  cuando y sólo cuando  $x \prec z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_{k-1} \prec y$ );

j)  $\zeta^2(x, y) = |\{x, y\}|$  (puesto que  $\zeta(x, z)\zeta(z, y) = 1$  cuando y sólo cuando  $x \leq z \leq y$ ).

Introduzcamos las designaciones especiales para algunos elementos más del álgebra de incidencia  $A(P)$ . Sea  $x, y, u, v \in P$ . Pongamos

$$e_x(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } u = v = x, \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

$$\delta_{x,y}(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } u = x, v = y, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Ejercicios. Sea  $f \in A(P)$ . Demuéstrase que

1. Si  $g = \delta_{x,y} * f$ , entonces  $g(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \neq x, \\ f(u, v), & \text{si } u = x. \end{cases}$

2. Si  $g = f * \delta_{z,w}$ , entonces  $g(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{si } v \neq w; \\ f(u, z), & \text{si } v = w \end{cases}$

3. Si  $g = \delta_{x,y} * f * \delta_{z,w}$ , entonces  $g(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \neq x \text{ y } v \neq w, \\ f(y, z), & \text{si } u = x \text{ y } v = w. \end{cases}$

Es evidente que  $\delta_{x,y} * \delta_{u,v} = \begin{cases} \delta_{x,y}, & \text{si } y = u; \\ 0, & \text{si } y \neq u. \end{cases}$

Observemos que  $e_x = \delta_{x,x}$ . De aquí,  $e_x^2 = e_x$ , es decir,  $e_x$  son idempotentes en  $A(P)$ .

Haciendo uso de las funciones introducidas, podemos escribir

$$f = \sum_{x,y \in P: x \leq y} f(x, y) \delta_{x,y}.$$

Esta igualdad puede entenderse de tal manera, que para todos los  $u, v \in P$  se tiene

$$f(u, v) = \sum_{x,y \in P: x \leq y} f(x, y) \delta_{x,y}(u, v)$$

(cualesquiera que sean  $u$  y  $v$ , la suma en el segundo miembro contiene un solo sumando no nulo). Mostremos que  $e_x * f * e_y = f(x, y) \delta_{x,y}$ . En efecto,

$$e_x * \sum_{u,v \in P: u \leq v} f(u, v) \delta_{u,v} * e_y = \sum_{u,v \in P: u \leq v} f(u, v) \delta_{x,x} * \delta_{u,v} * \delta_{y,y} = f(x, y) \delta_{x,y}.$$

Recordemos algunos resultados y definiciones que nos harán falta a continuación. Se denomina *ideal derecho* a un subgrupo  $I$  del grupo aditivo de un anillo  $R$  si, junto con cualquier elemento  $a \in I$  y cualquier  $x \in R$ , el elemento  $ax$  también está contenido en  $I$ . Si, en las mismas condiciones,  $xa$

se contiene en  $I$ , entonces  $I$  recibe el nombre de *ideal izquierdo*. El subconjunto  $I$  del anillo  $R$ , que es ideal izquierdo y derecho simultáneamente, se denomina *ideal bilateral*. Un elemento  $x$  del anillo  $R$  es *casi regular a la derecha*, si existe un elemento  $y \in R$  tal que  $x + y - xy = 0$ . Cabe notar que en un anillo con la unidad  $1$  el elemento  $x$  es casi regular a la derecha cuando y sólo cuando  $1 - x$  es invertible a la derecha. Efectivamente,  $x + y - xy = 0 \Leftrightarrow 1 - (x + y - xy) = 1 \Leftrightarrow (1 - x)(1 - y) = 1$ . Un ideal derecho será casi regular, si todos los elementos suyos son casi regulares a la derecha. Se llama *radical de Jacobson* del anillo  $R$  (se denota  $\text{rad } R$ ) al ideal maximal derecho casi regular del anillo  $R$ . El radical de Jacobson del anillo  $R$  es un ideal bilateral. En el anillo  $R$  con la unidad  $1$  el elemento  $x \in \text{rad } R$  cuando y sólo cuando para todos los  $a, b \in R$  el elemento  $1 - axb$  es invertible [137].

**Ejercicio 4.** Demuéstrese que un idempotente casi regular a la derecha de cualquier anillo es igual a cero.

**Proposición 3.** El radical de Jacobson de un álgebra de incidencia  $A(P)$  del conjunto parcialmente ordenado y localmente finito  $P$  sobre el campo  $K$  contiene todas las funciones  $f \in A(P)$  tales que  $f(x, x) = 0$  para todo  $x \in P$ .

*Demostración.* El elemento  $f \in A(P)$  es casi regular cuando y sólo cuando  $1 - f$  es invertible en  $A(P)$ . En virtud del teorema 47, el elemento  $1 - f$  es invertible cuando y sólo cuando para todos los  $x \in P$  tiene lugar  $(1 - f)(x, x) \neq 0$ , o bien  $f(x, x) \neq 1$ . El álgebra de incidencia es un anillo con la unidad  $1$  (la función delta es un elemento unidad). Por eso,  $f \in \text{rad } A(P)$  en aquel y sólo en aquel caso cuando para todos los  $g, h \in A(P)$  el elemento  $1 - g * f * h$  es invertible, o bien, que es lo mismo,  $g * f * h$  es casi regular. En particular, para  $g = h = e_x$  tenemos  $e_x * f * e_x = f(x, x)e_x \in \text{rad } A(P)$ . De aquí, para todo  $x \in P$ ,  $f(x, x) = 0$ , puesto que en el radical no hay idempotentes, salvo  $0$  (véase ejercicio 4). La proposición está demostrada.

Observemos que las álgebras de incidencia de dos conjuntos parcialmente ordenados son isomorfas como anillos, cuando y sólo cuando son isomorfos los propios conjuntos parcialmente ordenados. En una dirección esta afirmación es evidente. Demostremosla en la otra dirección.

**Teorema 48 (Stanley).** Sean  $P$  y  $Q$  los conjuntos parcialmente ordenados y localmente finitos, y sea  $K$  un campo. Entonces, del isomorfismo de las álgebras de incidencia  $A_K(P)$  y  $A_K(Q)$  se desprende que  $P$  y  $Q$  son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.

*Demostración.* Demostremos cómo se puede restablecer unívocamente el conjunto parcialmente ordenado  $P$ , a partir del anillo  $A(P)$ . Al factorizar  $A(P)$  según el conjunto de elementos de la forma  $\sum_{x < y} \lambda_{x,y} \delta_{x,y} = \text{rad } A(P)$ , obtendremos  $\sum_x \lambda_{x,x} \delta_{x,x} + \text{rad } A(P)$ .

De este modo, los elementos  $A(P)/\text{rad } A(P)$  tienen por expresión  $\bar{f} = \sum_{x \in P} \lambda_x \bar{e}_x$ . Una aplicación  $\varphi: \sum_{x \in P} \lambda_x \bar{e}_x \rightarrow (\lambda_x)_{x \in P}$  es un isomorfismo  $A(P)/\text{rad } A(P) \rightarrow \prod_{x \in P} K_x$  (producto directo de ejemplares del campo  $K =$

$= K_x$ , por uno para cada  $x$  de  $P$ ). Así pues,  $A(P)/\text{rad } A(P) \cong \prod_{x \in P} K_x$  y se

genera por los idempotentes  $e_x$  que son ortogonales ( $e_x \cdot e_y = 0$  para  $x \neq y$ ) y mínimos (es decir, son mínimos los ideales izquierdos generados por ellos). Demostremos que otros idempotentes mínimos  $b \in A(P)$  no existen. En el producto  $\prod_{x \in P} K_x \bar{e}_x = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Si  $\bar{f} \cdot \bar{e}_x = (0 \dots \lambda \dots 0)$  es un potente, entonces  $\lambda^2 = \lambda$ . De aquí,  $\lambda = 0$  ó a 1. El ideal generado por  $\bar{e}_x$  tiene la forma  $(0 \dots \lambda \dots 0)$ . Por consiguiente, el juego de  $\bar{e}_x$  se define unívocamente por el álgebra  $A(P)$ , puesto que si dos álgebras de incidencia  $A(P)$  y  $A(Q)$  son isomorfas, en las álgebras  $\overline{A(P)}$  y  $\overline{A(Q)}$  los idempotentes mínimos corresponden uno al otro.

Sea un conjunto  $f_x$  de idempotentes mínimos a la derecha y a la izquierda en  $A(P)$  tales que  $\bar{f}_x = \bar{e}_x$ . Introduzcamos en el conjunto  $f_x$  un orden, suponiendo que  $f_x \leq f_y$ , cuando y sólo cuando  $f_x \cdot A(P) \cdot f_y \neq 0$ . El teorema quedará demostrado, si mostramos que  $f_x \leq f_y$  cuando y sólo cuando  $x \leq y$ . Tenemos:  $f_x = e_x + \sum_{u < x} \lambda_{u,x} \delta_{u,v}$ . Es fácil mostrar que  $u \leq x \leq v$ , de lo contrario no tendremos el mínimo. En efecto, de  $f_x$  podemos obtener  $e_x \cdot f_x$  (multiplicando a la izquierda), mientras que de  $e_x \cdot f_x$  (si  $u \not\leq x$ ) no se puede obtener  $f_x$ . Por consiguiente, el ideal izquierdo  $f_x$  no es mínimo. Así pues,  $u \leq x$ . De un modo análogo se demuestra que  $v \geq x$ , cualquiera que sea  $v$  (siempre que  $\lambda_{u,v} \neq 0$ ).

Sea  $x \leq y$ . Mostremos que en este caso  $f_x \cdot A(P) \cdot f_y \neq 0$ . Con este fin basta comprobar que  $f_x \cdot \delta_{x,y} \cdot f_y \neq 0$ . Efectivamente,  $f_x \cdot \delta_{x,y} \cdot f_y = \left( e_x + \sum_{\substack{u \leq x \leq v \\ u < v}} \lambda_{u,v} \delta_{u,v} \right) \cdot \delta_{x,y} \cdot \left( e_y + \sum_{\substack{s \leq y \leq t \\ s < t}} \mu_{s,t} \delta_{s,t} \right) = e_x \cdot \delta_{x,y} \cdot e_y + \dots = \delta_{x,y} + \dots \neq \lambda \delta_{x,y}$ . Por cuanto  $\delta_{x,y}$  puede obtenerse después de abrir los paréntesis de un solo modo:  $e_x \cdot \delta_{x,y} \cdot e_y$ , este sumando no puede reducirse junto con los otros. Por eso, el segundo miembro no es igual a 0.

Sea  $x \not\leq y$ . Mostremos que en este caso  $f_x \cdot A(P) \cdot f_y = 0$ , donde  $f_x = \sum_{u \leq x \leq v} \lambda_{u,v} \delta_{u,v}$  y  $f_y = \sum_{s \leq y \leq t} \mu_{s,t} \delta_{s,t}$ . Con este fin basta demostrar que para todos los  $p, q$  tiene lugar la relación  $f_x \cdot \delta_{p,q} \cdot f_y = 0$ , puesto que todo elemento  $f \in A(P)$  puede ser representado en la forma  $\sum_{p \leq q} \lambda_{p,q} \delta_{p,q}$ . Sea  $f_x \cdot \lambda_{p,q} \cdot f_y \neq 0$ . Entonces, sólo un sumando es distinto de cero:  $\delta_{u,v} \cdot \delta_{p,q} \cdot \delta_{s,t} \neq 0$  (aquí se omite el coeficiente). Pero,  $\delta_{u,v} \cdot \delta_{p,q} \cdot \delta_{s,t} \neq 0$ , si y sólo si  $u \leq x \leq v = p \leq q = s \leq y \leq t$ , es decir, cuando  $x \leq y$ . Hemos llegado a una contradicción con eso de que  $x \not\leq y$ . Por consiguiente  $f_x \cdot \delta_{p,q} \cdot f_y = 0$ . El teorema está demostrado.

Ocurre a menudo que en las aplicaciones se examina no todo el álgebra de incidencias  $A(P)$  en su integridad, sino sólo determinadas subálgebras

de ésta, exigiendo de las funciones de incidencia, o bien valores constantes sobre los intervalos isomorfos del conjunto parcialmente ordenado  $P$ , o bien la llamada multiplicatividad.

Sea  $A(P)$  un álgebra de incidencia del conjunto parcialmente ordenado localmente finito  $P$ . Veamos un subconjunto de todas las funciones de incidencia  $f \in A(P)$ , para las cuales del isomorfismo de todos los intervalos  $[x, y]$  y  $[a, b]$  en  $P$  se deduce:  $f(x, y) = f(a, b)$ . Denotemos este subconjunto con  $S(P)$ . Es evidente que  $S(P)$  es un subálgebra del álgebra de incidencia  $A(P)$  que se llama *álgebra estándar* del conjunto parcialmente ordenado  $P$ . En efecto, si  $f, g \in A(P)$ , y  $\varphi$  es cierto isomorfismo del intervalo  $[x, y]$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &= f(x, y) + g(x, y) = f(a, b) + g(a, b) = (f + g)(a, b); \\ (\alpha f)(x, y) &= \alpha f(x, y) = \alpha f(a, b) = (\alpha f)(a, b); \\ (f * g)(x, y) &= \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y) = \sum_{z: \varphi(x) \leq \varphi(z) \leq \varphi(y)} f(\varphi(x), \varphi(z))g(\varphi(z), \varphi(y)) = \\ &= \sum_{z: a = \varphi(x) \leq \varphi(z) \leq \varphi(y) = b} f(a = \varphi(x), \varphi(z))g(\varphi(z), b = \varphi(y)) = (f * g)(a, b).\end{aligned}$$

Directamente del teorema 47 obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 9.** Sea  $S(P)$  un álgebra estándar del conjunto parcialmente ordenado  $P$ . Si la función de incidencia pertenece a  $S(P)$  y es invertible en  $A(P)$ , será invertible también en  $S(P)$ .

Es fácil comprobar que las funciones  $\varrho, \delta, \xi, \lambda, \eta, \kappa$ , definidas más arriba, yacen en  $S(P)$  y, en virtud del corolario 9, la función de Moebius  $\mu$  también está situada en  $S(P)$ .

Sea  $P$  un retículo. La función de incidencia  $f \in A(P)$  se llama *multiplicativa*, si para todos los  $x, y \in P$  de la condición

$$[x \wedge y, x \vee y] \cong [x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$$

se deduce que

$$f(x \wedge y, x \vee y) = f(x \wedge y, x)f(x \wedge y, y).$$

Son ejemplos de funciones multiplicativas de incidencia para los retículos las funciones  $\delta, \xi$  y  $\xi^2$  (véase la identidad  $f$ )).

**Corolario 10.** Sea  $f$  una función invertible multiplicativa de  $A(P)$ . Entonces,  $f(x, x) = 1$  para todo  $x \in P$ .

*Demostración.* De  $[x \wedge x, x \vee x] \cong [x \wedge x, x] \times [x \wedge x, x]$  tenemos:  $f(x, x) = f(x, x)f(x, x)$ . Debido a la invertibilidad,  $f(x, x) \neq 0$  para todo  $x \in P$ . Por consiguiente,  $f(x, x) = 1$ .

**Teorema 49.** Sea  $P$  un retículo. Entonces, todas las funciones inversibles multiplicativas pertenecientes a  $S(P)$ , forman un grupo con relación a la operación de multiplicación (convolución).

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  las funciones inversibles multiplicativas de incidencia del álgebra estándar  $S(P)$ . Comprobemos que la función  $f * g$  tam-

bién será multiplicativa. Admitamos que

$$[x\wedge y, x\vee y] \cong [x\wedge y, x] \times [x\wedge y, y].$$

En este caso  $(f * g)(x\wedge y, x\vee y) = \sum_{z: x\wedge y \leq z \leq x\vee y} f(x\wedge y, z)g(z, x\vee y) =$  (puesto

que  $[x\wedge y, z] \cong [x\wedge y, z\wedge x] \times [x\wedge y, z\wedge y]$ ,  $[z, x\vee y] \cong [z, z\vee x] \times [z, z\vee y]$  y  $f, g$  son funciones multiplicativas)  $= \sum_{z: x\wedge y \leq z \leq x\vee y} f(x\wedge y, z\wedge x)f(x\wedge y, z\wedge y)g(z, z\vee x) \times$

$\times g(z, z\vee y) =$  (puesto que  $[z, z\vee x] \cong [z\wedge x, x]$ ,  $[z, z\vee y] \cong [z\wedge y, y]$  y  $f, g \in S(P)$ )  $= \sum_{z: x\wedge y \leq z \leq x\vee y} (f(x\wedge y, z\wedge x)g(z\wedge x, x))(f(x\wedge y, z\wedge y)g(z\wedge y, y)) \neq$  (denotemos

$z\wedge x$  y  $z\wedge y$  con  $u$  y  $v$  respectivamente; entonces,  $x\wedge y \leq u \leq x$  y  $x\wedge y \leq v \leq y$ , puesto que  $x\wedge(x\wedge y) = x\wedge y$ ,  $y\wedge(x\wedge y) = (x\wedge y)$ ,  $x\wedge(x\vee y) = x$ ,  $y\wedge(x\vee y) = y$ )  $= \sum_{u: x\wedge y \leq u \leq x} f(x\wedge y, u)g(u, x) \sum_{v: x\wedge y \leq v \leq y} f(x\wedge y, v)g(v, y) = (f * g)(x\wedge y, x)(f * g)(x\wedge y, y)$ , es decir,  $f * g$  es una función multiplicativa.

Comprobemos que  $f^{-1}$  es también una función multiplicativa. Demostremos por inducción respecto de  $l$  que la condición de multiplicatividad se cumple para todos los intervalos de longitud no superior a  $l$ . Para  $l = 0$ , esto es evidente. Supongamos que la afirmación dada es válida para  $l - 1$ ; demostremos su validez para  $l$ . Analicemos cierto intervalo  $[x\wedge y, x\vee y]$  de longitud  $l$ . Tenemos, pues,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(x\wedge y, x\vee y) = (f^{-1} * f)(x\wedge y, x\vee y) = \sum_{z: x\wedge y \leq z \leq x\vee y} f^{-1}(x\wedge y, z)f(z, x\vee y) = \\ &= \sum_{z: x\wedge y \leq z \leq x\vee y} f^{-1}(x\wedge y, z)f(z, x\vee y) + f^{-1}(x\wedge y, x\vee y)f(x\vee y, x\vee y) = \end{aligned}$$

(en virtud de la hipótesis de inducción, y teniendo presente que  $f(x\vee y, x\vee y) = 1$ )  $= \sum_{z: x\wedge y \leq z \leq x\vee y} f^{-1}(x\wedge y, z\wedge x)f^{-1}(x\wedge y, z\wedge y)f(z, z\vee x)f(z, z\vee y) +$

$+ f^{-1}(x\wedge y, x\vee y) =$  (en virtud de que  $[z, z\vee x] \cong [z\wedge x, x]$ ,  $[z, z\vee y] \cong [z\wedge y, y]$  y  $f, f^{-1} \in S(P)$ )  $= \sum_{z: x\wedge y \leq z \leq x\vee y} f^{-1}(x\wedge y, z\wedge x)f(z\wedge x, x)f^{-1}(x\wedge y, z\wedge y)f(z\wedge y, y) +$

$+ f^{-1}(x\wedge y, x\vee y) =$  (denotemos  $z\wedge x$  y  $z\wedge y$ , con  $u$  y  $v$ , respectivamente, teniendo presente que  $[x\wedge y, x\vee y] \cong [x\wedge y, x] \times [x\wedge y, y]$  y  $f(x, x) = 1$  para todo  $x \in P$ )  $= \sum_{u: x\wedge y \leq u \leq x} f^{-1}(x\wedge y, u)f(u, x) \sum_{v: x\wedge y \leq v \leq y} f^{-1}(x\wedge y, v)f(v, y) + f^{-1}(x\wedge y, x) \times$

$\times \sum_{u: x\wedge y \leq u < y} f^{-1}(x\wedge y, x)f(u, y) + f^{-1}(x\wedge y, y) \sum_{v: x\wedge y \leq v < y} f^{-1}(x\wedge y, u)f(u, x) +$

$+ f^{-1}(x\wedge y, y) \sum_{u: x\wedge y \leq u < x} f^{-1}(x\wedge y, u)f(u, x) + f^{-1}(x\wedge y, x\vee y) =$  (en virtud de las

fórmulas del teorema 47 y de la igualdad  $f(x, x) = 1$  para todo  $x \in P$ )  $= (-f^{-1}(x\wedge y, x))(-f^{-1}(x\wedge y, y)) + f^{-1}(x\wedge y, x)(-f^{-1}(x\wedge y, y)) + f^{-1}(x\wedge y, y)(-f^{-1}(x\wedge y, x)) + f^{-1}(x\wedge y, x\vee y)$ . De este modo, llegamos a que

$$f^{-1}(x\wedge y, x\vee y) - f^{-1}(x\wedge y, x)f^{-1}(x\wedge y, y) = 0.$$

Por consiguiente,

$$f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) = f^{-1}(x \wedge y, x) f^{-1}(x \wedge y, y)$$

y la demostración del teorema queda establecida.

Calculemos la función de Moebius para algunos conjuntos parcialmente ordenados aducidos en el § 8.1.

**EJEMPLO 1.** Sea  $A$  un conjunto parcialmente ordenado trivial. Es obvio que

$$\mu(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

**EJEMPLO 2.** Sea  $N = \{0, 1, 2, \dots, k\}$  un subconjunto de números enteros con orden ordinario. En virtud del corolario 10,  $\mu(n, n) = 1$  para todo  $n \in N$ . Aprovechemos las fórmulas (1) y obtengamos que  $\mu(n, n+1) = -1$ , y  $\mu(n, n+k) = 0$ , cualesquiera que sean  $n, k \in N$  y  $k \geq 2$ . De este modo,

$$\mu(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m; \\ -1, & \text{si } m - n = 1; \\ 0, & \text{en los casos restantes.} \end{cases}$$

**EJEMPLO 3.** Sea  $\mathcal{P}(S_n)$  un booleano (véase ejemplo 4 del § 8.1), donde  $S_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . Veamos una familia de todos los binarios  $n$ -dimensionales  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$  con una relación de orden:  $\bar{a} \leq \bar{b}$  cuando y sólo cuando  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Designemos este conjunto parcialmente ordenado con  $\Sigma_n$ . No es difícil comprobar que

$$\mathcal{P}(S_n) \cong \Sigma_n$$

En efecto, si  $X \subseteq S_n$ , definamos  $\varphi(X) = (x_1, \dots, x_n)$ , donde

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si } s_i \notin X; \\ 1, & \text{si } s_i \in X. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $\varphi$  es un isomorfismo. Más aún,

$$\Sigma_n \cong \Sigma_1 \times \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_1.$$

En virtud del ejemplo 2, para  $\Sigma_1$  e  $y \geq x$  tenemos  $\mu(x, y) = (-1)^{y-x}$ , puesto que existen solamente dos posibilidades:  $x = y$ , o bien  $x = 0$  e  $y = 1$ . Sea  $X \subseteq Y \subseteq S_n$ ,  $\varphi(X) = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\varphi(Y) = (y_1, \dots, y_n)$  en el isomorfismo  $\mathcal{P}(S_n) \cong \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mu(X, Y) &= \mu((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \prod_{i=1}^n \mu(x_i, y_i) = \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i} = (-1)^{|Y| - |X|}. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4.** Sea  $D(n)$  un conjunto de todos los divisores del número natural  $n$ , ordenado respecto de la divisibilidad (véase ejemplo 6 del § 8.1). De



acuerdo con el teorema sobre la unicidad de la descomposición de un número en factores primos,

$$D(n) \equiv D(p_1^{\alpha_1}) \times D(p_2^{\alpha_2}) \times \dots \times D(p_s^{\alpha_s}).$$

Por consiguiente, es suficiente calcular la función de Moebius para  $D(p^\alpha)$ , donde  $p$  es un número primo, y  $\alpha$ , un número entero. Pero, el conjunto parcialmente ordenado  $D(p^\alpha)$  es una cadena  $1 | p | p^2 | \dots | p^\alpha$  isomorfa al subconjunto de números enteros  $\{0, 1, 2, \dots, \alpha\}$  con orden ordinario, cuya función de Moebius se ha calculado en el ejemplo 2. Por eso

$$\mu(p^i, p^j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ -1, & \text{si } j - i = 1; \\ 0, & \text{en todos los casos restantes.} \end{cases}$$

En virtud del teorema 49,

$$\mu(l, m) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = m \\ (-1)^s, & \text{si } \frac{m}{l} = p_1 p_2 \dots p_s, \text{ donde } p_1, p_2, \dots, p_s \text{ son} \\ \text{números primos distintos dos a dos;} \\ 0, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

La forma clásica de la función de Moebius

$$\mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } d = 1; \\ (-1)^s, & \text{si } d = p_1 p_2 \dots p_s, \text{ donde } p_1, p_2, \dots, \\ p_s \text{ son números enteros distintos dos a dos;} \\ 0, & \text{si } d = r^2 t, d \neq 1, \end{cases}$$

hallada por Moebius aproximadamente en 1832 y utilizada en la teoría de los números, está ligada con la función de Moebius de un conjunto parcialmente ordenado  $D(n)$  del modo siguiente

$$\mu(l, m) = \mu\left(\frac{m}{l}\right), \text{ donde } d = \frac{m}{l} \in N.$$

Esta relación explica el origen de la denominación de la función de Moebius.

Continuemos la exposición de los métodos que se emplean en el cálculo de las funciones de Moebius para conjuntos parcialmente ordenados arbitrarios. Sean  $P$  y  $L$  dos conjuntos parcialmente ordenados con las funciones de Moebius  $\mu_P$  y  $\mu_L$ , respectivamente, y sea  $f: P \rightarrow L$  una aplicación del conjunto  $P$  en el  $L$  que conserva el orden. Veamos cómo se puede hallar  $\mu_L$  con ayuda de las  $\mu_P$  y  $f$  conocidas y discutamos dos tipos de aplicaciones: los operadores de clausura y la correspondencia de Galois.

Generalicemos la noción de operador de clausura, introducida para el booleano en el § 8.2, sobre el conjunto arbitrario parcialmente ordenado  $P$ .

La aplicación  $\varphi: P \rightarrow P$  se llama operador de clausura sobre el conjunto  $P$ , si para cualesquiera elementos  $a, b \in P$  se cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $a \leq \varphi(a)$ ; b) si  $a \leq b$ , entonces  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ ; c)  $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(a)$ .

Los ejemplos de operadores de clausura son numerosos. Así, por ejemplo, en el retículo completo de los subespacios de un espacio topológico servirá de operador de clausura una aplicación que a todo subespacio le asigna su clausura. En un conjunto parcialmente ordenado  $P$  con la unidad  $1$ , a título de operador de clausura interviene la aplicación  $\varphi(x) = 1$  para todo  $x \in P$ .

Si  $\varphi$  es un operador de clausura, entonces  $\varphi(x)$  se llamará  $\varphi$ -clausura del elemento  $x$ . Un elemento que coincide con su  $\varphi$ -clausura se denomina  $\varphi$ -cerrado.

**Teorema 50.** Si  $\varphi$  es el operador de clausura sobre un conjunto parcialmente ordenado  $P$ , el subconjunto  $A \subseteq P$  se compone de elementos  $\varphi$ -cerrados y si  $a = \inf A$  existe, entonces  $a$  será también un elemento  $\varphi$ -cerrado.

*Demostración.* Por cuanto  $a \leq x$  para todo  $x \in A$ , entonces  $\varphi(a) \leq \varphi(x) = x$  para todos los  $x \in A$ , y, por lo tanto,  $\varphi(a) \leq a$ . La desigualdad inversa se desprende de la definición de operador de clausura. El teorema queda demostrado.

**Teorema 51.** Si  $\varphi$  es un operador de clausura en un retículo completo  $P$ , entonces, un conjunto parcialmente ordenado  $Q$  de todos los elementos  $\varphi$ -cerrados, considerado como subconjunto del conjunto parcialmente ordenado  $P$ , es también un retículo completo. Además, para todo subconjunto no vacío  $A$  del conjunto  $Q$  tienen lugar las correlaciones:

$$\inf_Q A = \inf_P A \text{ y } \sup_Q A = \varphi(\sup_P A).$$

El conjunto  $Q$  recibe el nombre de *factor* del conjunto parcialmente ordenado con relación al operador de clausura  $\varphi$ .

*Demostración.* Sea  $1$  la unidad de un retículo completo  $P$ . Por cuanto  $\varphi(1) \geq 1 \geq \varphi(1)$ , entonces  $1$  pertenece a  $Q$ , y, obviamente, es la unidad de este conjunto parcialmente ordenado. Luego, si  $A$  es un subconjunto no vacío del conjunto  $Q$ , el elemento  $a = \inf_P A$  es, con arreglo al teorema 50,  $\varphi$ -cerrado. Por supuesto,  $a \leq x$  para todo  $x \in A$ . Si  $v \in Q$  y  $v \leq x$  para todo  $x \in A$ , entonces  $v \leq a$ . Así que,  $a = \inf_Q A$ , y, por consiguiente,  $Q$  es un retículo completo. Luego, sea  $b = \sup_P A$  y sea  $\bar{b} = \sup_Q A$ . Está claro que  $\bar{b} \in Q$ , y  $\bar{b} \geq b$ , puesto que  $\bar{b} \geq x$  para todo  $x \in A$ . De aquí:  $\bar{b} = \varphi(\bar{b}) \geq \varphi(b)$ . La desigualdad  $\bar{b} \leq \varphi(b)$  es lícita, ya que  $\varphi(b) \geq \varphi(x) = x$  para todo  $x \in A$ . Por eso,  $b = \varphi(b)$ , lo que se trataba de demostrar.

Sea  $\varphi$  el operador de clausura sobre  $P$  y sea  $Q$  el factor de un conjunto parcialmente ordenado con relación a  $\varphi$ . Consideremos álgebra de incidencia  $A(Q)$  como subconjunto del álgebra  $A(P)$ , al definir adicionalmente pa-

ra toda  $f \in A(Q)$ :

$$f(x, y) = 0, \text{ si } x \notin Q \text{ ó } y \notin Q.$$

Denotemos con  $\mu$  y  $\mu_Q$  las funciones de Moebius para los conjuntos parcialmente ordenados  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Definamos de un modo análogo también  $\zeta, \zeta_Q$  y  $\delta, \delta_Q$ .

**Teorema 52** (de Rota). Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito, y sea  $\varphi$  el operador de clausura sobre  $P$  con el factor  $Q$ . Entonces, para todos los  $x, y \in P$  se verifica la correlación:

$$\sum_{z \in P: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu(x, z) = \begin{cases} \mu_Q(\varphi(x), \varphi(y)), & \text{si } x = \varphi(x) \\ 0, & \text{si } x < \varphi(x). \end{cases}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \sum_{z \in P: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu(x, z) &= \sum_z \mu(x, z) \delta_Q(\varphi(z), \varphi(y)) = \\ &= \sum_{\varphi(z), \varphi(w)} \mu(x, z) \zeta_Q(\varphi(z), \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) = \\ &= \sum_{z, \varphi(w)} \mu(x, z) \zeta(z, \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) = \sum_{\varphi(w) \in Q} \delta(x, \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) \end{aligned}$$

(aquí hemos aprovechado el hecho de que  $z \leq \varphi(w)$  cuando y sólo cuando  $\varphi(z) \leq \varphi(w)$ ). El teorema está demostrado.

**Ejercicios.**

5. Calcúlense las funciones de Moebius para los conjuntos parcialmente ordenados aducidos en los ejemplos 7, 8, 9 y 10 en § 8.1.

6. Sea  $\mu$  una función de Moebius del retículo finito  $P$ , y supongamos que  $x, y, z \in P$ . Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

- (P. Hall). Si  $x \leq y$  e  $y$  no es una unión de elementos que cubren  $x$ , entonces  $\mu(x, y) = 0$ .
- (Weisner). Si  $x \leq y \leq z$ , entonces

$$\sum_{t: \varphi_t = y} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{si } z = x; \\ 0, & \text{si } z \neq x. \end{cases}$$

7. Demuéstrase que la función de Moebius  $\mu$  de un retículo distributivo finito  $P$  se define del modo siguiente:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \text{ no es una unión de elementos que cubren } x; \\ (-1)^n, & \text{si } y \text{ es igual a la unión de } n \text{ elementos distintos que cubren } x. \end{cases}$$

8. Sea  $\mu$  una función de Moebius de un retículo geométrico finito  $P$  y supongamos que  $x, y \in P, x \leq y$ . Demuéstrase que  $\mu(x, y) \neq 0$ . Muéstrase, además, que el valor de  $\mu(x, y)$  es positivo, si el número  $r(y) - r(x)$  es par, y negativo, si es impar. Aquí  $r$  es la función de rango de  $P$ .

9. (Crapo). Sea  $P$  un retículo finito,  $a \in P$  y  $a^\perp$ , un conjunto de complementos al elemento  $a$  en  $P$ . Demuéstrase que para todo  $a \in P$ :

$$\mu(0, 1) = \sum_{b, c \in a^\perp} \mu(0, b) \zeta(b, c) \mu(c, 1).$$

10. Sea  $P$  un retículo finito. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

- si  $P$  es un retículo sin complementos, entonces  $\mu(0, 1) = 0$ .

b) Si  $P$  es un retículo modular, entonces  $\mu(0, 1) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^{-1}} \mu(0, z)$  para todo  $a \in P$ .

c) Si  $P$  es un retículo semimodular, entonces  $\mu(0, 1) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^{-1}} \mu(0, z)$  para todos los elementos modulares  $a \in P$ .

Analicemos ahora la conexión de Galois. Sean  $P$  y  $L$  unos conjuntos parcialmente ordenados. Un par  $(\sigma, \tau)$  de aplicaciones  $\sigma: P \rightarrow L$  se denomina *correspondencia de Galois* entre  $P$  y  $L$ , si para todos los  $x, y \in P$  y todos los  $a, b \in L$  se cumplen las condiciones siguientes:

a) Si  $x \leq y$  en  $P$ , entonces  $\sigma(x) \geq \sigma(y)$  en  $L$ ;

b) Si  $a \leq b$  en  $L$ , entonces  $\tau(a) \geq \tau(b)$  en  $P$ ;

c)  $x \leq \tau\sigma(x)$  para todo  $x \in P$  y  $a \leq \sigma\tau(a)$  para todo  $a \in L$ .

No es difícil comprobar que  $\tau\sigma$  y  $\sigma\tau$  son operadores de clausura en los conjuntos  $P$  y  $L$ , respectivamente.

El concepto citado tiene por origen la teoría de Galois para las ecuaciones algebraicas, donde se examina la correspondencia de Galois entre los subcampos de la ampliación algebraica  $K$  del campo dado  $K_0$  y los subgrupos de los grupos de todos aquellos automorfismos de la ampliación  $K$  que dejan  $K_0$  fijo por elementos. Rota y sus discípulos contribuyeron considerablemente (utilizando la correspondencia de Galois) al avance de la teoría de las funciones de Moebius (véase, por ejemplo, [1]).

Demos a conocer sin demostración un resultado muy importante que se debe a Rota.

**Teorema 53.** Supongamos que  $(\sigma, \tau)$  es una correspondencia entre los conjuntos parcialmente ordenados y localmente finitos  $P$  y  $L$ , y sea  $Q$  el factor del conjunto  $P$  con relación al operador de clausura  $\tau\sigma$ . Entonces, para todos los  $x \in P$ ,  $y \in L$ :

$$\sum_{z \in P: \sigma(z) = y} \mu_P(x, z) = \sum_{u \in L: \tau(u) = x} \mu_L(y, u) = \mu_Q(x, \tau y).$$

La ventaja principal del concepto de correspondencia de Galois consiste en que se puede calcular la función de Moebius  $\mu_L$  de un retículo  $L$ , analizando un subconjunto arbitrario  $P$  y un álgebra de Boole  $\mathscr{P}(P)$  generada por el subconjunto  $P$ .

Veamos ahora algunos problemas combinatorios en cuya resolución se emplean funciones de Moebius. Comencemos por exponer la inversión de Moebius. La inversión de las series finitas es uno de los instrumentos más útiles en el análisis combinatorio y en la teoría de las probabilidades. Su caso particular es el principio clásico de inclusiones-exclusiones (véase § 3.1). Aunque varios problemas de inversión pueden expresarse en términos de inclusiones-exclusiones, tal procedimiento parece, a menudo, artificial. Comúnmente resulta posible cierta ordenación «natural» de los objetos en consideración. Esto constituye la base para la técnica de inversión de Moebius.

**Teorema 54** (1ª fórmula de inversión de Moebius). Sean  $g$  y  $f$  las funciones definidas en un conjunto finito parcialmente ordenado  $P$  con valores sobre el conjunto de números reales, y

$$g(x) = \sum_{y: y \leq x} f(y) \text{ para todo } x \in P$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y: y \leq x} g(y) \mu(y, x) \text{ para todo } x \in P.$$

*Demostración.* Fijemos  $x$  y estudiemos una suma

$$S = \sum_{y: y \leq x} g(y) \mu(y, x) = \sum_{y: y \leq x} \left( \sum_{z: z \leq y} f(z) \right) \mu(y, x).$$

Aquí en lugar de  $g(y)$  hemos sustituido su valor expresado en términos de  $f(z)$ . Cambiemos ahora el orden de la sumación y obtengamos

$$\begin{aligned} S &= \sum_{z: z \leq y} f(z) \sum_{y: y \leq x} \mu(y, x) = \sum_z f(z) \zeta(z, y) \sum_{y: y \leq x} \mu(y, x) = \\ &= \sum_z f(z) \sum_{y: z \leq y \leq x} \zeta(z, y) \mu(y, x) = \sum_z f(z) \delta(z, x) = f(x), \end{aligned}$$

es decir, el teorema queda demostrado.

*Observación 1.* La suposición de que las funciones  $g$  y  $f$  son reales en la formulación del teorema 54 puede omitirse, exigiendo, en vez de esto, que tomen valores en un campo de característica 0.

*Observación 2.* El teorema 54 es lícito también para los conjuntos parcialmente ordenados y localmente finitos. En este caso, para garantizar el carácter finito de las sumas se exige que exista un elemento  $m \in P$ , tal que  $g(y) = 0$  para cualquier  $y \not\leq m$ . En este caso la función  $g$  está correctamente definida. En efecto,

$$g(x) = \sum_{y: y \leq x} f(y) = \sum_{y: m \leq y \leq x} f(y),$$

donde el número de sumandos es finito para todo conjunto parcialmente ordenado y localmente finito.

*Observación 3.* Por ahora no se han establecido las condiciones, bajo las cuales serían admisibles las sumas infinitas.

**Teorema 55** (2ª fórmula de inversión de Moebius). Sean  $g$  y  $f$  las funciones definidas en un conjunto parcialmente ordenado local finito  $P$  con valores sobre un conjunto de números reales, y

$$g(x) = \sum_{y: y \geq x} f(y) \text{ para todo } x \in P.$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y: y \geq x} \mu(x, y) g(y) \text{ para todo } x \in P.$$

La demostración es plenamente análoga a la del teorema 54 y por eso se omite aquí.

Veamos unos cuantos ejemplos.

**EJEMPLO 5.** Sea  $f$  una función definida sobre el conjunto de números positivos enteros de orden ordinario, y

$$g(n) = \sum_{m: m \leq n} f(m).$$

Entonces, en virtud del teorema 54 y del ejemplo 2, tenemos

$$f(n) = g(n) - g(n-1).$$

**EJEMPLO 6.** Sea  $\mathcal{P}(S_n)$  un booleano,  $g(B) = \sum_{A: A \subseteq B} f(A)$ , y  $h(B) = \sum_{A: A \supseteq B} f(A)$ , donde  $B \in \mathcal{P}(S_n)$ . Entonces, en virtud de los teoremas 54 y 55 y del ejemplo 3, tenemos

$$f(B) = \sum_{A: A \subset B} (-1)^{|B| - |A|} g(A)$$

y

$$f(B) = \sum_{A: A \supseteq B} (-1)^{|B| - |A|} h(A)$$

Suponiendo  $|B| = n$  y sumando separadamente en el segundo miembro de la igualdad

$$f(B) = \sum_{A: A \subseteq B} (-1)^{|B| - |A|} g(A)$$

los sumandos con  $|A| = n, n-1, \dots, 1, 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} f(B) = g(B) - \sum_{A: A \subset B, |A| = n-1} g(A) + \sum_{A: A \subset B, |A| = n-2} g(A) - \dots + \\ + \sum_{A: A \subset B, |A| = n-k} (-1)^k g(A) + \dots + (-1)^n \sum_{A: A \subset B, |A| = 0} g(A). \end{aligned}$$

De la última fórmula pueden obtenerse diferentes variantes del método de inclusiones-exclusiones. Estas variantes utilizan la noción de conjunto finito. Sobre un conjunto finito  $S_n$  definamos una función ponderante  $\omega(x)$ ,  $x \in S_n$ , que toma valores de cierto anillo conmutativo  $K$ . Haciendo uso de esta función  $\omega(x)$ , definamos la función de medida sobre el booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ , la cual se denotará también con  $\omega$ . Para cualquier  $A \in \mathcal{P}(S_n)$  pongamos

$$\omega(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = \emptyset; \\ \sum_{x \in A} \omega(x), & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Sea  $K$  el conjunto de números reales. Entonces, si  $\omega(x) = 1$  para todo  $x \in S_n$ , tendremos  $\omega(A) = |A|$ ,  $A \in \mathcal{P}(S_n)$ , es decir, la medida coincide con la potencia del conjunto. Si  $\omega(x) \geq 0$  para todo  $x \in S_n$  y  $\sum_{x \in S_n} \omega(x) = 1$ , la

medida se denominará distribución probabilística. En este caso los elementos de  $\mathcal{P}(S_n)$  se llaman sucesos y se tiene:  $\omega(A) + \omega(\bar{A}) = \omega(S_n)$ , donde  $\bar{A} = S_n \setminus A$ ,  $A \in \mathcal{P}(S_n)$ .

Haciendo uso de las leyes de Morgan, obtenemos

$$\begin{aligned}\overline{\omega(A \cup B)} &= \omega(\overline{A \cap B}); \\ \overline{\omega(A \cap B)} &= \omega(\overline{A \cup B}).\end{aligned}$$

Sea ahora un conjunto  $S_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  cuyos elementos pueden poseer o no poseer cada una de las propiedades  $E_1, E_2, \dots, E_t$ . En el booleano  $\mathcal{P}(S_n)$  está definida cierta medida  $\omega$ . Convengamos en considerar que un elemento  $x_i \in S_n$  posee la  $Q$ -propiedad, si posee las propiedades cuyos índices pertenecen al conjunto  $Q \subseteq N = \{1, 2, \dots, t\}$ . Sea  $Q \cup \bar{Q} = N$ ,  $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$ , y  $f(Q)$  la medida del subconjunto de elementos de  $S_n$  que poseen la  $Q$ -propiedad, y sea  $g(Q)$  la medida del conjunto de elementos de  $S_n$  que poseen la  $\bar{Q}$ -propiedad y, quizás, otras propiedades cuyos números pertenecen a  $Q$ . En este caso es evidente la igualdad

$$g(Q) = \sum_{B: B \subseteq Q} f(B).$$

Aplicando las fórmulas de inversión, obtenemos para  $Q = N$ :

$$\begin{aligned}f(N) &= \sum_{B: B \subseteq N} (-1)^{|Q| - |B|} g(B) = \omega(S_n) - \sum_{B: B \subset N; |B| = t-1} g(B) + \dots + \\ &+ (-1)^k \sum_{B: B \subset N; |B| = t-k} g(B) + \dots + (-1)^1 \sum_{B: B \subset N; |B| = 0} g(B).\end{aligned}$$

Observemos que  $f(N)$  es la medida del conjunto de elementos de  $S_n$  que no poseen ninguna de las propiedades  $E_1, E_2, \dots, E_t$ ;  $g(B)$  es la medida del conjunto de elementos que poseen todas las propiedades con los números de  $N \setminus B$ , y, quizás, algunas de las propiedades con los números de  $B$ ;  $g(N) = \omega(S_n)$ .

Es cómodo designar con la misma letra  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ , el conjunto de elementos de  $S_n$  que poseen la propiedad  $E_i$ . En tal caso podemos escribir

$$\begin{aligned}f(N) &= \omega\left(\bigcap_{i \in N} \bar{E}_i\right), \\ g(B) &= \begin{cases} \omega(S_n), & \text{si } B = N; \\ \omega\left(\bigcap_{i \in N \setminus B} E_i\right), & \text{si } B \neq N. \end{cases}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\omega\left(\bigcap_{i \in N} \bar{E}_i\right) = \sum_{B: B \subseteq N} (-1)^{|N| - |B|} \omega\left(\bigcap_{i \in N \setminus B} E_i\right).$$

De aquí proviene que

$$\omega\left(\bigcap_{i \in N} \bar{E}_i\right) = \sum_{B: B \subseteq N} (-1)^{|B|} \omega\left(\bigcap_{i \in B} E_i\right).$$

Suponiendo  $M(0) = \omega\left(\bigcap_{i \in N} \bar{E}_i\right)$ ,  $A_0 = \omega(S_n)$ ,

$$A_k = \sum_{B: B \subseteq N; |B|=k} \omega\left(\bigcap_{i \in B} E_i\right), \text{ donde } k = 1, 2, \dots, t,$$

obtenemos la fórmula de Sylvester

$$M(0) = \sum_{k=0}^t (-1)^k A_k,$$

que representa una de las fórmulas del método de inclusiones-exclusiones.

La medida del conjunto de elementos de  $S_n$ , que poseen al menos una de la propiedades  $E_1, E_2, \dots, E_t$ , se escribirá en este caso así:

$$M(1) = \omega\left(\bigcup_{i \in N} E_i\right).$$

En virtud de la igualdad evidente  $M(1) = \omega(S_n) - M(0)$  y de la fórmula de Sylvester, obtenemos

$$M(1) = \sum_{k=1}^t (-1)^{k-1} A_k,$$

$$\omega\left(\bigcup_{i \in N} E_i\right) = \sum_{B: B \subseteq N; B \neq \emptyset} (-1)^{|B|-1} \omega\left(\bigcap_{i \in B} E_i\right)$$

Aplicando a la última relación la fórmula de inversión, obtenemos

$$\omega\left(\bigcap_{i \in N} E_i\right) = \sum_{B: B \subseteq N; B \neq \emptyset} (-1)^{|B|-1} \omega\left(\bigcup_{i \in B} E_i\right).$$

Al aprovechar las designaciones

$$A[k] = \sum_{B: B \subseteq N; |B|=k} \omega\left(\bigcup_{i \in B} E_i\right), \text{ donde } k = 1, 2, \dots, t,$$

obtenemos

$$\omega\left(\bigcap_{i \in N} E_i\right) = \sum_{k=1}^t (-1)^{k-1} A[k].$$

Denotemos ahora con  $M(r)$  la medida del conjunto de elementos de  $S_n$  que poseen exactamente  $r$  propiedades de la totalidad  $E_1, E_2, \dots, E_t$ . Haciendo uso de la designación  $E_i$  como conjunto de elementos que poseen la propiedad  $E_i$ , podemos escribir

$$M(r) = \sum_{C: C \subseteq N; |C|=r} \omega\left(\bigcap_{i \in C} E_i \bigcap_{j \in \bar{C}} \bar{E}_j\right),$$

donde  $r = 0, 1, \dots, t$ , y  $\bar{C} = N \setminus C$ .

Suponiendo  $S_n = \bigcap_{i \in C} E_i$ , de la fórmula obtenida más arriba.

$$\omega\left(\bigcap_{i \in N} \bar{E}_i\right) = \sum_{B: B \subseteq N} (-1)^{|B|} \omega\left(\bigcap_{i \in B} E_i\right)$$



llegamos a que

$$\omega\left(\bigcap_{i \in C} E_i \bigcap_{j \in \bar{C}} \bar{E}_j\right) = \sum_{B: B \subseteq C} (-1)^{|B|} \omega\left(\bigcap_{i \in C} E_i \bigcap_{j \in B} E_j\right).$$

De aquí se deduce que

$$\omega\left(\bigcap_{i \in C} E_i\right) \bigcap_{j \in \bar{C}} E_j = \sum_{D: D \subseteq N, D \supseteq C} (-1)^{|D| - |C|} \omega\left(\bigcap_{i \in D} E_i\right).$$

De las últimas tres fórmulas tenemos

$$M(r) = \sum_{C: C \subseteq N, |C| = r} \sum_{D: D \subseteq N, D \supseteq C} (-1)^{|D| - r} \omega\left(\bigcap_{i \in D} E_i\right).$$

Cambiamos el orden de la sumación en el segundo miembro de la última igualdad y obtenemos

$$M(r) = \sum_{D: D \subseteq N, |D| \geq r} (-1)^{|D| - r} \omega\left(\bigcap_{i \in D} E_i\right) \sum_{C: C \subseteq D, |C| = r} 1.$$

De aquí se deduce

$$M(r) = \sum_{D: D \subseteq N, |D| \geq r} (-1)^{|D| - r} \binom{|D|}{r} \omega\left(\bigcap_{i \in D} E_i\right).$$

Haciendo  $|D| = k$  y usando las mismas designaciones que figuran en la fórmula de Sylvester, obtenemos en definitiva

$$M(r) = \sum_{k=r}^l (-1)^{k-r} \binom{k}{r} A_k,$$

donde  $r = 0, 1, \dots, l$ .

**EJEMPLO 7.** Sea  $D(n)$  un conjunto de todos los divisores de un número natural  $n$ , ordenados respecto de la divisibilidad, y

$$g(n) = \sum_{k: k|n} f(k),$$

donde  $k|n$  significa que  $k$  divide a  $n$ . En virtud del teorema 54 y del ejemplo 4,

$$f(n) = \sum_{k: k|n} \mu(k, n) g(k) = \sum_{k: k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) g(k),$$

es decir, obtenemos la fórmula de inversión de Moebius bien conocida de la teoría de los números.

Veamos algunas aplicaciones de la fórmula obtenida.

**Función de Euler.** La función de Euler  $\varphi(n)$  se define como un número de números enteros positivos, inferiores a  $n$  y recíprocamente primos con él. Si la descomposición canónica de  $n$  tiene la forma:  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ , entonces

$$\varphi(n) = (n) \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Obtengamos esta fórmula por el método de inclusiones-exclusiones. A título de elementos tomemos los números  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Diremos que un elemento posee la propiedad  $E_i$ , si se divide por el número  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Es obvio que  $\varphi(n)$  es igual al número de elementos que no poseen ninguna de las propiedades  $E_1, E_2, \dots, E_r$ . El número de elementos que poseen las propiedades dadas  $E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_k}$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r$ , es igual a

$$M(E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_k}) = \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_k}}.$$

Aplicando la fórmula de Sylvester, obtenimos

$$\varphi(n) = n + \sum_{k=1}^r (-1)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_k}} = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

De aquí se desprende el carácter multiplicativo de la función  $\varphi(n)$ , a saber: si  $m$  y  $n$  son recíprocamente primos, entonces  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ .

Denotemos con  $\varphi_d(n)$  el número de números enteros positivos que son inferiores a  $n$  y que tienen con  $n$  el máximo común divisor igual a  $d$ . Entonces es obvio que  $\varphi_1(n) = \varphi(n)$ .

Supongamos que  $d_1, d_2, \dots, d_k$  son todos los divisores del número  $n$ , y sean  $d'_1, d'_2, \dots, d'_k$  sus divisores complementarios, es decir, tales que  $d_i d'_i = n$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Entonces,

$$\varphi(d'_i) = \varphi\left(\frac{n}{d_i}\right) = \varphi_d(n).$$

Evidentemente,

$$\sum_{i=1}^k \varphi(d'_i) = \sum_{i=1}^k \varphi_d(n) = n.$$

De aquí obtenemos la *fórmula de Gauss*:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Aplicando la fórmula de inversión de Moebius, obtenimos

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

*Cálculo de los collares.* Supongamos que se tiene una reserva ilimitada de cuentas (abalorías) de  $k$  diferentes colores. ¿Cuántos son los collares compuestos de  $n$  cuentas? Convengamos en considerar iguales aquellos collares que se obtienen uno del otro por el desplazamiento cíclico de las cuentas.

Al desplazar todas las  $n$  cuentas «en círculo», descubriremos que, realizado un número determinado de desplazamientos, digamos, tras  $d$  desplazamientos, la «configuración de colores» inicial se repetirá y, además,  $d$  será

el divisor del número  $n$ . Llamaremos período a un número mínimo de desplazamientos que conducen a la configuración inicial. Así, por ejemplo,

$$bckbck \rightarrow kbckbc \rightarrow ckbckh \rightarrow bckbck,$$

es decir, el período de esta cadena es igual a 3. Supongamos que tenemos una cadena de longitud  $n$  y período  $d$ . Al realizar los desplazamientos, obtenemos  $d$  diferentes cadenas, incluida la inicial. Uniendo los extremos de cada una de dichas cadenas, tenemos un mismo collar. Más aún, solamente tales cadenas nos dan este collar. De aquí, si designamos con  $M(n)$  el número de collares de longitud  $n$  y con  $m(d)$ , el número de cadenas de período  $d$ , llegamos a que

$$M(n) = \sum_{d:d|n} \frac{1}{d} m(d).$$

Por cuanto se usan las cuentas de  $k$  diferentes colores, el número de todas las cadenas de longitud  $n$  es igual a  $k^n$  y, por consiguiente,

$$k^n = \sum_{d:d|n} \frac{1}{d} m(d).$$

Haciendo uso de la inversión de Moebius, obtenemos

$$m(d) = \sum_{x:xd} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x.$$

De aquí encontramos que

$$M(n) = \sum_{d:d|n} \frac{1}{d} \sum_{x:xd} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x = \frac{1}{n} \sum_{d:d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d,$$

donde  $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$  es la función de Euler.

**EJEMPLO 8.** Coloración de los mapas. El mapa es una totalidad finita de dominios conexos en un plano, limitados con curvas suaves. Dos países, separados por cierta curva (por más de un punto), se llaman contiguos (límitrofes). Si los países están pintados de un modo tal que no haya dos países límitrofes pintados de un mismo color, la coloración se considera correcta. Sea  $G$  un mapa y  $M_G(\lambda)$  el número de sus coloraciones correctas en  $\lambda$  colores. Un submapa  $G'$  del mapa  $G$  se obtiene de  $G$ , borrando ciertas fronteras entre los países. Cualquier mapa puede ser colorado empleando  $\lambda^{|G|}$  métodos, donde  $|G|$  es el número de países en el mapa  $G$ . Cada cual de estas coloraciones es correcta para un solo submapa. (Hace falta borrar las fronteras entre los países pintados de un mismo color). La relación « $G'$  es un submapa de  $G$ » convierte el conjunto de todos los submapas del mapa  $G$  en un conjunto parcialmente ordenado y

$$\lambda^{(G)} = \sum_{G':G' \subseteq G} M_{G'}(\lambda).$$

Aplicando la inversión de Moebius, llegamos a la fórmula

$$M_G(\lambda) = \sum_{G' \subseteq G} \lambda^{G'} \mu(G', G).$$

Por razones evidentes,  $M_G(\lambda)$  se denomina *polinomio cromático* del mapa  $G$ . Si no disponemos de un método sencillo para calcular los valores de  $\mu$ , la búsqueda del polinomio  $M_G(\lambda)$  se hace un problema bastante difícil. Los polinomios cromáticos fueron introducidos por Birkhoff al analizar el problema de cuatro colores.

Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado con cero 0, uno 1 y una función de rango  $r$ . El polinomio

$$\chi(P; x) = \sum_{a \in P} \mu(0, a) x^{(1) - \alpha(a)}$$

se llama *polinomio característico del conjunto parcialmente ordenado  $P$* . Es evidente, que él es una generalización del polinomio cromático para un conjunto parcialmente ordenado. Directamente del teorema 49 puede deducirse el siguiente resultado:

**Teorema 56.** Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado con 0 y 1, que posee una función de rango. Si  $P = P_1 \times P_2$ , entonces

$$\chi(P; x) = \chi(P_1; x) \chi(P_2; x).$$

**Ejercicios.** 11. Compruébese que el polinomio característico  $\chi(\mathcal{P}(S_n); x)$  del booleano  $\mathcal{P}(S_n)$  es igual a  $(x-1)^n$ .

12. Hállese los polinomios característicos para los conjuntos parcialmente ordenados mencionados en los ejemplos 7, 8 y 9 del § 8.1.

Al utilizar la inversión de Moebius como un medio principal, Crapo y Rota mostraron que el problema de cuatro colores y el estudio del los polinomios característicos y cromáticos son casos particulares de un problema más general, a saber, del problema crítico para geometrías combinatorias. El problema citado que consiste en la búsqueda de los conjuntos mínimos de los hiperplanos separadores para un conjunto de puntos en los espacios proyectivos finitos incluye, como casos particulares, algunos problemas de la teoría de codificación y los resultados de Segre, relacionados con la caracterización de los conjuntos independientes en un espacio proyectivo. Además, quedan establecidas las relaciones entre las álgebras de incidencia y las funciones generatrices que permiten pasar de la resolución de ciertos problemas mencionados a la búsqueda de determinadas funciones de incidencia.

Sea  $S(P)$  un álgebra estándar de incidencia del conjunto parcialmente ordenado  $P$ . La relación de equivalencia  $\sim$ , definida en los segmentos del conjunto finito parcialmente local  $P$ , se denomina compatible, si de la condición  $f(x, y) = f(u, v)$ ;  $g(x, y) = g(u, v)$  para todos los pares de segmentos, tales que  $[x, y] \sim [u, v]$ ,  $f, g \in S(P)$ , se deduce que  $(f * g)(x, y) = (f * g)(u, v)$ . Por ejemplo, para cualquier conjunto parcialmente ordenado  $P$  la relación

de isomorfismo es, desde luego, compatible. Precisamente esta afirmación se demuestra en el corolario 9.

Fijemos una relación de equivalencia compatible. Las clases de equivalencia de los segmentos se llamarán tipos. Examinemos un conjunto de funciones definidas en un conjunto de los tipos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , con la particularidad de que la multiplicación de las funciones  $f \cdot g = h$  las definimos del modo siguiente:

$$h(\alpha) = \sum_{\beta, \gamma} \left[ \begin{matrix} \alpha \\ \beta, \gamma \end{matrix} \right] f(\beta)g(\gamma).$$

La sumación se realiza respecto de todos los pares de tipos. El símbolo  $\left[ \begin{matrix} \alpha \\ \beta, \gamma \end{matrix} \right]$  es igual al número de diferentes elementos  $z$  del segmento  $[x, y]$  del tipo  $\alpha$ , tales que  $[x, z]$  es un segmento del tipo  $\beta$  y  $[z, y]$ , del tipo  $\gamma$ . Este símbolo recibe el nombre de coeficiente de incidencia. Sea  $h_\delta \in S(P)$  y

$$h_\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } [x, y] \text{ es del tipo } \delta; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

entonces,

$$(h_\beta * h_\gamma)(u, v) = \left[ \begin{matrix} \alpha \\ \beta, \gamma \end{matrix} \right].$$

Por cuanto  $\sim$  es una relación compatible, el primer miembro de la última igualdad no depende de la elección concreta del intervalo  $[u, v]$  del tipo  $\alpha$ .

Un conjunto de todas las funciones definidas en los tipos forma un *álgebra reducida de incidencia*  $R(P)$ , la cual es isomorfa al álgebra de series de potencias formales.

En efecto, un elemento de  $R(P)$  se define de un modo único por la sucesión  $[a_n]$  de números reales, si ponemos  $f(i, j) = a_{j-i}$ ,  $i \leq j$ .

El producto de elementos se define por la igualdad:

$$h(i, j) = \sum_{k: i \leq k \leq j} f(i, k)g(k, j) = \sum_{k: i \leq k \leq j} a_{k-i}b_{j-k}.$$

Al hacer  $r = k - i$ ,  $n = j - i$ , obtenemos

$$h(i, j) = \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} = c_n.$$

De aquí se deduce que la aplicación del conjunto de series de potencias en  $R(P)$ , definida del modo siguiente:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \rightarrow f(i, j) = a_{j-i}, \quad j \geq i,$$

es un isomorfismo.

Nos hemos detenido muy brevemente en las principales direcciones

combinatorias del desarrollo de las álgebras de incidencia. Para el estudio ulterior de ellas se recomiendan las obras [1, 3, 12 y 93].

#### 8.4. MATROIDES

La teoría de los matroides tuvo su inicio en los años 30 de nuestro siglo. En 1930 B.L. Van der Waerden examinó en su libro «Algebra moderna» una dependencia algebraica, a la par con la dependencia lineal. En 1935 H. Whitney introdujo por primera vez, deseando generalizar el concepto de grafo dual, una noción abstracta de matroide. En 1936 M. Mac Lane dió una interpretación del matroide en términos de la geometría proyectiva, lo que sirvió de base para que los matroides se denominen geometrías combinatorias, y G. Birkhoff introdujo el concepto de  $M$ -estructura (retículo matroidal) y notó que las geometrías proyectivas constituyen precisamente  $M$ -estructuras (cada elemento es una unión de puntos).

En 1942 R. Rado generalizó el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos y mostró que los problemas combinatorios extremales pueden expresarse en términos de una estructura abstracta de independencia. En 1965 Edmonds y Fulkerson descubrieron que para el sistema dado de subconjuntos de un conjunto finito, la totalidad de todas las transversales parciales es una totalidad de subconjuntos independientes de cierto matroide que se denominó matroide transversal. Tal conexión despertó gran atención hacia los sistemas de representantes, pues muy pronto se puso de manifiesto que varios espacios de independencia, que se estudiaban con gran esmero, pueden ser representados en forma de espacios transversales.

Estos resultados, como también los obtenidos más tarde, aclararon una vinculación estrecha entre la teoría de los matroides y la teoría algebraica de retículos, con lo que se hizo posible trasladar a la teoría de los matroides los conceptos e imágenes de la geometría proyectiva, en particular, el concepto de dimensión de un espacio lineal. Merced a esta circunstancia se reveló una semejanza, bastante inesperada, entre los resultados de las diferentes ramas de la matemática discreta (teoría de los grafos, teoría de las transversales, teoría de codificación, etc.).

Los matroides, como retículos geométricos, ya se han considerado en el § 8.2. Por eso, nos limitamos aquí a recordar algunas definiciones del matroide y del retículo que le corresponde.

Se llama *pregeometría* (o *matroide*)  $G$  a un conjunto finito  $S$  con operador de clausura ( $-$ ) que satisface la propiedad de sustitución: para cualesquiera elementos  $p, q \in S$  y para todo subconjunto  $A \subseteq S$ , de  $p \in \overline{A \cup \{q\}}$ ,  $p \notin \overline{A}$  se deduce  $q \in \overline{A \cup \{p\}}$ . Una pregeometría se llama *geometría*, si el conjunto vacío y todos los subconjuntos de un solo elemento son cerrados.

En la definición de la pregeometría  $G$  la condición de finitud del conjunto  $S$  se sustituye, a menudo, por la condición de *base finita*: para todo  $A \subseteq S$  existe un subconjunto finito  $A_f \subseteq A$  tal que  $\overline{A_f} = \overline{A}$ .

Los subconjuntos cerrados de una geometría se denominan *superficies*. Un conjunto de todas las superficies de la geometría, ordenado por inclusión (en el sentido teórico-conjuntista), forma un retículo geométrico, el cual define la geometría  $G$  con una exactitud de hasta un isomorfismo (véase teorema 36).

Sea  $L(G)$  un retículo de la geometría  $G = (S, \bar{\quad})$ . Se llama *rango*  $r$  de la superficie  $\bar{A}$  a la longitud de la cadena máxima desde el elemento nulo hasta  $\bar{A}$  en  $L(G)$  (véase teorema 30) y se llama *rango del conjunto*  $A$  al rango de su clausura en  $L(G)$ , es decir,  $r(A) = r(\bar{A})$  para todo  $A \subseteq S$ . Por consiguiente, en virtud del teorema 31, para la función de rango  $r$  queda cumplida la propiedad principal

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B),$$

cualesquiera que sean  $A, B \subseteq S$ . Dicha propiedad generaliza la propiedad correspondiente de la función de dimensión de los subespacios lineales de un espacio proyectivo (donde tiene lugar la igualdad). Además,  $r(\emptyset) = 0$  y  $r(A) \leq r(A \cup \{p\}) \leq r(A) + 1$ , cualesquiera que sean  $A \subseteq S$  y  $p \in S$ . Si  $r(A) = |A|$ , donde  $|A|$  es la potencia del subconjunto  $A \subseteq S$ ,  $A$  será independiente (véase teorema 35). De lo contrario,  $r(A) < |A|$ , y  $A$  es dependiente. El conjunto  $A \subseteq S$  se denomina *generador* para la geometría  $G$ , si  $\bar{A} = S$ . Los conjuntos generadores independientes de una geometría se denominan *base*. Los conjuntos dependientes mínimos (por inclusión) de una geometría se llaman *ciclos*.

Los términos «conjuntos dependientes e independientes», «bases» y «conjuntos generadores» son bien conocidos del álgebra lineal. La denominación «ciclo» se ha tomado de la teoría de los grafos, en cuyos márgenes, según veremos, los ciclos de un matroide corresponden plenamente a los del grafo.

Demos ahora una serie de otras definiciones del matroide a través del rango, conjuntos independientes, bases y ciclos, respectivamente, y luego demostraremos la equivalencia de ellos.

Sea  $S$  un conjunto finito y sea  $r$  una función de números enteros sobre el conjunto  $\mathcal{P}(S)$ . Un par  $(S, r)$  se llama *matroide*  $M'(S, r)$ , y  $r(A)$ , rango de  $A \subseteq S$ , si para todos los  $A, B \subseteq S$  se cumplen las siguientes condiciones:

$$R1) 0 \leq r(A) \leq |A|;$$

$$R2), \text{ si } A \subseteq B, \text{ entonces } r(A) \leq r(B) \text{ (monotonía);}$$

$$R3) r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B) \text{ (semimodularidad).}$$

Sea  $S$  un conjunto finito y  $r$ , una función de números enteros sobre el conjunto  $\mathcal{P}(S)$ . Un par  $(S, r)$  se llama *matroide*  $M'(S, r)$ , y  $r(A)$ , rango de  $A \subseteq S$ , si para cualesquiera  $A \subseteq S$  y  $a, b \in S$  son lícitas las siguientes condiciones:

$$R4) r(\emptyset) = 0;$$

$$R5) r(A) \leq r(A \cup \{a\}) \leq r(A) + 1;$$

$$R6) \text{ si } r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\}), \text{ entonces } r(A \cup \{a, b\}) = r(A)$$

Sea  $(S, r)$  un matroide  $M(S, r)$  y  $S' = \{a \in S \mid r(\{a\}) = 0\}$ . Entonces,  $r(A) = r(A \setminus S')$  para todo  $A \subseteq S$ , y, por lo tanto,  $(S \setminus S', r)$  es un matroide que tiene, de hecho, la misma construcción que  $(S, r)$ . Para  $a, b \in S$  supongamos  $a \equiv b$ , cuando y sólo cuando  $r(\{a, b\}) = 1$ . En tal caso,  $\equiv$  es la relación de equivalencia, y si  $[a_1], \dots, [a_n]$  son clases contiguas, entonces  $r(\{[a_1] \cup \dots \cup [a_n]\}) = r(\{a_1, \dots, a_n\})$  no depende de cómo se eligen los representantes. Por consiguiente, podemos identificar los elementos correspondientes sin perder la generalidad de nuestros razonamientos. Suponiendo hecha tal identificación, pongamos para cualquier  $A \subseteq S$ :

$$\overline{A} = \{a \in S \mid r(A \cup \{a\}) = r(A)\}.$$

Obtenemos una geometría, con la particularidad de que su rango se determina por la definición de él sobre los conjuntos cerrados. Quiere decir que la construcción de un matroide puede determinarse partiendo del retículo de las superficies de la geometría asociada con el matroide citado.

Sea  $S$  un conjunto finito y sea  $F$  una familia no vacía de subconjuntos del conjunto  $S$ . Entonces, el par  $(S, F)$  se llama matroide  $M(S, F)$ , y los elementos de la familia  $F$ , conjuntos independientes  $M(S, F)$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

$$F1) \emptyset \in F;$$

$$F2) \text{ si } A \subseteq B, B \in F, \text{ entonces } A \in F;$$

F3) si  $A_1$  y  $A_2$  son subconjuntos independientes máximos del conjunto  $A$ , entonces  $|A_1| = |A_2|$ .

Cabe notar que el axioma  $F1)$  se deduce, de hecho, de  $F2)$ .

Sea  $S$  un conjunto finito y sea  $C$ , una familia de sus subconjuntos (ciclos) no vacíos. Entonces el par  $(S, C)$  se denomina matroide  $M(S, C)$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

C1) ninguno de los ciclos es un subconjunto propio de otro ciclo;

C2) si  $C_1$  y  $C_2$  son ciclos diferentes, y  $a \in C_1 \cap C_2$ , existe un ciclo  $C_3 \in C$ , tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$ .

Sea  $S$  un conjunto finito y sea  $B$  una familia de sus subconjuntos (bases) no vacíos. Entonces el par  $(S, B)$  se denomina matroide  $M(S, B)$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

B1) para todos los  $A, B_1 \subseteq S$ , si  $A \subseteq B_1$ ,  $A \neq B_1$  y  $B_1 \in B$ , entonces  $A \notin B$ ;

B2) para cualesquiera bases  $B_1$  y  $B_2$  y para todo  $a \in B_1$  existe  $b \in B_2$ , tal que  $(B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in B$ .

Dos matroides,  $(S_1, \overline{\quad})$  y  $(S_2, \overline{\quad})$  se llaman *isomorfos*, si existe tal aplicación biunívoca  $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ , que  $a \in A$  cuando y sólo cuando  $\varphi(a) \in \varphi(A)$ , donde  $A \subseteq S_1$ .

**Teorema 57.** Supongamos que  $(S, \overline{\quad})$  es un matroide sobre el conjunto finito  $S$ ;  $r$ , una función de rango; y  $F, C, B$ , familias de conjuntos independientes, de ciclos y de bases del matroide  $(S, \overline{\quad})$ , respectivamente. Entonces, en  $(S, \overline{\quad})$  se cumplen:

a) las condiciones  $R1)$ — $R6)$  de los matroides  $M(S, r)$  y  $M'(S, r)$ ;



- b) las condiciones  $F1)$ — $F3)$  del matroide  $M(S, F)$ ;  
 c) las condiciones  $C1)$  y  $C2)$  del matroide  $M(S, C)$ ;  
 d) las condiciones  $B1)$  y  $B2)$  del matroide  $M(S, B)$ ;  
 o bien, lo que es equivalente, cada matroide  $(S, \mathcal{F})$  es matroide  $M(S, r)$ ,  $M'(S, r)$ ,  $M(S, F)$ ,  $M(S, C)$  y  $M(S, B)$  simultáneamente.

*Demostración.* La validez de las condiciones  $R3)$ ,  $R4)$  y  $R5)$  en  $(S, \mathcal{F})$  ya quedó comprobada. Obtengamos las demás condiciones de las tres mencionadas, mediante una cadena de afirmaciones más sencillas.

1. Las condiciones  $R4)$  y  $R5)$  traen consigo  $R1)$  y  $R2)$ . Demostremos primero la siguiente afirmación.

**Lema 13.** Para todos los  $A, B \subseteq S$ , si  $A \subseteq B$ , entonces

$$0 \leq r(B) - r(A) \leq |B \setminus A|.$$

*Demostración del lema.* Si  $A = B$ , la afirmación del lema es evidente. Sea  $A \neq B$  y  $B \setminus A = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Entonces, en virtud de la propiedad  $R5)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r(A \cup \{a_1\}) - r(A) \leq 1; \\ 0 &\leq r(A \cup \{a_1, a_2\}) - r(A \cup \{a_1\}) \leq 1; \\ 0 &\leq r(A \cup \{a_1, a_2, a_3\}) - r(A \cup \{a_1, a_2\}) \leq 1; \\ 0 &\leq r(B) - r(B \setminus \{a_k\}) \leq 1. \end{aligned}$$

Sumemos todas estas desigualdades y obtengamos la desigualdad requerida:  $0 \leq r(B) - r(A) \leq |B \setminus A|$ . El lema está demostrado.

Directamente del lema se desprende la validez de la condición  $R2)$  y de la  $R1)$ , pero en el último caso es necesario sustituir en la desigualdad  $A = \emptyset$  y hacer uso de la propiedad  $R4)$ .

2. Las condiciones  $R2)$  y  $R3)$  traen consigo  $R6)$ . Sea  $r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\})$ , donde  $A \subseteq S$ ;  $a, b \in S$ . Se pide demostrar que  $r(A \cup \{a, b\}) = r(A)$ . Si  $a = b$ , la afirmación es evidente. Si  $a \neq b$ , entonces, en virtud de la condición de semimodularidad  $R3)$ , podemos escribir

$$2r(A) = r(A \cup \{a\}) + r(A \cup \{b\}) \geq r(A \cup \{a, b\}) + r(A),$$

de donde tenemos:  $r(A \cup \{a, b\}) \leq r(A)$ . Pero,  $A \subseteq A \cup \{a, b\}$ , y, en virtud de  $R2)$ :  $r(A) \leq r(A \cup \{a, b\})$ . Quiere decir que  $r(A \cup \{a, b\}) = r(A)$ . La implicación está demostrada y, de este modo, la comprobación de las condiciones del punto a) se da por terminado.

Comprobemos la validez en  $(S, \mathcal{F})$  de las condiciones  $F1)$ — $F3)$ . Evidentemente, la condición  $R4)$  trae consigo  $F1)$

3. La condición  $R5)$  trae consigo  $F2)$ . Demostremoslo por reducción al absurdo. Sea  $A \subseteq B$  y  $B \in \mathcal{F}$ , pero  $A$  es dependiente. Entonces,  $r(A) < |A|$ . En virtud del lema 13, tenemos

$$r(B) \leq r(A) + |B \setminus A| < |A| + |B \setminus A| = |B|.$$

Por consiguiente,  $B$  es dependiente y, por lo tanto,  $B \notin \mathcal{F}$ . Hemos llegado a una contradicción. Por eso,  $A \in \mathcal{F}$ , lo que se trataba de demostrar.

4. La condición R6) trae consigo la condición F3). Sea  $A, B \subseteq S$ . Directamente de R6) se desprende que si  $r(A \cup \{a\}) = r(A)$  para todo  $a \in B$ , entonces  $r(A \cup B) = r(A)$ . Aprovechemos este hecho para demostrar nuestra implicación. Sean  $A_1$  y  $A_2$  los subconjuntos independientes máximos del conjunto  $A$ . Es evidente que  $A_1 \not\subseteq A_2$ , es decir,  $A_1 \setminus A_2 \neq \emptyset$ . Más aún, para todo  $a \in (A_1 \setminus A_2)$  queda válida la igualdad  $r(A_2 \cup \{a\}) = r(A_2)$ . Por consiguiente,

$$r(A_1 \cup A_2) = r(A_2 \cup (A_1 \setminus A_2)) = r(A_2).$$

Análogamente,  $r(A_1 \cup A_2) = r(A_1)$ . De aquí,  $r(A_1) = r(A_2)$ , es decir,  $|A_1| = |A_2|$  y la validez de la condición F3) y, junto con ella, del punto b) queda establecida.

5. Las condiciones R1)—R3) traen las condiciones C1) y C2). Directamente de la definición del ciclo y de la condición de monotonía R2) obtenemos que un subconjunto  $A \subseteq S$  es un ciclo cuando y sólo cuando para todo elemento  $a \in A$  se verifica la igualdad

$$r(A \setminus \{a\}) = |A| - 1.$$

De aquí se deduce la validez de la condición C1), a saber, ningún ciclo es subconjunto propio de otro ciclo.

Luego, sean  $C_1$  y  $C_2$  unos ciclos arbitrarios de un matroide, tales que  $C_1 \neq C_2$  y  $a \in (C_1 \cap C_2)$ . Entonces,  $C_1 \cap C_2 \neq C_1$ , y por consiguiente,  $(C_1 \cap C_2) \in \mathcal{F}$ . En virtud de las condiciones de monotonía R2) y de semimodularidad R3), obtenemos

$$\begin{aligned} r((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}) &\leq r(C_1 \cup C_2) \leq r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) = \\ &= (|C_1| - 1) + (|C_2| - 1) - |C_1 \cap C_2| = \\ &= |C_1 \cup C_2| - 2 \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}|. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}) \notin \mathcal{F}$ . Por eso, existe tal ciclo  $C_3$  que  $C_3 \subseteq ((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\})$ . La validez de la condición C2) queda establecida.

6. Las condiciones F2) y F3) traen las condiciones B1) y B2). Sean  $B_1$  y  $B_2$  las bases de un matroide. Está claro que  $B_1$  y  $B_2 \in \mathcal{F}$ . Sea  $B_1 \subseteq B_2$ , pero  $B_1 \neq B_2$ . Entonces, en virtud de la condición F3), en  $B_2$  existe un elemento  $a \notin B_1$ , tal que  $B_1 \cup \{a\} \in \mathcal{F}$ . Esto contradice el hecho de que  $B_1$  es una base del matroide. Quiere decir que  $B_2 \not\subseteq B_1$ , y la validez de la condición B1) queda establecida.

Sea ahora  $a \in B_1$ . Es evidente que  $(B_1 \setminus \{a\}) \in \mathcal{F}$ . Se sabe que  $|B_1| = |B_2|$ . De aquí,  $|B_2| = |B_1 \setminus \{a\}| + 1$ . Debido a la condición F3), en  $B_2$  existe un elemento  $b \in (B_1 \setminus \{a\})$ , tal que  $((B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}) \in \mathcal{F}$ . Pero, por cuanto  $|(B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}| = |B_1| = |B_2|$ , entonces  $((B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}) \in \mathcal{B}$ , y, por tanto, la condición B2) se cumple. El teorema está demostrado.

Mostrando el teorema 57, hemos establecido, de hecho, la validez de las siguientes afirmaciones.

**Corolario 11.** Cada matroide  $M(S, r)$  es a la vez un matroide  $M(S, C)$ .

Cada matroide  $M'(S, r)$  es a la vez un matroide  $M(S, F)$  y un matroide  $M(S, B)$ . Cada matroide  $M(S, F)$  es un matroide  $M(S, B)$ .

Seguimos demostrando la equivalencia de las definiciones del matroide.

**Proposición 4.** Cada matroide  $M(S, r)$  es un matroide  $M'(S, r)$ .

*Demostración.* Ya hemos demostrado que las condiciones R2) y R3) traen consigo R6). La condición R4) se deduce obviamente de R1). Compruébese que las condiciones R2) y R3) traen consigo R5) y, de este modo, tendremos demostrada la sugestión. En efecto, si  $a \in A$ , entonces  $r(A \cup \{a\}) = r(A)$ . Si, en cambio,  $a \in (S \setminus A)$ , entonces, en virtud de las condiciones R2) y R3),

$$r(A) + 1 \geq r(A) + r(\{a\}) \geq r(A \cup \{a\}) + r(\emptyset) = r(A \cup \{a\}) \geq r(A).$$

Por consiguiente,  $r(A) \leq r(A \cup \{a\}) \leq r(A) + 1$  para todo  $A \subseteq S$  y todo  $a \in S$ , lo que se trataba de demostrar.

**Teorema 58.** Cada matroide  $M(S, F)$  es también un matroide  $(S, \bar{\quad})$  con la familia  $F$  de conjuntos independientes.

*Demostración.* Sea una familia  $F$  de conjuntos independientes que satisfacen los axiomas F1)–F3). Llamemos rango de  $A$  a la potencia total de los subconjuntos independientes máximos del conjunto  $A$  y denotémoslo con  $r(A)$ . Definamos la aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$ , al poner  $a \in \bar{A}$  cuando y sólo cuando  $a \in A$ , o bien cuando existe un subconjunto  $B \subseteq A$ , tal que  $B \in F$  y  $(B \cup \{a\}) \notin F$ . Demostremos que la aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$ , definida de este modo, es un operador de clausura con la propiedad de sustitución.

Las propiedades « $A \subseteq \bar{A}$ » y «si  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ » se cumplen evidentemente. Con el fin de demostrar la propiedad de idempotencia  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ , mostremos al principio que  $r(\bar{A}) = r(A)$  para todo  $A \subseteq S$ . Supongámonos lo contrario. Sea que existen los conjuntos  $A_1, A_2 \in F$ , tales que  $A_1 \subseteq A$ ,  $A_2 \subseteq \bar{A}$ , y  $|A_1| = r(A) < r(\bar{A}) = |A_2|$ . Entonces, en virtud de la condición F3), existe un elemento  $a \in A_2$  que satisface la condición  $A_1 \cup \{a\} \in F$ , con la particularidad de que  $a \in (\bar{A} \setminus A)$  porque el conjunto  $A_1$  es máximo. Elijamos un subconjunto máximo  $A' \subseteq A$ , tal que  $A' \in F$  y  $(A' \cup \{a\}) \notin F$ . En este caso,  $r(A) = |A'| < |A_1 \cup \{a\}|$ , de donde, en virtud de F3),  $(A' \cup \{a\}) \in F$ , lo que es imposible. Por consiguiente,  $r(\bar{A}) = r(A)$  para todo  $A \subseteq S$ .

Ahora, sea  $\bar{\bar{A}} \neq \bar{A}$ , o bien, lo que es equivalente,  $b \in (\bar{\bar{A}} \setminus \bar{A})$ . En este caso,  $(A_1 \cup \{b\}) \in F$  para todos los  $A_1 \in F$ ,  $A_1 \subseteq A$ , y obtenemos

$$r(\bar{\bar{A}}) \geq \max_{A_1 \in F, A_1 \subseteq A} |A_1 \cup \{b\}| = r(A) + 1 = r(\bar{A}) + 1,$$

lo que contradice el hecho que acabamos de demostrar. Así pues,  $\bar{\bar{A}} \setminus \bar{A} = \emptyset$ , y la idempotencia está establecida.

Nos resta mostrar que la aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$  satisface la propiedad de sustitución. Supongámonos que  $a, b \in S$ ,  $A \subseteq S$  y  $a \notin \bar{A}$ ,  $a \in (A \cup \{b\})$ . De la definición de clausura se deduce la existencia de tal conjunto  $A_1 \in F$ ,  $A_1 \subseteq (A \cup \{b\})$ , que  $(A_1 \cup \{a\}) \notin F$ . Por cuando  $a \notin \bar{A}$ , tenemos  $b \in A_1$  y  $A_2 = ((A_1 \setminus \{b\}) \cup \{a\}) \in F$ . De aquí,

$$A_2 \cup \{b\} = ((A_1 \setminus \{b\}) \cup \{a\}) \cup \{b\} = (A_1 \cup \{a\}) \notin F.$$

Por consiguiente, con arreglo a la definición de aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$ , tenemos  $b \in \bar{A} \cup \{a\}$ . De este modo, el axioma de sustitución queda demostrado.

Por fin, es obvio que  $A \in F$  cuando y sólo cuando  $a \notin \bar{A} \setminus \{a\}$  para todo  $a \in A$ , es decir, el matroide  $(S, \bar{\cdot})$  cuenta con una totalidad de conjuntos independientes, tal que coincide exactamente con la familia  $F$  del matroide  $M(S, F)$ . El teorema está demostrado.

Sea  $M(S, C)$  un matroide. Un subconjunto  $A \subseteq S$  se llama independiente, si no contiene ciclos. Denotemos con  $F$  una familia de conjuntos independientes del matroide  $M(S, C)$ . Está claro que  $C_1 \in C$  cuando y sólo cuando  $C_1 \notin F$  y si de  $A \subseteq C_1$  y  $A \neq C_1$  se deduce que  $A \in F$ .

**Proposición 5.** Supongamos que  $A \subseteq S$  y  $a \in S$ . Entonces, si  $A \in F$  y  $(A \cup \{a\}) \notin F$ , existe el único ciclo  $C_1$  del matroide, tal que  $C_1 \subseteq (A \cup \{a\})$ . Además, es obvio que  $a \in C_1$ .

*Demostración.* Supongamos que existen dos ciclos  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $C_1 \neq C_2$ ,  $a \in C_1 \subseteq (A \cup \{a\})$  y  $a \in C_2 \subseteq (A \cup \{a\})$ . Entonces, en virtud de la condición  $C2$ , existe un ciclo  $C_3$ , donde  $C_3 \subseteq ((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}) \subseteq A \in F$ , lo que es imposible. Por consiguiente, no existen tales dos ciclos y la proposición queda demostrada.

**Teorema 59.** El matroide  $M(S, C)$  es a la vez matroide  $M(S, F)$ .

*Demostración.* Es evidente que las condiciones  $F1$ ) y  $F2$ ) se cumplen. Comprobemos la condición  $F3$ ). Sean  $A_1$  y  $A_2$  subconjuntos independientes máximos diferentes de  $A$ . Entonces,  $A_1 \setminus A_2 = \emptyset$ , y  $A_2 \setminus A_1 = \emptyset$ . Supongamos  $a \in (A_2 \setminus A_1)$ . Entonces,  $(A_1 \cup \{a\}) \notin F$ , y, por lo tanto, existe un ciclo  $C_1$  tal que  $a \in C_1 \subseteq (A_1 \cup \{a\})$ . Más aún,  $C_1 \cap (A_1 \setminus A_2) \neq \emptyset$ , de lo contrario  $C_1 \subseteq A_2$ . Supongamos que  $b \in (C_1 \cap (A_1 \setminus A_2))$  y  $A_3 = (A_1 \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ . Observemos que  $|A_3| = |A_1|$ .

Demostremos ahora que  $A_3 \in F$ . Efectivamente, es obvio que  $(A_1 \setminus \{b\}) \in F$ . Supongamos que  $A_3 \notin F$ . En este caso existe un ciclo  $C_2$ , tal que  $a \in C_2 \subseteq A_3 \subseteq (A_1 \cup \{a\})$ . Además,  $C_2 \neq C_1$ , puesto que  $b \notin C_2$ . Hemos llegado a la contradicción con la condición. Quiere decir que  $A_3 \in F$ .

El conjunto  $A_3$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $A$ . Demostremoslo. Supongamos que  $A'$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $A$ , tal que  $A_3 \subseteq A'$ , y  $|A_3| < |A'|$ . El elemento  $b \notin A'$ , pues de lo contrario sería  $A_1 \subseteq A'$  y  $|A_1| < |A'|$ . Entonces,  $(A' \cup \{b\}) \notin F$ . Por consiguiente, existe un ciclo  $C'$  tal que  $b \in C' \subseteq (A' \cup \{b\})$  y, más aún,  $C' \cap (A' \setminus A_1) \neq \emptyset$ , puesto que de lo contrario  $C' \subseteq A_1$ . Sea  $c \in (C' \cap (A' \setminus A_1))$ . Entonces,  $((A' \setminus \{c\}) \cup \{b\}) \in F$ . Esto se establece por reducción al absurdo, al igual que hemos demostrado que  $A_3 \in F$ . Pero,  $A_1 \subseteq ((A' \setminus \{c\}) \cup \{b\})$  y  $|A_1| < |(A' \setminus \{c\}) \cup \{b\}| = |A'|$ ; hemos llegado a una contradicción. Por consiguiente,  $A_3$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $A$ .

Así pues,  $A_3$  y  $A_2$  son subconjuntos independientes máximos del con-

junto  $A$ . Si  $A_3 = A_2$ , entonces  $|A_1| = |A_2|$ . Si  $A_3 \neq A_2$ , observaremos que  $|A_3 \Delta A_2| < |A_1 \Delta A_2|$ , donde  $A \Delta B$  es la diferencia simétrica de los conjuntos.

Al repetir de manera análoga a  $A_3$  el proceso de construcción de los conjuntos independientes  $A_n$  ( $|A_n| = |A_1|$ ), ( $A_n \Delta A_2 < |A_{n-1} \Delta A_2|$ ;  $n = 4, 5, \dots$ ), llegaremos, tras un número finito de pasos, a un subconjunto independiente máximo  $A_n$  del conjunto  $A$ , tal que  $A_n = A_2$ , y, por consiguiente, demostraremos que  $|A_1| = |A_2|$ . El teorema está demostrado.

Sea  $M(S, B)$  un matroide. Un subconjunto  $A \subseteq S$  se llama *independiente*, si existe una base  $B_1$ , tal que  $A \subseteq B_1$ . Denotemos con  $F$  una familia de conjuntos independientes del matroide  $M(S, B)$ . Evidente que las bases del matroide  $M(S, B)$  son conjuntos independientes máximos del matroide  $M(S, B)$ .

**Proposición 6.** Para cualesquiera bases  $B_1$  y  $B_2$  del matroide  $M(S, B)$  se verifica la igualdad  $|B_1| = |B_2|$ .

*Demostración.* Supongamos que  $B_1 \neq B_2$ . En tal caso  $B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$ , y  $B_2 \setminus B_1 \neq \emptyset$ , en virtud del axioma B1). Sea  $a \in (B_1 \setminus B_2)$ . Entonces, según el axioma B2), existe un elemento  $b \in (B_2 \setminus B_1)$ , tal que  $B_3 = ((B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}) \in B$ . Observemos que  $|B_3| = |B_1|$ . Si  $B_3 \subseteq B_2$ , entonces  $B_3 = B_2$  respecto del axioma B1). Si  $B_3 \not\subseteq B_2$ , observaremos  $|B_3 \Delta B_2| < |B_1 \Delta B_2|$ . Repitiendo el proceso de construcción de las bases, igual que se hizo más arriba, llegaremos, tras un número finito de pasos, a una base  $B_n$ , tal que  $B_n \subseteq B_2$ , es decir,  $B_n = B_2$ , y, por consiguiente, obtendremos  $|B_1| = |B_2|$ .

**Teorema 60.** Cada matroide  $M(S, B)$  es un matroide  $M(S, F)$ .

*Demostración.* Es evidente que las condiciones F1) y F2) se cumplen. Demostremos la validez de la condición F3). Sean  $A_1$  y  $A_2$  subconjuntos independientes máximos diferentes del conjunto  $A$ . Entonces, existe una base  $B_i$  tal que  $A_i = B_i \cap A$ , donde  $i = 1, 2$ . Supongamos que  $|A_1| < |A_2|$ . Observemos que  $(B_1 \setminus B_2) \cap A = \emptyset$ . En efecto, supongamos que esto no es así y  $B_1 \subseteq A \cup B_2$ . Entonces,  $|A_2 \setminus A_1| = |(B_2 \setminus B_1) \cap A| \leq |B_2 \setminus B_1| = |B_1 \setminus B_2| =$  (en virtud de la proposición 6)  $= |(B_1 \setminus B_2) \cap A| = |A_1 \setminus A_2|$ , lo que contradice la suposición de que  $|A_1| < |A_2|$ . Quiere decir que  $(B_1 \setminus B_2) \cap A = \emptyset$ . Ahora hagamos uso de la condición B2), sustituyendo por turno cada elemento de  $(B_1 \setminus B_2) \cap A$  por los elementos de  $B_2 \setminus B_1$ , y, de este modo, determinando la base  $B'$ , donde  $A_1 \subseteq B' \cap A$ , y,  $B' \cap (A_2 \setminus A_1) \neq \emptyset$ . Si  $|A_1| < |A_2|$ , entonces  $|(B_1 \setminus B_2) \cap A| = |A_1 \setminus A_2| < |A_2 \setminus A_1| = |(B_2 \setminus B_1) \cap A|$ , de donde obtenemos:  $|(B_1 \setminus B_2) \setminus A| > |(B_2 \setminus B_1) \setminus A|$ . Por consiguiente,  $A_1 \neq B' \cap A$ . Pero, esto contradice el hecho de que  $A_1$  es un conjunto independiente máximo del conjunto  $A$ . Por consiguiente,  $|A_1| = |A_2|$ , y el teorema está demostrado.

Con el teorema 60 se finaliza la demostración de equivalencia de las definiciones del matroide.

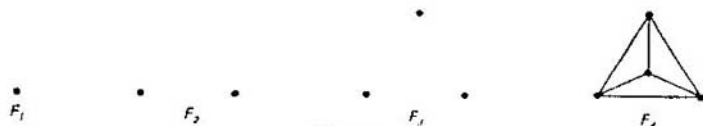


Fig.8.33.

En el § 6.3 se han aducido ejemplos de los matroides como sistemas de conjuntos sobre los cuales se resuelven correctamente, con ayuda del algoritmo «avido», los problemas de optimización combinatoria. Veamos otros ejemplos de los matroides. La comprobación del cumplimiento de los axiomas del matroide se omitirá a menudo en la exposición que sigue, quedándose ello a cargo del lector.

*Ejemplos de los matroides.* 1. *Matroides libres.* Un matroide sin ciclos sobre el  $n$ -conjunto  $S$  se denomina *libre* y se denota  $F_n$ . Es obvio que el matroide libre es un matroide en el cual cada conjunto está cerrado. Es fácil ver que el retículo de superficies del matroide libre  $F_n$  es isomorfo al retículo de todos los subconjuntos del  $n$ -conjunto. En la fig. 8.33 están expuestos los matroides libres  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ .

2. *Matroides homogéneos.* Un matroide sobre el  $n$ -conjunto  $S$ , de cuyas bases sirven todos los  $k$ -subconjuntos y de ciclos, todos los  $(k+1)$ -subconjuntos, recibe el nombre de matroide *homogéneo* y se designa  $U_k(n)$ .

3.  *$n$ -particiones del conjunto.* Llamemos  *$n$ -partición* tal recubrimiento de un conjunto, donde cada subconjunto de  $n$  elementos está contenido en uno y sólo un subconjunto que integra el recubrimiento. A toda  $n$ -partición le corresponde un matroide, en el cual serán conjuntos cerrados:

- todos los subconjuntos que se componen no menos que de  $n$  elementos;
- todos los miembros del recubrimiento;
- el propio conjunto.

Para un subconjunto arbitrario  $A \subseteq S$  la clausura  $\bar{A}$  se define aquí del modo siguiente:

$$\bar{A} = \begin{cases} A, & \text{si } A \text{ contiene menos de } n \text{ elementos;} \\ B, & \text{si } A \text{ contiene no menos de } n \text{ elementos, y } A \text{ está} \\ & \text{contenido en el miembro del recubrimiento } B; \\ S, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

4. *Geometría de Wille de orden  $n$ .* Supongamos que un conjunto de puntos  $S$  satisface, junto con los conjuntos de los subconjuntos  $K$  y  $F$  (de curvas y de superficies, respectivamente) las condiciones:

- cualesquiera  $n+1$  puntos distintos yacen en la única curva, y cada curva contiene no menos de  $n+1$  puntos distintos;
- cualesquiera  $n+2$  puntos distintos, que no están situados en una misma curva, yacen en la única superficie, y cada superficie contiene por lo menos  $n+2$  puntos distintos que no están en una misma curva;

c) junto con cualesquiera  $n + 1$  puntos distintos pertenece también a la superficie toda la curva definida por los puntos;

d) si dos superficies están situadas en la clausura de un subconjunto  $S$  de  $(n + 3)$  elementos, la intersección de dichas superficies contiene por lo menos  $n + 1$  puntos distintos.

La geometría dada se denomina *geometría de Wille* de orden  $n$ . El subconjunto  $A \subseteq S$  está cerrado en esta geometría, si y sólo si contiene todas las curvas y todas las superficies que pasan por sus puntos. La relación de clausura sobre  $S$  en esta geometría se define como  $A \rightarrow \bar{A}$ , donde  $\bar{A}$  es la intersección de todos los subconjuntos cerrados que contienen  $A$ .

Si  $n = 1$ , la geometría de Wille representa la geometría proyectiva clásica.

5. *Matroides lineales*. Sea  $S$  un subconjunto finito del espacio vectorial  $V$ . Supongamos que el conjunto de vectores  $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq S$  pertenece a  $F$  cuando y sólo cuando los vectores  $a_1, \dots, a_k$  son linealmente independientes en  $V$ . En este caso se comprueba con facilidad que  $F$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide  $M$ . La función de rango  $r$  de este matroide coincide con la dimensión del subespacio tendido sobre dichos vectores. Todo matroide isomorfo al matroide descrito  $M$  se denomina *lineal*.

6. *Matroides algebraicos*. Sea  $F$  un campo, y  $K$ , su ampliación. Diremos que el conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  de elementos de  $K$  es algebraicamente dependiente, si los elementos  $a_1, a_2, \dots, a_k$  satisfacen la ecuación polinomial de la forma  $f(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$ , donde los coeficientes de  $f$  son elementos del campo  $F$ . En el caso contrario,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  son algebraicamente independientes sobre el campo  $F$ .

**Proposición 7.** Sea  $S$  un subconjunto finito de ampliación del campo  $F$ ; el subconjunto  $A \subseteq S$  pertenece a  $F$  cuando y sólo cuando los elementos del conjunto  $A$  son algebraicamente independientes sobre el campo  $F$ . En este caso  $F$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide sobre el conjunto  $S$ .

La demostración de este resultado no ofrece grandes dificultades, por lo cual se omite aquí.

7. *Matroides cíclicos de los grafos*. Sea  $G = (X, S)$  un grafo no orientado sin lazos, con un conjunto de vértices  $X$  y un conjunto de aristas  $S$ . Definamos ahora sobre el conjunto  $S$  un matroide  $M(G)$  llamado de *arista (poligonal o cíclico)* del grafo  $G$  del modo siguiente. Si  $a, b \in X$  y  $A \subseteq S$ , entonces la arista  $(a, b) \in \bar{A}$ , si y sólo si los vértices  $a$  y  $b$  son  $A$ -conexos, es decir, si existe tal sucesión de aristas  $(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)$  del conjunto  $A$ , que  $a_0 = a$ , y  $a_n = b$ .

**Teorema 61.** El par  $(S, \bar{\quad})$ , donde  $S$  es un conjunto de aristas del grafo  $G = (X, S)$ , es un matroide.

*Demostración.* Todas las propiedades del matroide son evidentes, salvo, quizás, la de sustitución. Supongamos que los vértices  $a$  y  $b$  son  $A$ -conexos.

Entonces, existe una sucesión conexiva de aristas  $(a_0, a_1), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ , para la cual el número  $n$  es mínimo. Afirmamos que no hay arista que se encuentre dos veces en esta sucesión. En efecto, sea  $0 \leq i < j \leq n-1$ , y  $(a_i, a_{i+1}) = (a_j, a_{j+1})$ . Ahora, si  $a_i = a_j$ , y  $a_{i+1} = a_j$ , entonces, suprimiendo las aristas  $(a_{i+1}, a_{i+2}), \dots, (a_j, a_{j+1})$  en la sucesión, obtenemos una sucesión conexiva más corta. Si  $a_i = a_{j+1}$ , y  $a_{i+1} = a_j$ , podemos suprimir todas las aristas  $(a_i, a_{i+1}), \dots, (a_j, a_{j+1})$ . Demostremos ahora la propiedad de sustitución para el operador de clausura. Sea  $p \in \overline{AU}\{q\}$ , donde  $p = (a, b)$  y  $q = (c, d)$ . Supongamos que  $s_0, \dots, s_{n-1} \in \overline{AU}\{q\}$  es la sucesión más corta de aristas que une  $a$  y  $b$ . Por cuanto  $p \notin \overline{AU}\{q\}$ , entonces, una de las aristas  $s_0, \dots, s_{n-1}$  ha de coincidir con  $q$ . De conformidad con la observación hecha más arriba, sólo una de las aristas  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ , digamos,  $s_i$ , es igual a la arista  $q$ . Mas, en este caso, la sucesión  $s_{i+1}, \dots, s_{n-1}, q, s_0, \dots, s_{i-1}$  unirá los vértices  $c$  y  $d$ . De aquí,  $q \in \overline{AU}\{p\}$ . El teorema está demostrado.

Un matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  se llama *gráfico*, si es isomorfo al matroide cíclico de algún grafo.

**Proposición 8.** Sea  $M(G)$  un matroide cíclico del grafo  $G = (X, S)$ . Resultan válidas las siguientes afirmaciones:

a) el subconjunto de aristas  $A \subseteq S$  es un conjunto independiente del matroide  $M(G)$  cuando y sólo cuando el subgrafo de esqueleto  $G = (X, A)$  es un bosque;

b) el subconjunto  $B \subseteq S$  es una base del matroide  $M(G)$  cuando, y sólo cuando el subgrafo de esqueleto  $G = (X, A)$  es un bosque con el mismo número del componente conexo que tiene el grafo  $G = (X, S)$ ;

c) el subconjunto  $C \subseteq S$  es un ciclo del matroide  $M(G)$  cuando y sólo cuando  $C$  es un conjunto de aristas del ciclo simple en el grafo  $G = (X, S)$ ;

d)  $r(A) = |X| - k(A)$ , donde  $k(A)$  es el número de componente conexo en el grafo de esqueleto  $G = (X, A)$ .

*Demostración.* El conjunto de aristas  $A$  de cualquier bosque es un conjunto independiente en  $M(G)$ , puesto que la supresión de cualquier arista  $s \in A$  divide el componente conexo, que contiene  $s$ , en dos partes, es decir,  $s \in A \setminus \{s\}$ . Por otro lado, si el subgrafo  $G = (X, A)$  contiene un ciclo  $\{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ , entonces, por definición de la clausura,  $s_0 \in \overline{AU}\{s_1, \dots, s_k\}$ ; de aquí se deduce que  $A$  es el conjunto dependiente. Esto demuestra las afirmaciones a), b) y c). Más aún, este hecho demuestra que el rango del conjunto  $A$  es igual al número de aristas en el bosque de esqueleto del subgrafo  $G = (X, A)$ , con el número del componente conexo igual al número del componente conexo del subgrafo  $G = (X, A)$ . En cada bosque el número de aristas es en una unidad inferior al número de vértices. Por consiguiente, si  $X_1, \dots, X_{k(A)}$  es un conjunto de vértices del componente conexo del subgrafo  $G = (X, A)$ , entonces

$$r(A) = \sum_{i=1}^{k(A)} (|X_i| - 1) = |X| - k(A).$$



La demostración de la proposición queda establecida.

8. *Grupos abelianos sin torsión.* Recordemos que si todos los elementos del grupo  $A$ , salvo el cero, tienen un orden infinito,  $A$  se denomina *grupo sin torsión*. Sea  $A$  un grupo abeliano sin torsión. Diremos que un elemento  $a \in A$  es dependiente en el conjunto  $B \subseteq A$ , si  $a$  pertenece a un subgrupo del grupo  $A$  generado por el conjunto  $B$ . Un subconjunto  $C \subseteq A$  es independiente, si ningún elemento  $a$  de  $C$  es dependiente sobre  $C \setminus \{a\}$ . Entonces, si  $B$  es un subconjunto finito del grupo abeliano  $A$  sin torsión, los subconjuntos independientes del conjunto  $B$  forman un matroide  $M$ . Los conjuntos cerrados del matroide  $M$  son todos los subgrupos  $H$  del grupo  $A$ , para los cuales el factor-grupo  $A/H$  es un grupo sin torsión.

9. *Matroides transversales.* Sean los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Recordemos que un subconjunto  $A \subseteq S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  se llama transversal parcial, si existe una aplicación biunívoca  $\varphi: A \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $a \in A_{\varphi(a)}$  para todo  $a \in A$ . Sea  $F$  una familia de todas las transversales parciales del conjunto  $S$ . Entonces, el par  $(S, F)$  forma un matroide sobre el conjunto  $S$ . De aquí se deduce directamente, por ejemplo, que todas las transversales parciales máximas son de igual potencia.

Introducidos los entes matemáticos, se despierta interés, comúnmente, por los métodos constructivos, es decir, cómo se pueden construir entes nuevos sobre los dados. Pasemos a la exposición de las principales construcciones de este tipo.

Sea  $(S, \bar{\cdot})$  un matroide sobre un conjunto finito  $S$  y  $A, B \subseteq S$ . Definamos para todo  $C \subseteq B \setminus A$  una aplicación

$$I_{[A, B]}: C \rightarrow \overline{(C \cup A \cap B)} \setminus A.$$

**Proposición 9.** La aplicación  $I_{[A, B]}$  es un operador de clausura sobre el conjunto  $B \setminus A$ .

*Demostración.* Es evidente que  $C \subseteq I_{[A, B]}(C)$  y que de  $C \subseteq D$  proviene  $I_{[A, B]}(C) \subseteq I_{[A, B]}(D)$  para todos los  $C, D \subseteq (B \setminus A)$ . Queda por demostrar la idempotencia:  $I_{[A, B]}(I_{[A, B]}(C)) = I_{[A, B]}(C)$  para cualquier  $C \subseteq (B \setminus A)$ . Efectivamente,

$$\begin{aligned} I_{[A, B]}I_{[A, B]}(C) &= \overline{\overline{[(C \cup A \cap B) \setminus A] \cup A \cap B} \setminus A} = \\ &= \overline{[(C \cup A \cap B) \cup A \cap B] \setminus A} = \overline{[(C \cup A \cup A) \cap (B \cup A) \cap B] \setminus A} = \\ &= \overline{(C \cup A) \cap (B \cup A)} \cap B \setminus A. \end{aligned}$$

De la relación  $\overline{(C \cup A) \cap (B \cup A)} \subseteq \overline{C \cup A}$  se desprende que

$$\overline{(C \cup A) \cap (B \cup A)} \subseteq \overline{C \cup A} = \overline{C \cup A}.$$

De aquí,  $\overline{(C \cup A) \cap (B \cup A)} \cap B \subseteq \overline{C \cup A} \cap B$ . Por consiguiente,

$$\overline{(C \cup A) \cap (B \cup A)} \cap B \setminus A \subseteq \overline{(C \cup A) \cap B} \setminus A = I_{[A, B]}(C),$$

es decir, tenemos:  $I_{[A, B]}(I_{[A, B]}(C)) \subseteq I_{[A, B]}(C)$ . Pero,  $I_{[A, B]}(I_{[A, B]}(C)) \supseteq I_{[A, B]}(C)$ . De aquí,  $I_{[A, B]}(I_{[A, B]}(C)) = I_{[A, B]}(C)$ , lo que se trataba de demostrar.

**Proposición 10.** Sea  $M = (S, \bar{\quad})$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$  y supongamos que  $B \subseteq S$ . Entonces, el conjunto  $B$  forma, junto con la aplicación  $I_B: C \rightarrow \overline{C \cap B}$  definida para todo  $C \subseteq B$ , el matroide  $(B, I_B)$ .

*Demostración.* Si en el operador de clausura  $I_{\{A, B\}}(C)$  de la proposición 9 ponemos  $A = \emptyset$ , obtendremos:  $I_B(C) = I_{\{\emptyset, B\}}(C) = \overline{C \cap B}$ . Quiere decir que la aplicación  $C \rightarrow I_B(C)$  es el operador de clausura. Evidentemente, la propiedad de sustitución también tiene lugar. En efecto, sea  $a \in I_B(C \cup \{b\})$ ,  $a \notin I_B(C)$ . En este caso,  $a \in \overline{C \cup \{b\} \cap B}$ , pero  $a \notin \overline{C \cap B}$ . Por consiguiente,  $a \in C \cup \{b\}$ , pero  $a \notin C$ . De aquí, por la propiedad de sustitución para el matroide  $M$  tenemos:  $b \in \overline{C \cup \{a\}}$ . Por lo tanto,  $b \in \overline{C \cup \{a\}} \cap B$ , puesto que  $a, b \in B$ . La proposición está demostrada.

Denotemos con  $M|B$  el matroide  $(B, I_B)$  y llamémoslo submatroide del matroide  $M$ . Evidentemente, si  $F$  es una familia de todos los conjuntos independientes del matroide  $M$ , entonces  $\{A|A \subseteq B, A \in F\}$  es una familia de conjuntos independientes del submatroide  $M|B$ . Además, el retículo  $L(B)$  de superficies del submatroide  $M|B$  del matroide  $M$  se obtiene a partir del retículo  $L(S)$  de superficies del matroide  $M$ , al formar en el interior de  $L(S)$  los supremos de todos los subconjuntos del conjunto  $B$  que se considera como conjunto de átomos en  $L(S)$ . En este caso, los supremos en  $L(B)$  y en  $L(S)$  coinciden, lo que no siempre tiene lugar para los ínfimos. En particular, si  $B$  es una superficie del matroide  $M$ , el retículo  $L(B)$  es isomorfo al intervalo  $[0, B]$  en  $L(S)$ .

**Proposición 11.** Sea  $M = (S, \bar{\quad})$  un matroide y sea que  $A \subseteq S$ . El conjunto  $S \setminus A$ , dotado para todo  $C \subseteq S \setminus A$  de una aplicación

$$I_{M/A}: C \rightarrow \overline{C \cup A \setminus A},$$

forma el matroide  $(S \setminus A, I_{M/A})$ .

*Demostración.* Si en el operador de clausura  $I_{\{A, B\}}(C)$  de proposición 9 ponemos  $B = S$ , obtendremos:  $I_{M/A}(C) = I_{\{A, S\}}(C) = \overline{C \cup A \setminus A}$ . Quiere decir que  $C \rightarrow I_{M/A}(C)$  es un operador de clausura. Queda por comprobar la propiedad de sustitución, es decir, que para cualesquiera  $a, b \in (S \setminus A)$  y para todo  $C \subseteq (S \setminus A)$  de  $a \in I_{M/A}(C \cup \{b\})$ ,  $a \notin I_{M/A}(C)$  se deduce:  $b \in I_{M/A}(C \cup \{a\})$ . En efecto, sea  $a \in \overline{C \cup \{b\} \cup A \setminus A}$ ,  $a \notin \overline{C \cup A \setminus A}$ . Es evidente que  $a, b \notin A$ . De aquí,  $a \in \overline{C \cup A \cup \{b\}}$ ,  $a \notin \overline{C \cup A}$ . En virtud de la propiedad de sustitución, para el matroide  $M$  tenemos:  $b \in \overline{C \cup A \cup \{a\}}$ . Pero,  $b \notin A$ . Por consiguiente,  $b \in \overline{C \cup A \cup \{a\}} \setminus A = I_{M/A}(C \cup \{a\})$ , lo que se trataba de demostrar.

Denotemos con  $M/A$  el matroide  $(S \setminus A, I_{M/A})$  y llamémoslo contracción del matroide  $M$  por medio del matroide  $A$ . Observemos que si  $L(S \setminus A)$  es un retículo de superficies del matroide  $M/A$ , entonces él será isomorfo al intervalo  $[\bar{A}, 1]$  en el retículo de superficies del matroide  $M = (S, \bar{\quad})$ .

Designemos con  $M.A$  la contracción del matroide  $M = (S, \bar{\quad})$  por medio del conjunto  $S \setminus A$ . Está claro que si  $F$  es una familia de conjuntos inde-

pendientes del matroide  $M$ , entonces la familia de subconjuntos  $B \subseteq A$ , para los cuales en  $M$  existen subconjuntos independientes máximos  $C$  de  $S \setminus A$ , donde  $(B \cup C) \in \mathcal{F}$ , es exactamente la familia de conjuntos independientes de contracción  $M/A$ .

Proponemos que el lector demuestre, a título de ejercicios no complejos, las siguientes dos proposiciones.

**Proposición 12.** Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ ;  $M|B$ , su submatroide, y  $r, r_B$ , las funciones de rango para  $M$  y  $M|B$ , respectivamente. Entonces, para todo  $A \subseteq B$  serán lícitas las siguientes afirmaciones:

- $A$  es independiente en  $M|B$ , cuando y sólo cuando  $A$  es independiente en  $M$ ;
- $A$  es una base del matroide  $M|B$ , si y sólo si  $A$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $B$  en  $M$ ;
- $A$  es un ciclo en  $M|B$ , si y sólo si  $A$  es un ciclo en  $M$ ;
- $r_B = r(A)$ .

**Proposición 13.** Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ ;  $M/A$ , su contracción por medio del conjunto  $A$ , y  $r, r_{S \setminus A}$ , funciones de rango para  $M$  y  $M/A$ , respectivamente. En este caso para todos los  $B \subseteq S \setminus A$  son lícitas las siguientes afirmaciones:

- $B$  es independiente en  $M/A$ , si y sólo si  $B \cup C$  es independiente en  $M$  para todos los subconjuntos independientes  $C \subseteq A$ ;
- $B$  es una base del matroide  $M/A$ , si y sólo si  $B \cup C$  es la base del matroide  $M = (S, \bar{\quad})$  para todos los subconjuntos independientes máximos  $C$  del conjunto  $A$ ;
- $B$  es un ciclo en  $M/A$ , si y sólo si  $B = C \setminus A = \emptyset$ , donde  $C$  es un ciclo en  $M$ , y  $B$  es un conjunto mínimo con tal propiedad;
- $r_{S \setminus A}(B) = r(B \cup A) - r(A)$ .

Supongamos que  $(S, \bar{\quad})$  es un matroide y  $A, B \in S$ . El par  $(S, I_{(A, m)})$  se denomina *menor del matroide*  $(S, \bar{\quad})$ . El fácil ver que cada menor del matroide es, a su vez, un matroide, puesto que puede obtenerse como submatroide de contracción del matroide, o bien, lo que es equivalente, como contracción de un submatroide del matroide.

Sea  $M = (S, \bar{\quad})$  un matroide. El submatroide  $M|(S \setminus \{a\})$ , donde  $a \in S$ , se denota a menudo, para la comodidad con  $M - a$ , y se dice que dicho submatroide se ha obtenido a partir del matroide  $M$  por exclusión del elemento  $a$ . Por analogía, un submatroide  $M|(S \setminus A)$  del matroide  $M = (S, \bar{\quad})$  se denota con  $M - A$ . Es natural, en este caso, llamar menor del matroide a una sucesión arbitraria de contracciones y exclusiones del matroide.

**Proposición 14.** Sea  $(S, \bar{\quad})$  un matroide en el conjunto finito  $S$ , y  $A, B \subseteq S$ . Si  $A$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $B$ , entonces,  $\overline{A} = \overline{B}$ .

*Demostración.* Si  $A = B$ , la afirmación es obvia. Supongamos que  $A \neq B$ , es decir, que  $A \subset B$ . En virtud de las propiedades del operador de clausura,  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ . Sea, ahora,  $a \in (B \setminus A)$ . Entonces,  $(A \cup \{a\}) \notin \mathcal{F}$ . Por consi-

guiente, existe un elemento  $b \in (A \cup \{a\})$ , tal que  $b \in \overline{A \cup \{a\} \setminus \{b\}}$ . Si  $a = b$ , tenemos  $a \in A$ . En cambio, si  $a \neq b$ , entonces  $b \in A$  y  $b \notin \overline{A \setminus \{b\}}$ , puesto que  $A \in F$ . Por eso,  $b \notin \overline{A \setminus \{b\}}$  y  $b \in (A \cup \{a\}) \setminus \{b\}$ . De aquí, conforme a la propiedad de sustitución, tenemos otra vez  $a \in A$ . De este modo,  $B \subseteq A$ , y, por consiguiente,  $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ . Quiere decir que  $\overline{A} = \overline{B}$ , y la proposición queda demostrada.

Inmediatamente de la proposición 14 se deduce que cada base de un matroide es, a la vez, un conjunto independiente máximo y un conjunto generador mínimo. Precisamente esta correlación sirvió de fuente para la introducción de la noción de matroide dual. La idea de dualidad es uno de los instrumentos más potentes en la teoría de los matroides y tiene importantes aplicaciones en muchas ramas del análisis combinatorio, en particular, en la teoría de los grafos.

**Teorema 62.** Supongamos que  $M = (S, \overline{\quad})$  es un matroide en el conjunto finito  $S$ ,  $B$  es la familia de sus bases y  $B^* = \{A_i \subseteq S \mid A_i = S \setminus B_i, \text{ donde } B_i \in B\}$ , es decir,  $B^*$  es una familia de complementos de las bases del matroide  $M$  en  $S$ . Entonces, un par  $(S, B^*)$  satisface los axiomas  $B1)$  y  $B2)$  y es, por lo tanto, el matroide  $M^* = M(S, B^*)$ .

El matroide  $M^*$  se llama *dual* respecto del matroide  $M$ , y los elementos de la familia  $B^*$  se denominan *cobases* del matroide  $M$ .

*Demostración.* En el matroide  $M = (S, \overline{\quad})$ , para cualquier  $A \subseteq S$  y para todo  $B_1 \in B$  tiene lugar la siguiente implicación: si  $B_1 \subseteq A$  y  $B_1 \neq A$ , entonces  $A \notin B$ , o bien, lo que es equivalente, para cualquier  $A_1 \subseteq S$  y para todo  $A_2 \in B^*$ , si  $A_1 \subseteq A_2$  y  $A_1 \neq A_2$ , tenemos:  $A_1 \notin B^*$ . Así pues, el par  $(S, B^*)$  satisface el axioma  $B1)$ .

Supongamos ahora que  $A_1, A_2 \in B^*$ ,  $A_1 \neq A_2$ , y  $a \in (A_1 \setminus A_2)$ . Demostremos que en este caso existe un elemento  $b \in A_2$ , tal que  $((A_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}) \in B^*$ . De este modo se establecerá la validez del axioma  $B2)$ . Por cuanto  $a \notin (S \setminus A_1) \in B$  y  $a \in (A_1 \setminus A_2)$ , entonces, en virtud de la sugestión 5, existe el único ciclo  $C_1$  del matroide  $M$ , tal que  $a \in C_1 \subseteq ((S \setminus A_1) \cup \{a\})$ . Es evidente que  $C_1 \subseteq (S \setminus A_2)$ , puesto que  $(S \setminus A_2) \in B$ . Elijamos  $b \in (C_1 \setminus (S \setminus A_2))$ , entonces, evidentemente,  $b \in (A_2 \cap (S \setminus A_1))$ . Comprobemos que  $D = ((S \setminus A_1) \setminus \{b\}) \cup \{a\}$  es la base del matroide  $M$ . En efecto, sea  $D$  dependiente. Existe, pues, un ciclo  $C_2$  tal que  $C_2 \subseteq D$  y  $a \in C_2$ . En virtud de la proposición 5, tenemos  $C_1 = C_2$ . Mas, esto es imposible, puesto que  $b \in C_1$  y  $b \notin C_2$ . Esto significa que el conjunto  $D$  es independiente. Además,  $|D| = |S \setminus A_1|$ , y  $(S \setminus A_1) \in B$ . Por consiguiente,  $D \in B$ . De aquí,  $(S \setminus D) \in B^*$ . Pero,  $S \setminus D = (A_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ , lo que se trataba de demostrar.

**Teorema 63.** Sea  $M$  un matroide en el conjunto finito  $S$ ,  $A \subseteq S$ , y sea  $M^*$  un matroide dual respecto de  $M$ . Resultan válidas las siguientes afirmaciones:

a)  $A$  es un conjunto independiente del matroide  $M^*$  cuando y sólo cuando  $S \setminus A$  es un conjunto generador del matroide  $M$ ;

b)  $r^*(A) = |A| - r(S) + r(S \setminus A)$ , donde  $r^*$  es una función de rango del matroide  $M^*$ ; en particular,  $r(S) + r^*(S) = |S|$ ;

c)  $M^{**} = M$ .

*Demostración.* a) En virtud del teorema 62, el conjunto  $A$  es independiente en  $M^*$  cuando y sólo cuando,  $A$  contiene la base del matroide  $M^*$ , o bien, lo que es equivalente, cuando y sólo cuando  $S \setminus A$  contiene la base del matroide  $M$ , o bien, cuando y sólo cuando  $S \setminus A$  genera el matroide  $M$ . Así pues, si  $F^*$  es una familia de conjuntos independientes del matroide  $M^*$ , entonces,  $F^* = \{A \subseteq S \mid S \setminus A \text{ es un conjunto generador en } M\} = \{A \subseteq S \mid \text{y existe una base } B_1 \in B, \text{ tal que } B_1 \subseteq S \setminus A\} = \{A \subseteq S \mid r(S \setminus A) = r(S)\}$ .

b) Para todos los  $A \subseteq S$ :  $r^*(A) = \max\{|A \cap A'| \mid A' \in F^*\}$ . Elijamos  $A' \in F^*$ , entonces, en virtud de a), existe tal base  $B_1$  del matroide  $M$  que  $B_1 \subseteq S \setminus A'$ , es decir,  $A' \subseteq S \setminus B_1$ . De este modo,  $|A \cap A'| \leq |A \cap (S \setminus B_1)| = |A| - |A \cap B_1|$ . Pero,  $r(S \setminus A) \geq r((S \setminus A) \cap B_1) = |(S \setminus A) \cap B_1| = |B_1| - |A \cap B_1|$ . Por consiguiente,  $|A \cap A'| \leq |A| - |B_1| + r(S \setminus A) = |A| - r(S) + r(S \setminus A)$ . Así pues,  $r^*(A) \leq |A| - r(S) + r(S \setminus A)$ . Por otra parte, existe una base  $B_2$  del matroide  $M$ , tal que  $r(S \setminus A) = |(S \setminus A) \cap B_2| = |B_2 \setminus A|$ , y, por lo tanto,  $(S \setminus B_2) \in F^*$ . Por consiguiente,  $r^*(A) \geq |A \cap (S \setminus B_2)| = |A| - |A \cap B_2| = |A| - (|B_2| - |B_2 \setminus A|) = |A| - r(S) + r(S \setminus A)$ . Quiere decir que  $r^*(A) = |A| - r(S) + r(S \setminus A)$ .

c) Se deduce obviamente de la definición del matroide  $M^*$ . La demostración queda establecida.

Sea  $G(X, S)$  un grafo no orientado sin lazos con el conjunto de vértices  $X$  y el conjunto de aristas  $S$ , y sea  $M(G)$  un matroide cíclico del grafo  $G$ . Un matroide  $M^*(G)$ , dual respecto de  $M(G)$ , se denomina matroide *cocíclico* del grafo  $G$ . Un matroide se llama *cográfico*, si es isomorfo al matroide cocíclico de cierto grafo.

Para ilustrar las aplicaciones de la dualidad demos a conocer sin demostración el siguiente resultado conocido.

**Teorema 64** (de Whitney). Un grafo es planario cuando, y sólo cuando, su matroide cíclico es cográfico, o bien, lo que es equivalente, cuando su matroide cocíclico es gráfico.

Teniendo presente el teorema 64, se llama frecuentemente planario un matroide que es a la vez tanto gráfico, como cográfico.

Sean  $M_i = (S_i, I_i)$  los matroides con operadores de clausura  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , tales que  $S_i \cap S_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Entonces, un par  $(S, I)$ , donde  $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$  y  $I(A) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap S_i)$  para cualesquiera  $A \subseteq S$ , forma, evidentemente un matroide llamado *producto* de los matroides  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y denotado con  $\prod_{i=1}^n M_i$ .

**Teorema 65.** Para todo  $A \subseteq S$  son válidas las siguientes afirmaciones:

a)  $A$  es un conjunto independiente del matroide  $\prod_{i=1}^n M_i$  cuando y sólo cuando  $(A \cap S_i)$  sea un conjunto independiente del matroide  $M_i$  para cualquier  $i$ ;

b)  $A$  es una base del matroide  $\prod_{i=1}^n M_i$ , cuando y sólo cuando  $(A \cap S_i)$  es la base del matroide  $M_i$  para cualquier  $i$ ;

c)  $A$  es un ciclo del matroide  $\prod_{i=1}^n M_i$  cuando y sólo cuando existe un índice  $i$ , tal que  $(A \cap S_i) = A$ , y  $(A \cap S_j) = \emptyset$ , para cualquier  $j \neq i$ ;

d)  $r(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A \cap S_i)$ , donde  $r_i$  es una función de rango del matroide  $M_i$ .

La demostración del teorema es obvia, por eso proponemos que el mismo lector la restablezca.

Los matroides  $M_i$  en  $M = \prod_{i=1}^n M_i$  se denominan *factores* del matroide  $M$ .

Un matroide que no puede ser descompuesto en un producto de matroides menores se llama *conexo*.

**Proposición 15.** Sea  $f$  una función semimodular de números enteros y monótona creciente, definida sobre un conjunto  $\mathcal{P}(S)$  de todos los subconjuntos del conjunto finito  $S$ ; además,  $f(\emptyset) = 0$  y  $F = \{A \subseteq S \mid \forall B \subseteq A: |B| \leq f(B)\}$ . Entonces, el par  $(S, F)$  es un matroide, y su función de rango  $r$  para un subconjunto arbitrario  $A \subseteq S$  se calcula por la fórmula

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\}.$$

*Demostración.* Veamos una familia  $K = \{A \subseteq S \mid f(A) < |A|\}$  y demos-tremos que sus elementos mínimos son ciclos de cierto matroide, es decir, satisfacen las condiciones C1) y C2). La condición C1) se cumple, evidentemente, por construcción.

Supongamos que  $C_1 \neq C_2$  son conjuntos mínimos de la familia  $K$ , y que  $a \in (C_1 \cap C_2)$ . Entonces  $|C_1| \geq 2$ , y, por consiguiente,  $|C_1| - 1 = |C_1 \setminus \{a\}| \leq f(C_1 \setminus \{a\}) \leq f(C_1) < |C_1|$ , es decir,  $f(C_1) = |C_1| - 1$ , y  $f(B) \geq |B|$  para todo  $B \subset C_1$ . De un modo análogo llegamos a que  $f(C_2) = |C_2| - 1$ . En particular, tenemos  $|C_1 \cap C_2| \leq f(C_1 \cap C_2)$  y, de este modo, por ser la función  $f$  monótona y semimodular, obtenemos

$$f((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}) \leq f(C_1 \cup C_2) \leq f(C_1) + f(C_2) - f(C_1 \cap C_2) \leq |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| \leq |C_1 \cup C_2| - 2 \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}|.$$

El conjunto  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$  pertenece a la familia  $K$  y, por lo tanto, contiene su conjunto mínimo. La condición C2) está comprobada.

Así pues, la familia  $F$  define el matroide  $M$ . Resta por demostrar que

la función

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\},$$

definida para todos los  $A \subseteq S$ , es la función de rango del matroide  $M$ . Con este fin es suficiente comprobar que  $r$  satisface las condiciones R1)–R3). Directamente de la definición de  $r$  se deduce que  $0 \leq r(A) \leq |A|$  para todo  $A \subseteq S$ , y que  $r(A) \leq r(B)$  para  $A \subseteq B$ , es decir, las condiciones R1) y R2) se cumplen. Ahora, para todos los subconjuntos  $A_1 \subseteq A$  y  $B_1 \subseteq B$  se verifica la igualdad

$$|A \setminus A_1| + |B \setminus B_1| = |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|.$$

Por consiguiente, por ser la función  $f$  semimodular, tenemos

$$(f(A_1) + |A \setminus A_1|) + (f(B_1) + |B \setminus B_1|) \geq f(A_1 \cup B_1) + |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + f(A_1 \cap B_1) + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} r(A) + r(B) &= \min_{\substack{A_1 \subseteq A \\ B_1 \subseteq B}} \{f(A_1) + |A \setminus A_1| + f(B_1) + |B \setminus B_1|\} \geq \\ &\geq \min_{\substack{C_1 \subseteq A \cup B \\ C_2 \subseteq A \cap B}} \{f(C_1) + |(A \cup B) \setminus C_1| + f(C_2) + |(A \cap B) \setminus C_2|\} = \\ &= r(A \cup B) + r(A \cap B). \end{aligned}$$

De este modo queda establecida la validez de R3), y la proposición queda demostrada.

**Teorema 66.** Supongamos que  $M_i = (S, r_i)$  es un matroide en el conjunto finito  $S$ ;  $r_i$ , una función de rango, y  $F(M_i)$ , una familia de conjuntos independientes del matroide  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Entonces, el par  $(S, F)$ , donde

$$F = \{A \subseteq S \mid A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n; A_i \in F(M_i),$$

es un matroide cuya función de rango  $r$  se define por la correlación

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i(B) + |A \setminus B| \right\}.$$

*Demostración.* Sea  $f(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A)$  para todo  $A \subseteq B$ . En este caso  $f$  es una función semimodular monótona creciente de números enteros, ya que tales son las funciones de rango  $r_i$  de los matroides  $M_i$ . Por consiguiente, en virtud de la proposición 15, la familia

$$F^* = \{A \subseteq S \mid \forall B \subseteq A: |B| \leq f(B)\}$$

define el matroide  $M(S, r)$ , donde

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\} = \min_{B \subseteq A} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i(B) + |A \setminus B| \right\}.$$

Luego, sea  $B \subseteq A$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , y  $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ , donde  $B_i \subseteq A_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces,

$$|B| = \left| \bigcup_{i=1}^n B_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n r(B_i) \leq \sum_{i=1}^n r_i(B),$$

puesto que  $B_i \in \mathcal{F}(M_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por consiguiente,  $A \in \mathcal{F}^*$ . Es evidente que la afirmación recíproca es también cierta, a saber, si  $A \in \mathcal{F}^*$ , entonces  $A \in \mathcal{F}$ . Quiere decir que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$ , y el teorema queda demostrado.

El matroide  $(S, \mathcal{F})$ , citado en la formulación del teorema 66, recibe el nombre de *unión de los matroides*  $M_1, \dots, M_n$  y se denota  $\bigcup_{i=1}^n M_i$ .

Se denomina *extensión unipuntual* del matroide  $M = (S, \mathcal{F})$  mediante un punto  $p \notin S$  a tal matroide  $M' = (S \cup \{p\}, \mathcal{F}')$ , donde  $r(M') = r(M)$ , y  $M = M' - p$ .

**Proposición 16.** Cada matroide cuenta con una extensión unipuntual.

*Demostración.* Sea  $M = (S, \mathcal{F})$  un matroide. Construyamos su extensión unipuntual  $M' = (S \cup \{p\}, \mathcal{F}')$ , tomando por operador de clausura la aplicación  $A \rightarrow I(A)$ , donde

$$I(A) = \begin{cases} \overline{A}, & \text{si } p \notin A \text{ y } \overline{A} \neq S; \\ A \setminus \{p\} \cup \{p\}, & \text{si } p \in A \text{ y } r(\overline{A} \setminus \{p\}) = r(S) - 1; \\ S \cup \{p\}, & \text{si } \overline{A} = S, \text{ o bien } p \in A \text{ y } r(\overline{A} \setminus \{p\}) = r(S) - 1. \end{cases}$$

Comprobemos la propiedad de sustitución. Sea  $a \in I(A \cup \{b\})$ ;  $a, b \notin I(A)$ . Entonces son posibles dos casos:  $a = p \in I(A \cup \{b\})$  y  $a \neq p$ ,  $a \in I(A \cup \{b\})$ . En el primer caso tenemos o bien  $b = p$ , o bien  $r(A) = r(S) - 1$ . De aquí,  $b \in I(A \cup \{a\})$ . En el segundo caso, si  $p \notin A$ , entonces  $b \in I(A \cup \{a\})$ ; si, en cambio,  $p \in A$ , entonces  $a \in I(A \cup \{b\}) = (\overline{A} \setminus \{p\}) \cup \{b\} \cup \{p\}$ , de donde  $a \in (\overline{A} \setminus \{p\}) \cup \{b\}$ , y, por consiguiente, en virtud de la propiedad de sustitución, para el matroide  $M$  tenemos  $b \in (\overline{A} \setminus \{p\}) \cup \{a\}$ . La igualdad  $r(M') = r(M)$  se cumple por construcción. La proposición está demostrada.

Se dice que dos conjuntos  $A, B \subseteq S$  del matroide  $M = (S, \mathcal{F})$  forman un *par modular*, si

$$r(A \cap B) + r(A \cup B) = r(A) + r(B).$$

Se llama *filtro modular* del matroide  $M = (S, \mathcal{F})$  a una familia  $\Phi$  de subconjuntos del conjunto  $S$ , tal que

- si  $A \in \Phi$  y  $A \subseteq B$ , entonces  $B \in \Phi$ ;
- si  $A, B \in \Phi$ , y  $(A, B)$  es un par modular, entonces  $A \cap B \in \Phi$ .

**Proposición 17.** Sea  $M = (S \cup \{p\}, \mathcal{F}')$  un matroide sobre el conjunto  $S \cup \{p\}$ ,  $p \notin S$ , con operador de clausura  $I$  y función de rango  $r$ . Entonces, el conjunto  $\Phi = \{A \subseteq S \mid p \in I(A)\}$  es un filtro modular del matroide  $M - p$ .

*Demostración.* Es evidente que  $\Phi$  es un filtro. La condición  $A \in \Phi$  es equivalente a la igualdad  $r(A \cup \{p\}) = r(A)$ . Por consiguiente, si  $A, B \in \Phi$ , y



$(A, B)$  es un par modular en  $M - p$ , entonces,  $r((A \cap B) \cup \{p\}) \leq r(A \cup \{p\}) + r(B \cup \{p\}) - r(A \cup B \cup \{p\}) = r(A) + r(B) - r(A \cup B) = r(A \cap B)$ . De este modo,  $A \cap B \in \Phi$ . La proposición está demostrada.

**Proposición 18.** Sea  $\Phi$  un filtro modular del matroide  $M = (S, \bar{\phantom{x}})$ . Entonces existe una única extensión unipuntual  $M' = (S \cup \{p\}, \bar{\phantom{x}})$  del matroide  $M$ , tal que  $\Phi = \{A \subseteq S \mid p \in \bar{A}\}$ .

*Demostración.* Sea  $r$  la función de rango del matroide  $M$ . Definamos una función de valores enteros  $r^*$  para todos los subconjuntos  $A \subseteq S \cup \{p\}$  del modo siguiente:

$$\begin{aligned} r^*(A) &= r(A), \text{ si } A \subseteq S; \\ r^*(A \cup \{p\}) &= r(A) + 1, \text{ si } A \subseteq S \text{ y } A \notin \Phi; \\ r^*(A \cup \{p\}) &= r(A), \text{ si } A \subseteq S \text{ y } A \in \Phi. \end{aligned}$$

Comprobemos que  $r^*$  es la función de rango de cierto matroide. Con este fin mostremos que ella satisface los axiomas R1)–R3), con lo cual establezcamos también la unicidad de la extensión.

Está claro que  $r^*$  satisface los axiomas R1) y R2). Para comprobar R3), hace falta examinar dos casos: un par  $A \cup \{p\}, B$ , y otro par  $A \cup \{p\}, B \cup \{p\}$ , donde  $A, B \subseteq S, p \notin S$ . En el primer caso, para cualesquiera  $A, B \subseteq S$  tenemos  $r^*(A \cup B \cup \{p\}) - r^*(A \cup B) \leq r(A \cup \{p\}) - r^*(A)$ . Observemos que el primer miembro de la desigualdad es siempre inferior o igual a 1, además es igual a 1 sólo cuando  $A \cup B \notin \Phi$ . De este modo,  $A \notin \Phi$ , puesto que en tal caso  $r^*(A \cup \{p\}) - r^*(A)$  también debe ser igual a 1. De aquí se deduce que  $r^*(A \cup B \cup \{p\}) - r^*(A \cup \{p\}) \leq r^*(A \cup B) - r^*(A) = r(A \cup B) - r(A) \leq r(B) - r(A \cap B) = r^*(B) - r^*(A \cap B)$ , con lo cual queda establecido en el caso dado el carácter semimodular de la función. En el segundo caso mostremos que  $r^*((A \cap B) \cup \{p\}) + r^*(A \cup B \cup \{p\}) \leq r^*(A \cup \{p\}) + r^*(B \cup \{p\})$ . Si  $A \cup B \notin \Phi$ , entonces  $A, B$  y  $A \cap B$  tampoco se disponen en  $\Phi$  y, por consiguiente,  $r^*(X \cup \{p\}) = r(X) + 1$ , cuando  $X = A, B, A \cup B$  y  $A \cap B$ . Así pues, nuestra desigualdad se verifica, puesto que coincide en este caso con la condición de semimodularidad para la función de rango  $r$  del matroide  $M$ . En cambio, si  $A \cup B \in \Phi$ , esto puede tener lugar sólo cuando  $A \in \Phi$  y  $B \in \Phi$ . Además,  $(A, B)$  es un par modular en  $M$ . Es fácil probar que en este caso  $(A, B)$  es también un par modular y, por lo tanto,  $A \cap B = \overline{(A \cap B)} \in \Phi$ . De aquí,  $r^*(X \cup \{p\}) = r(X)$  cuando  $X = A, B, A \cup B$  y  $A \cap B$ . De este modo, la desigualdad está demostrada, puesto que en este caso también ella coincide exactamente con la condición de semimodularidad para  $r$ . La sugestión queda demostrada.

Directamente de la proposición 18 se deduce el siguiente resultado que se debe a Crapo:

**Corolario 12.** Sea  $\Phi$  un filtro modular del matroide  $M = (S, \bar{\phantom{x}})$  y sea  $M' = (S \cup \{p\}, \bar{\phantom{x}})$  la extensión del matroide  $M$  construida con ayuda de  $\Phi$ . Entonces son superficies en  $M'$  todos los subconjuntos  $S \cup \{p\}$  de los tipos siguientes:

- a)  $AU[p]$ , si  $A$  es una superficie del matroide  $M$  y  $A \in \Phi$ ;
- b)  $A$ , si  $A$  es una superficie del matroide  $M$  y  $A \notin \Phi$ ;
- c)  $AU\{p\}$ , si  $A$  es una superficie del matroide  $M$ ;  $A$  no se dispone en  $\Phi$  y no se cubre en  $M$  por ninguna superficie de  $\Phi$ . No hay otras superficies en  $M'$ .

Cabe notar, además, que las extensiones unipuntuales del matroide  $M = (S, \bar{\phantom{x}})$ , ordenadas por inclusión de sus filtros modulares en  $M$ , forman un retículo.

Definamos dos construcciones más: acortamiento e incremento.

**Teorema 67.** Sean  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ ;  $F$ , una familia de sus conjuntos independientes;  $r$ , la función de rango;  $k$ , un número positivo entero tal que  $k \leq r(S)$ . Entonces, la familia

$$F_k = \{A \subseteq S \mid A \in F, \text{ y } |A| \leq k\}$$

es una familia de conjuntos independientes del matroide  $M_k$  sobre el conjunto  $S$  con la función de rango  $r_k(A) = \min\{k, r(A)\}$ . El retículo de superficies del matroide  $M_k$  se obtiene del retículo  $L(M)$  de superficies del matroide  $M$ , eliminando todas las superficies de rango  $\geq k$  sustituyéndolas por un nuevo elemento maximal del retículo.

La demostración del teorema no es difícil y se recomienda al lector a título de ejercicio.

El matroide  $M_k$  citado en la formulación del teorema 67 se denomina *k-acortamiento* del matroide  $M$ .

Si el matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  es isomorfo al  $(r-1)$ -acortamiento del matroide  $H$  sobre el conjunto  $S$ , suele decirse que el matroide  $H$  es un incremento del matroide  $M$ . Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos, podemos considerar que el retículo del matroide  $H$  se obtiene a partir del retículo del matroide  $M$  por inclusión del nivel de nuevos coátomos, el cual yace más arriba que los coátomos iniciales y debajo del elemento unidad del retículo.

No nos detendremos detalladamente en la construcción del incremento, sino que daremos a conocer sin demostración algunos resultados.

**Teorema 68** (de Crapo). Una familia  $H$  de subconjuntos no vacíos del conjunto  $S$  es un conjunto de coátomos en el retículo de incremento del matroide  $M = (S, \bar{\phantom{x}})$  cuando y sólo cuando se cumplen las siguientes tres condiciones:

- a)  $H$  es una anticadena en el booleano  $\mathcal{P}(S)$ ;
- b) para todo  $A \in H$ , si  $B \subseteq A$  y  $|B| = r - 1$ , entonces  $\overline{B} \subseteq A$ ;
- c) para toda base  $B_1$  existe el único elemento  $A_1 \in H$ , tal que  $B_1 \subseteq A_1$ .

Sean  $H$  y  $T$  dos anticadenas pertenecientes al booleano  $\mathcal{P}(S)$ ; se dice que la anticadena  $H$  es inferior a la anticadena  $T$ , si para todo  $A \in H$  existe un elemento  $B \in T$  tal que  $A \subseteq B$ . En caso de que tal elemento  $B \in T$  sea único, suele decirse que  $T$  rompe la anticadena  $H$ . Toda clase de incrementos (más exactamente, las familias de coátomos en el retículo del incremento) del

matroide  $M$  sobre el conjunto finito  $S$ , ordenados como anticadenas del booleano  $\mathcal{P}(S)$ , forman el retículo completo, en el que el elemento minimal se denomina incremento libre del matroide  $M$ . Si el incremento libre del matroide  $M$  se conoce, todos los demás incrementos de dicho matroide pueden obtenerse por partición del incremento libre.

La demostración de las afirmaciones aducidas y de otras, referentes a las extensiones e incrementos de los matroides se da en las obras [94, 95].

La construcción del incremento libre se expone en [96, 97].

Ejercicios. 1. Sea  $M = (S, \bar{\phantom{x}})$  un matroide,  $B \subseteq A \subseteq S$ . ¿Se verificarán las igualdades siguientes:

- $(M|A)|B = M|B$ ;
- $M.B = (M.A).B$ ;
- $(M|A).B = (M.(S \setminus (A \setminus B)))|B$ ;
- $(M.A)|B = (M|(S \setminus (A \setminus B))).B$ ;
- $(M|A)^* = M^*/(S \setminus A)$ ;
- $(M/A)^* = M^*|(S \setminus A)$ ?

2. Cerciórese de la validez de las siguientes afirmaciones:

- todo menor de un matroide gráfico es gráfico;
- todo submatroide de un matroide transversal es transversal;
- la suma de los matroides transversales es un matroide transversal.

3. ¿Podrá contar un matroide gráfico  $M$  con incrementos y  $k$ -acortamientos no gráficos?

Si puede, dñense ejemplos.

Se llama aplicación *débil* de un retículo geométrico  $P$  en el retículo geométrico  $L$  a la aplicación  $\sigma: P \rightarrow L$ , para la cual

- $\sigma(x) = \sup\{\sigma(a) \mid x \geq a, a \geq 0\}$ ;
- $r(\sigma(x)) \leq r(x)$ .

Se llama aplicación *fuerte* del retículo geométrico  $P$  en el retículo geométrico  $L$  a la aplicación  $\sigma: P \rightarrow L$ , para la cual

- $\sigma(\sup A) = \sup\{\sigma(x) \mid x \in A\}$  para todos los  $A \subseteq P$ ;
- de  $y \geq x$  en  $P$  se deduce que  $\sigma(y) \geq \sigma(x)$  en  $L$ .

Se llama *aplicación fuerte (débil, respectivamente)* de la geometría  $G = (S, \bar{\phantom{x}})$  en la geometría  $H = (T, \bar{\phantom{x}})$  a la función inyectiva

$$f: S \cup \{O\} \rightarrow T \cup \{O\},$$

donde  $O$  es un conjunto vacío, tal que  $f(O) = 0$ , y la preimagen de un subconjunto cerrado independiente, (respectivamente arbitrario) de la geometría  $H$  es cerrada (independiente respectivamente) en  $G$ . Cada aplicación fuerte es débil, lo recíproco no es cierto.

Ni las aplicaciones fuertes ni tampoco las débiles, forman por separado categorías bastante buenas, para que puedan emplearse en plena medida las ideas de la teoría de categorías. Sin embargo, siendo analizadas en conjunto, se obtienen ciertos resultados del tipo canónico, por cuanto los entes en la categoría de matroides y las aplicaciones fuertes tienden a ser canónicos con respecto a los entes de la categoría de matroides y las aplicaciones débiles. La razón de esto radica, por lo visto, en que las aplicaciones fuertes que conservan el rango son isomorfismos, no obstante se encuentran, a menu-

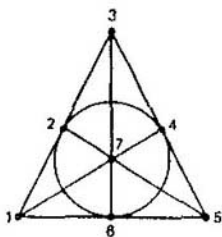


Fig.8.34.

do, varios matroides de un mismo rango que satisfacen cierto diagrama prefijado de las aplicaciones fuertes ligadas entre sí precisamente por las aplicaciones débiles.

Para ponerse en contacto con los resultados principales de las aplicaciones débiles y fuertes de los matroides recomendamos las obras [98—102 y 138—140].

Como conclusión de nuestra breve introducción a la teoría de los matroides, discutamos algunos problemas. Uno de los problemas más antiguos de la teoría de matroides, que hasta el momento no ha sido resuelto totalmente, es el problema de representación del matroide dado mediante los vectores con coordenadas de un campo (problema de coordinatización).

Un matroide  $M = (S; \bar{\phantom{S}})$  se llama *representable* sobre el campo  $F$ , si existe un espacio lineal  $V$  sobre  $F$  y una aplicación  $\varphi: S \rightarrow V$ , para la cual  $A \subseteq S$  es independiente en  $M$  cuando y sólo cuando  $\varphi$  es biunívoca en  $A$ , y  $\varphi(A)$  es linealmente independiente en  $V$ .

Es obvio que un matroide representable sobre  $F$  se describe por una matriz de dimensión  $r \times n$ , de cuyas columnas sirven las imágenes de los elementos de  $S$ , al realizarse la aplicación  $\varphi$  (si  $|S| = n$  y  $r(S) = r$ ). El problema de representación consiste en determinar si es representable o no el matroide dado  $M$  sobre el campo (cuerpo) dado  $F$ .

Por ejemplo, los matroides, representables sobre el campo  $G(F(2))$ , se denominan *binarios*.

He aquí los resultados más característicos concernientes a la representación de los matroides:

a) un matroide  $M = (S, \bar{\phantom{S}})$  es binario cuando y sólo cuando no tiene un menor que sea isomorfo al matroide homogéneo  $U_2(4)$ , o bien, lo que es equivalente, cuando y sólo cuando la diferencia simétrica entre dos cualesquiera ciclos distintos del matroide  $M$  es una unión de los ciclos disjuntos;

b) un matroide  $M$  es ternario, es decir, representable sobre el campo  $GF(3)$ , si y sólo si no tiene menores isomorfos al matroide homogéneo  $U_2(5)$ , al de Fano (fig. 8.34) o a los matroides duales respecto de los mencionados;

c) si un matroide  $M$  sin lazos y puentes es representable sobre el campo  $GF(2)$  y sobre algún otro campo, cuya característica es distinta de 2, entonces

ces,  $M$  es representable sobre todos los campos a la vez, con ayuda de una matriz bien unimodular (es decir, de una matriz cuyos menores son todos iguales a 0,  $\pm 1$ ).

Los matroides representables sobre cualquier campo se llaman *regulares*. Un matroide  $M = (a, \tau)$  se denomina *lazo*, si  $r(a) = 0$ , y *punto*, si  $r^*(a) = 0$ .

**Teorema 69.** Si un matroide  $M$  en el conjunto  $S$  es representable sobre cierto campo  $F$ , el matroide  $M^*$ , dual de  $M$ , es también representable sobre  $F$ .

*Demostración.* Sea  $M$  un matroide de rango  $r$  en el conjunto  $S$ ,  $|S| = n$ , y sea  $A$  una matriz de orden  $r \times n$  que representa el matroide  $M$  sobre el campo  $F$ . Supongamos que  $X$  es el conjunto de todos los vectores columnas  $x$ , para los cuales  $Ax = 0$ . El conjunto  $X$  es un subespacio de dimensión  $n - r$ . Elijamos en  $X$  una familia de  $n - r$  vectores columnas linealmente independientes y formemos, a base de dichos vectores (empleándolos como columnas) una matriz  $B$  de orden  $n \times (n - r)$ . Observemos que  $AB = 0$ .

Mostremos que la matriz  $B^T$ , transpuesta a  $B$ , es una representación sobre el campo  $F$  del matroide dual  $M^*$ . Con este fin demosetremos que  $r$  columnas arbitrarias de la matriz  $A$  son linealmente independientes, cuando y sólo cuando el conjunto complementador de  $n - r$  columnas es  $B^T$ -linealmente independiente. Sin restringir la generalidad, se pueden tomar las primeras  $r$  columnas de la matriz  $A$ .

Las primeras  $r$  columnas de la matriz  $A$  son linealmente dependientes cuando y sólo cuando existe un vector columna no nulo  $x$ ,  $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_2, 0, \dots, 0)$  perteneciente a  $X$ . Tal vector  $x \in X$  existe, a su vez, cuando y sólo cuando existe un vector columna no nulo  $y$  de dimensión  $n - r$  tal que  $x = By$ . Representemos ahora la matriz  $B$  en la forma  $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , donde  $B_1$  es una submatriz de orden  $r \times (n - r)$ , y  $B_2$ , una submatriz de orden  $(n - r) \times (n - r)$ . Entonces, es fácil ver que  $B_2 y = 0$ . Por cuanto  $y \neq 0$ , llegamos a que  $B_2$  es una matriz regular. De este modo, las filas de la matriz  $B_2$  y, por consiguiente, las últimas  $n - r$  columnas de la matriz  $B^T$  son dependientes. El teorema queda demostrado.

Supongamos que  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}(S)$ , donde  $\mathcal{P}(S)$  es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto  $S$ . Definamos la suma  $\sum_{i=1}^n A_i$  según el módulo 2, como un conjunto  $\{x \in S \mid x \text{ que se contiene en el número impar de sumandos } A_i\}$ . En particular,  $A_1 + A_2$  es, según el módulo 2,  $A_1 \Delta A_2$ , o sea, la diferencia simétrica de los conjuntos  $A_1$  y  $A_2$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $M$  un matroide. Demuéstrese que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) para cualesquiera ciclos  $C$  y un cociclo  $C^*$  del matroide  $M$  es cierto que  $|C \cap C^*|$  es par;

- b) Una suma según el módulo 2 de cualquier familia de ciclos del matroide  $M$  es igual a la unión de los ciclos disjuntos del mismo matroide;
- c) para una base  $B$  y un ciclo  $C$  arbitrarios del matroide  $M$  tenemos:  $C = \sum_{e_i \in C \setminus B} C(e_i)$  según el módulo 2, donde  $C(e_i)$  es un ciclo del matroide  $M$ , tal que  $C(e_i) \subseteq B \cup \{e_i\}$ .
- d)  $M$  es un matroide binario.

A la par con el problema de representación, un gran interés práctico despiertan los problemas de descripción de las clases de matroides: binarios, gráficos, cográficos, regulares, transversales y otros;

d) un matroide  $M$  es gráfico, si y sólo si es binario y no contiene menores isomorfos a los matroides cocíclicos de los grafos de Kuratowski  $K_{3,3}$  y  $K_5$ , al matroide de Fano y al dual de este último.

e) un matroide  $M$  es cográfico, si y sólo si es binario y no contiene menores isomorfos a los matroides cíclicos de los grafos de Kuratowski  $K_{3,3}$  y  $K_5$ , al matroide de Fano y al dual de este último;

f) un matroide binario es regular, si y sólo si no contiene menores isomorfos al matroide de Fano y al dual de este último.

Para ilustrar la importancia de los problemas de caracterización, diremos que casi todos los métodos conocidos de la síntesis topológica de circuitos eléctricos y de esquemas combinatorios de conmutación están basados en el empleo de las propiedades que poseen los matroides cíclico y cocíclico del grafo del esquema y también en la siguiente propiedad notable: la matriz de incidencia de un matroide cocíclico del grafo del esquema (la matriz de cortes de un esquema eléctrico) puede ser reducida mediante las operaciones de filas elementales a una matriz de incidencia  $A$  del esquema eléctrico (dicho de otro modo, el matroide correspondiente a la matriz de incidencia  $A$  sobre  $GF(2)$ , es isomorfo al matroide de cortes del grafo del esquema). Cada matroide gráfico, al igual que cada matroide cográfico, es binario, pero no cada matroide binario es gráfico. Por ejemplo, el matroide de Fano es binario, mas no es gráfico; más aún, su matriz de representación sobre  $GF(2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no puede ser reducida, mediante las transformaciones elementales de filas, a la matriz de incidencia de ningún grafo del esquema. Por eso, desempeñan un papel de importancia excepcional en la síntesis topológica de los esquemas eléctricos las caracterizaciones mencionadas más arriba de los matroides gráficos y cográficos, como también las siguientes circunstancias:

- al orientar la arista de un grafo, el matroide cíclico del grafo se hace también orientado;
- del carácter orientado de un matroide se desprende el carácter orientado del matroide dual;

- un matroide orientado tiene representación lineal sobre todos los campos, es decir, es regular y representable por una matriz modular.

Entre las caracterizaciones aducidas están ausentes prácticamente las constructivas, por cuanto seleccionar todos los menores del matroide y, con mayor razón, establecer su isomorfismo respecto de otros matroides resulta difícil incluso para los matroides «pequeños». Tanto más valiosa es la caracterización constructiva de los matroides regulares recién obtenida por Seymour [103]. Demos a conocer sin demostración su resultado.

Sean  $M_1 = (S_1, -)$  y  $M_2 = (S_2, -)$  los matroides binarios, con la particularidad de que  $S_1$  y  $S_2$  pueden intersectarse. En tal caso el matroide  $M_1 \Delta M_2$  sobre el conjunto  $S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ , los ciclos de los cuales son los subconjuntos del conjunto  $S_1 \Delta S_2$  del tipo  $C_1 \Delta C_2$  (donde  $C_i$  son ciclos del matroide  $M_i$ ,  $i = 1, 2$ ), es binario. Supongamos que  $|S_1|, |S_2| < |S_1 \Delta S_2|$ . Entonces, el matroide  $M_1 \Delta M_2$  lleva el nombre de 1-suma (2-suma y 3-suma, respectivamente) de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ , si  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  ( $|S_1 \cap S_2| = 1$ , y  $S_1 \cap S_2 = \{z\}$ , respectivamente, donde  $z$  no es ni lazo ni colazo de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ ;  $|S_1 \cap S_2| = 3$  y  $S_1 \cap S_2 = Z$ , donde  $Z$  es un ciclo que no contiene ningún cociclo de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ ).

En 1975 Brilavski demostró que las 1-suma, 2-suma y 3-suma de dos matroides regulares son regulares.

Sea dada una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Denotemos con  $R_{10}$  el matroide, que tiene como elementos las columnas de la matriz y como bases sus conjuntos linealmente independientes máximos en un espacio lineal sobre  $GF(2)$ .

**Teorema 70** (de Seymour). Cada matroide regular  $M$  puede ser construido mediante las 1-suma, 2-suma y 3-suma de matroides, cada uno de los cuales es isomorfo a los menores del matroide  $M$  y es o bien gráfico, o bien cografico, o isomorfo al matroide  $R_{10}$ .

Detengámos también en otras aplicaciones de los matroides. Se denomina *coloración correcta* de un grafo  $G$  tal atribución de los colores a sus vértices que ningún par de vértices adyacentes está pintado de igual color. Se denomina *k-coloración* del grafo  $G$  una coloración correcta del grafo  $G$  en la que se usan  $k$  colores o menos. Dos  $k$ -coloraciones del grafo  $G$  se considerarán diferentes, si atribuyen diferentes colores por lo menos a un vértice. El *número cromático*  $\chi(G)$  del grafo  $G$  se define como el menor  $k$ , para el cual el grafo  $G$  tiene  $k$ -coloración. Es fácil determinar el número cromático

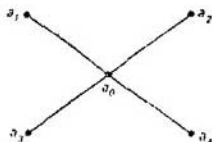


Fig.8.35.

para ciertos grafos conocidos, por ejemplo:  $\chi(K_n) = n$ ;  $\chi(K_{m,n}) = 2$ , y  $\chi(T) = 2$  para cualquier árbol no trivial  $T$ .

Sea  $P(G; \lambda)$  el número de diferentes  $\lambda$ -coloraciones del grafo  $G$ . Si  $\lambda \leq \chi(G)$ , entonces, naturalmente,  $P(G; \lambda) = 0$ . El menor de los números naturales  $\lambda$ , para el cual  $P(G; \lambda) > 0$ , será, evidentemente, el número cromático del grafo. La hipótesis bien sabida de cuatro colores (cuya validez fue demostrada no hace mucho tiempo) afirma que si  $G$  es un grafo planario, entonces  $P(G; 4) > 0$ .

Es evidente que para todo grafo completo  $K_n$  tenemos

$$P(K_n; \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1),$$

puesto que cualquier vértice dado del grafo completo  $K_n$  puede ser pintado por  $\lambda$  métodos; para el segundo vértice puede utilizarse cualquiera de  $(\lambda - 1)$  colores restantes, etc. Por fin, el último vértice se pinta empleando  $(\lambda - n + 1)$  métodos. El vértice central  $a_0$  del grafo  $K_{1,4}$  (fig. 8.35) puede ser pintado de  $\lambda$  modos, mientras que cualquiera de los vértices pendientes, de  $\lambda - 1$  modos. Por eso,  $P(K_{1,4}; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^4$ .

**Teorema 71.** Supongamos que  $G$  es un grafo sin lazos y aristas paralelas (múltiples) y sea  $a$  una arista del grafo  $G$ . Entonces

$$P(G; \lambda) = P(G - a; \lambda) - P(G/a; \lambda),$$

donde  $G - a$  y  $G/a$  son los grafos obtenidos de  $G$  por eliminación o contracción, respectivamente, de la arista  $a$ .

*Demostración.* La igualdad requerida se desprende directamente del hecho de que el conjunto de  $\lambda$ -coloraciones correctas del grafo  $G - a$  puede partirse en dos subconjuntos: coloraciones, en las que los vértices extremos de la arista  $a$  están pintados de colores distintos, y aquéllas, en las que los vértices citados están pintados de un mismo color. La potencia del primer subconjunto es igual, obviamente, al número de  $\lambda$ -coloraciones del grafo  $G$ , es decir, a  $P(G; \lambda)$ , y la potencia del segundo subconjunto, al número de  $\lambda$ -coloraciones del grafo  $G/a$ , es decir, a  $P(G/a; \lambda)$ . El teorema queda demostrado.

En todos los ejemplos aducidos  $P(G; \lambda)$  es un polinomio de la variable  $\lambda$ . Esto es siempre así, de lo que nos convencemos ahora mismo.

Sea  $G$  un grafo incompleto arbitrario sobre  $n$  vértices. Es evidente que este grafo puede obtenerse a partir del grafo  $K_n$  eliminando sucesivamente las aristas que no pertenecen al grafo  $G$ . Designemos estas aristas, para concretar, mediante  $a_1, \dots, a_k$ . Introduzcamos las siguientes designaciones:



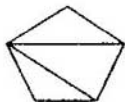


Fig. 8.36.

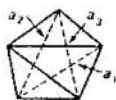


Fig. 8.37.



Fig. 8.38.

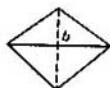


Fig. 8.39.

$G_1 = K_n - a_1$ ;  $G_2 = G_1 - a_2$ ;  $\dots$ ,  $G_k = G_{k-1} - a_k$ ,  $G^1 = K_n/a_1$ ;  $G^2 = G^1/a_2$ ,  $\dots$ ,  $G^k = G_{k-1}/a_k$ . Entonces, en virtud del teorema 71, tenemos:  $P(K_n; \lambda) = P(G_k; \lambda) - \sum_{i=1}^k P(G^i; \lambda)$ , pero  $G_k = G$ . Por consiguiente,

$$P(G; \lambda) = P(K_n; \lambda) + \sum_{i=1}^k P(G^i; \lambda).$$

Cada uno de los grafos  $G^i$ , donde  $i = 1, \dots, k$ , contiene  $(n-1)$  vértices y la función del grafo,  $P(G^i; \lambda)$ , puede ser expresada a través de las funciones del grafo completo sobre  $(n-1)$  vértices y de los grafos sobre  $(n-2)$  vértices. Por consiguiente,  $P(G; \lambda)$  puede representarse en forma de la suma  $P(K_i; \lambda)$ , puesto que, contrayendo las aristas, siempre podemos llegar a los grafos completos, por ejemplo,  $K_1$ . Pero,  $P(K_i; \lambda) = \lambda \cdot \dots (\lambda - i + 1)$  son polinomios. Por lo tanto,  $P(G; \lambda)$  es un polinomio de la variable  $\lambda$  para cualquier grafo  $G$ .

La función  $P(G; \lambda)$  se llama por esta razón polinomio cromático del grafo  $G$  (véase el ejemplo 8 del § 8.3).

Ilustremos lo dicho con un ejemplo y hallemos el polinomio cromático del grafo  $G$  expuesto en la fig. 8.36. Denotemos con  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  las aristas del grafo completo  $K_5$ , que no pertenecen al grafo  $G$  (véase fig. 8.37). En tal caso,  $G^1 = K_4$ ;  $G^2 = K_4$ , y el grafo  $G^3$ , representado en la fig. 8.38, se obtiene a partir del grafo completo  $K_4$ , eliminando en él la arista  $b$  (véase fig. 8.39). Además,  $K_4/b = K_3$ . De aquí,

$$P(K_5; \lambda) = P(G; \lambda) - 2P(K_4; \lambda) - P(G^3; \lambda);$$

$$P(K_4; \lambda) = P(G^3; \lambda) - P(K_3; \lambda).$$

Por consiguiente,  $P(G; \lambda) = P(K_5; \lambda) + 3P(K_4; \lambda) + P(K_3; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^5 - 7\lambda^4 + 18\lambda^3 - 20\lambda^2 + 8\lambda$ . En particular, el grafo  $G$  puede ser pintado de tres colores, por cuanto

$$P(G; 3) = 6 > 0.$$

He aquí algunas propiedades del polinomio cromático  $P(G; \lambda)$  que se desprenden directamente del teorema 71.

**Teorema 72.** Sea  $G = (X, S)$  un grafo sin lazos y aristas paralelas (múltiples) con un conjunto de vértices  $X$ , un conjunto de aristas  $S$  y con  $k$  componentes de conexión  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Entonces:

a)  $P(G; \lambda)$  es un polinomio de la variable  $\lambda$  de grado  $|X|$ ;

- b) el coeficiente de  $\lambda^{|\chi|}$  en  $P(G; \lambda)$  es igual a 1;  
 c) el coeficiente de  $\lambda^{|\chi|-1}$  en  $P(G; \lambda)$  es igual  $\sigma - |S|$ ;  
 d) el término independiente del polinomio  $P(G; \lambda)$  es igual a 0;

e)  $P(G; \lambda) = \prod_{i=1}^n P(C_i; \lambda)$ ;

f) el índice mínimo en las potencias de la variable  $\lambda$  que figuran en  $P(G; \lambda)$  con coeficientes no nulos es igual a  $k$ .

**Teorema 73.** El grafo  $G$  con  $n$  vértices es un árbol cuando y sólo cuando  $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ .

*Demostración.* Probemos, por inducción respecto del número de vértices, que el polinomio cromático de cualquier árbol marcado con  $n$  vértices es igual a  $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ . Cuando  $n = 1$  y  $n = 2$ , el resultado es evidente. Supongamos que el polinomio cromático de todos los árboles con  $n - 1$  vértices tiene la forma  $\lambda(\lambda - 1)^{n-2}$ . Sea  $x$  un vértice pendiente del árbol  $T$ , y sea  $a$  su arista incidente con relación al vértice  $x$ . Por hipótesis de inducción, el polinomio cromático del árbol  $T - a$  es  $\lambda(\lambda - 1)^{n-2}$ . El vértice  $x$  puede ser pintado de cualquier color distinto del color de otro vértice terminal de la arista  $a$ , de modo que  $x$  puede pintarse empleando  $\lambda - 1$  métodos. Así pues,  $P(T; \lambda) = (\lambda - 1) \times P(T - a; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ .

Viceversa, sea  $G$  un grafo, en el que  $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ . Por cuanto el coeficiente de  $\lambda$  en  $P(G; \lambda)$  no es igual a 0, y el de  $\lambda^{n-1}$  es igual a  $(n - 1)$ , entonces, en virtud del teorema 72, el grafo  $G$  es conexo y tiene  $(n - 1)$  aristas, es decir, tiene en una unidad menos aristas que vértices. Por consiguiente,  $G$  es un árbol. El teorema está demostrado.

Aduzcamos sin demostración algunos resultados más sobre los polinomios cromáticos.

**Teorema 74.** Sea  $P(G; \lambda) = \sum_{i=1}^{|\chi|} a_i \lambda^i$  un polinomio cromático del grafo

$G = (X, S)$ . En este caso:

- a) la sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = 1$  es de signo alternativo;  
 b) si  $G$  es un grafo conexo, entonces

$$|a_i| \geq \binom{|\chi| - 1}{i - 1};$$

c)  $a_k = \sum_{j=0}^{|S|} (-1)^j m_{kj}$ , donde  $m_{kj}$  es el número de subgrafos generados del

grafo  $G$  con  $k$  componentes de conexión y  $j$  aristas.

Entre los problemas referentes a los polinomios cromáticos quedan no resueltos los de descripción de los grafos que tienen un mismo polinomio cromático y el problema de hallar las condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio sea cromático.

Sea  $G$  un grafo sin lazos y aristas paralelas (múltiples) y sea  $L$  un retículo geométrico definido por el matroide cíclico  $M(G)$  del grafo. Para cualquier coloración  $\alpha$  de las vértices del grafo  $G$ , denotemos con  $A(\alpha)$  el con-

junto de aquellas aristas del grafo que tienen ambos vértices terminales igualmente pintados en  $\alpha$ .

**Proposición 19.** Para cualquier coloración  $\alpha$ , el conjunto de aristas  $A(\alpha)$  es una superficie en  $M(G)$ .

*Demostración.* Supongamos que esto no es así. Sea  $b \in \overline{A(\alpha)} \setminus A(\alpha)$ . Entonces, existe un ciclo  $\{b, a_1, \dots, a_k\}$  del grafo  $G$ , tal que  $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq A(\alpha)$ , y  $b \notin A(\alpha)$ . Pero, esto es imposible. Quiere decir que dos vértices terminales de la arista  $b$  están igualmente pintados para  $\alpha$ , y, por lo tanto,  $b \in A(\alpha)$ . De aquí,  $\overline{A(\alpha)} \setminus A(\alpha) = \emptyset$ , y  $\overline{A(\alpha)} = A(\alpha)$ . La proposición está demostrada.

Para un número positivo entero arbitrario  $\lambda$  y para cualquier superficie  $A$  de un matroide cíclico  $M(G)$  del grafo  $G$ , denotemos con  $Q(\lambda; A)$  y  $F(\lambda; A)$ , respectivamente, el número de coloraciones  $\alpha$  de  $\lambda$  colores del grafo  $G$ , tales que  $A(\alpha) = A$  y  $A(\alpha) \supseteq A$ , respectivamente. Entonces

$$F(\lambda; A) = \sum_{B: B \supseteq A \in L} Q(\lambda; B).$$

De acuerdo con la fórmula de inversión de Moebius (véase teorema 55), tenemos

$$Q(\lambda; A) = \sum_{B: B \supseteq A \in L} \mu(A, B) F(\lambda; B).$$

En particular, cuando  $A = \emptyset$ :

$$Q(\lambda; \emptyset) = \sum_{B: B \supseteq \emptyset \in L} \mu(\emptyset, B) F(\lambda; B),$$

donde  $B$  son las superficies del matroide cíclico  $M(G)$ . Pero,  $Q(\lambda; \emptyset)$  coincide con el número de coloraciones correctas en  $\lambda$  colores, es decir, con el número de  $\lambda$ -coloraciones del grafo  $G$  el cual es igual a  $P(G; \lambda)$ . Por otra parte, para cualquier superficie  $B \in L$ , o más bien para un subgrafo del grafo  $G$ , definido por el conjunto de aristas  $B$ ,

$$F(\lambda; B) = \lambda^{k(B)} \lambda^{|X| - m},$$

donde  $m$  es el número de vértices y  $k(B)$ , el número de componentes conexas en el subgrafo definido por  $B$ . Quiere decir que

$$F(\lambda; B) = \lambda^{|X| - m + k(B)} = \lambda^{|X| - r(B)},$$

donde  $r$  es la función de rango del matroide cíclico  $M(G)$ , puesto que, en virtud de la proposición 8,  $r(B) = m - k(B)$ .

De este modo queda demostrado el siguiente resultado:

**Teorema 75.** Para un grafo arbitrario  $G = (X, S)$  con  $k$  componentes de conexión y para cualquier número positivo entero  $\lambda$ :

$$P(G; \lambda) = \lambda^{|X|} \sum_{B \in L} \lambda^{-r(B)} \mu(\emptyset, B) = \lambda^k \sum_{B \in L} \lambda^{r(S) - r(B)} \mu(\emptyset, B),$$

donde  $\mu$  es la función de Moebius del retículo geométrico  $L$  del matroide cíclico  $M(G)$  del grafo  $G$ , y la suma se toma respecto de todas las superficies  $B$  del matroide  $M(G)$ .

Sea  $M = (S, \mathcal{I})$  un matroide y  $r$ , su función de rango. Se llama polinomio característico  $P(M; \lambda)$  del matroide  $M$  al polinomio característico del retículo de superficies  $L$ , es decir,

$$P(M; \lambda) = \sum_{A \in L} \mu(0, A) \lambda^{r(S) - r(A)}.$$

De este modo, si  $G = (X, S)$  es un grafo sin lazos y aristas múltiples, entonces, en virtud del teorema 75,

$$\lambda^* P(M(G); \lambda) = P(G; \lambda),$$

donde  $M(G)$  es el matroide cíclico del grafo  $G$ . El número cromático  $\chi(M)$  del matroide  $M$  se define como  $\lambda$  natural mínimo, para el cual  $P(M; \lambda) > 0$ . Por cuanto  $P(G; \lambda) > 0$  cuando y sólo cuando  $P(M(G); \lambda) > 0$ , entonces los números cromáticos del grafo  $G$  y de su matroide cíclico  $M(G)$  son iguales. Más aún, de aquí proviene en seguida que si los grafos  $G_1$  y  $G_2$  tienen matroides cíclicos isomorfos, sus números cromáticos son iguales.

El polinomio característico  $P(M; \lambda)$  del matroide  $M = (S, \mathcal{I})$  tiene muchas propiedades comunes con el polinomio cromático del grafo  $G$ . Por ejemplo:

a) si  $a$  no es ni lazo ni puente, entonces

$$P(M; \lambda) = P(M - a, \lambda) - P(M/a; \lambda);$$

b) si  $M$  tiene lazos, entonces  $P(M; \lambda) = 0$ ;

c) si  $M$  se descompone en las componentes  $M_1, \dots, M_k$ , entonces

$$P(M, \lambda) = \prod_{i=1}^k P(M_i; \lambda);$$

d) la sucesión de los coeficientes de  $P(M; \lambda)$  es de signo alternativo.

Sea  $K$  una clase de matroide cerrado respecto de las sumas directas (uniones) y la formación de menores. Veamos las funciones  $f$ , definidas sobre los elementos de la clase  $K$  con valores en un anillo conmutativo con la unidad, que toman valores iguales en los matroides isomorfos, tales que para todos los  $M, M_1$  y  $M_2 \in K$ :

a)  $f(M_1 + M_2) = f(M_1)f(M_2)$ ;

b)  $f(M) = f(M - a) + f(M/a)$ , si  $a$  no es ni lazo ni puente.

Las funciones  $f$  que poseen las propiedades citadas llevan el nombre de invariantes de Tutte—Grothendieck.

Sea  $K$  una clase de todos los matroides. Pongamos  $f_1(M)$  y  $f_2(M)$  iguales al número de bases y al número de conjuntos independientes, respectivamente, del matroide  $M$ . Es fácil ver que  $f_1$  y  $f_2$  son invariantes de Tutte—Grothendieck. Se puede mostrar también que si  $P(M; \lambda)$  es el polinomio ca-

racterístico del matroide  $M$ , entonces  $(-1)^{r(M)}P(M; \lambda)$  es también un invariante de Tutte—Grothendieck.

Se llama *función de rango generalizada* del matroide  $M = (S, \bar{\phantom{A}})$  a un polinomio

$$R(M, x, y) = \sum_{A \subseteq S} x^{r(S)-r(A)} y^{r^*(S)-r^*(S \setminus A)},$$

donde  $r$  y  $r^*$  son funciones de rango de los matroides  $M$  y  $M^*$ , respectivamente. Haciendo uso de las relaciones entre  $r$  y  $r^*$ , podemos escribir que

$$R(M; x, y) = \sum_{A \subseteq S} x^{r(S)-r(A)} y^{|A|-r(A)}.$$

Directamente de la definición obtenemos:

$$R(M; x, y) = R(M^*; y, x);$$

$$R(M; x, y) = 1 + y, \text{ si } M \text{ es un lazo};$$

$$R(M; x, y) = 1 + x, \text{ si } M \text{ es un puente}.$$

Se propone que a título de ejercicio se demuestre el siguiente teorema:

**Teorema 76.** El polinomio  $R(M; x, y)$  es un invariante de Tutte—Grothendieck para cualquier clase de matroides  $K$ .

El polinomio  $T(M; x, y) = R(M; x-1, y-1)$  para matroides gráficos fue estudiado por Tutte y por eso lleva el nombre *polinomio de Tutte*.

Resultó que todos los invariantes de Tutte—Grothendieck de una clase arbitraria  $K$  podían ser obtenidos del polinomio de Tutte. Por ejemplo:

a)  $T(M; 2, 2) = 2^{|S|}$ ;

b)  $T(M; 1, 1)$  es igual al número de bases del matroide  $M$ ;

c)  $T(M; 2, 1)$  es igual al número de conjuntos independientes del matroide  $M$ ;

d)  $T(M; 1, 2)$  es igual al número de conjuntos generadores del matroide  $M$ ;

e)  $T(M; 0, 0) = 0$ ;

f)  $T(M; 1, 0) = (-1)^{r(S)}\mu(0, 1)$ , donde  $\mu$  es la función de Moebius del retículo de superficies del matroide  $M$ .

Más aún, a través del polinomio de Tutte se expresa el polinomio característico  $P(M; \lambda)$  del matroide  $M$ :

$$P(M; \lambda) = (-1)^{r(S)}T(M; 1 - \lambda, 0).$$

Sin embargo, incluso matroides no isomorfos pueden poseer un mismo polinomio de Tutte. Por ejemplo, los matroides  $M_1$  y  $M_2$  de rango 3 sobre el conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , expuestos en la fig. 8.40, son precisamente de esta clase.

$$T(M_1; x, y) = T(M_2; x, y) = x^3 + 3x^2 + x^2y + 2y + 5xy + 2xy^2 + 2y + 4y^2 + 3y^3 + y^4.$$

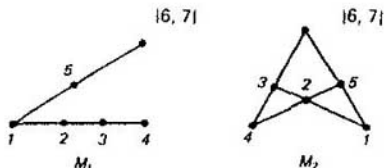


Fig. 8.40.

No obstante,  $M_1$  se diferencia de  $M_2$  en una cantidad distinta de ciclos, superficies y cóatomos.

Los matroides de Tutte realizan una conexión de los matroides con los códigos y empaques lineales, debido a lo cual toda una serie de problemas de la teoría de codificación se reduce a los problemas de la teoría de matroides. Veamos, por ejemplo, el problema de cálculo de la distribución de los pesos de un código.

Sea  $A$  una matriz de orden  $k \times n$  con coeficientes de  $GF(q)$ . Vinculemos con cada tal matriz de rango  $k$  los siguientes dos objetos:  $U$ , que representa el código lineal sobre  $GF(q)$ , es decir, el espacio de filas de la matriz  $A$ ;  $M$ , que es el matroide de las columnas de la matriz  $A$ . Sea  $u \in U$ . Se denomina peso  $w(u)$  del vector  $u$  al número de sus componentes no nulas. Un polinomio

$$A(U, z) = \sum_{u \in U} z^{w(u)} = \sum_{i=0}^n A_i z^i,$$

donde  $A_i$  es el número de vectores  $u \in U$  con  $w(u) = i$  y lleva el nombre de *numerador ponderal* del código  $U$ .

**Teorema 77.** La función  $f$ , definida para todas las  $(k \times n)$ -matrices  $A$  sobre  $GF(q)$  por medio de

$$f(A) = \frac{1}{(1-z)^k z^{n-k}} A(U; z),$$

es un invariante de Tutte—Grothendieck. Más aún,

$$f(A) = T\left(M; \frac{1 + (q-1)z}{1-z}, \frac{1}{z}\right),$$

donde  $T(M, x, y)$  es el polinomio de Tutte.

A título de ilustración de la relación recíproca entre los códigos y matroides puede deducirse la fórmula de Mac Williams (que relaciona el numerador ponderal con el numerador ponderal del código que el es dual) basándose en la dualidad correspondiente del polinomio de Tutte.

**Problema crítico.** Sea  $V(n, q)$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el campo finito  $GF(q)$ , y sea  $S$  un subconjunto del espacio  $V(n, q)$  que no contiene vector nulo. El subespacio de  $V(n, q)$  de dimensión  $n-1$  recibe el nombre de hiperplano. El problema crítico para el conjunto  $S$  consiste en la búsqueda de tal número positivo entero mínimo  $k$ , para el cual se en-

contrarán  $k$  hiperplanos  $H_1, H_2, \dots, H_k$  tales que  $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_k \cap S = \emptyset$ ; dicho de otro modo, para todo  $p \in S$  existe por lo menos un solo hiperplano  $H_i$ , tal que  $p \notin H_i$ .

Por cuanto para cada hiperplano  $H_i$  del espacio  $V(n, q)$  existe tal funcional lineal  $L_i$  sobre  $V(n, q)$  con valores en  $GF(q)$ , tales que  $H_i = L_i^{-1}(0)$ , entonces el problema crítico puede enunciarse de otro modo. Diremos que una sucesión  $(L_1, L_2, \dots, L_k)$  de funcionales lineales *distingue* el conjunto  $S$ , si para todo  $p \in S$  existe un índice  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) tal que  $L_i(p) \neq 0$ . Un número positivo entero mínimo  $k$ , para el cual la sucesión  $(L_1, L_2, \dots, L_k)$  de funcionales lineales distingue el subconjunto  $S$  de  $V(n, q)$ , se denomina *exponente crítico* del conjunto  $S$ . Entonces el problema crítico consiste precisamente en la búsqueda del exponente crítico.

Si  $S$  consta de un solo vector nulo, su exponente crítico es igual a 1. En el caso cuando  $S$  consta de todos los vectores no nulos del espacio  $V(n, q)$ , su exponente crítico es igual, por lo visto, a  $n$ .

**Teorema 78.** Sea  $M$  un matroide lineal generado por un subconjunto  $S$  de  $V(n, q)$  (véase el ejemplo 5 en el § 8.4) y sea  $P(M; \lambda)$  su polinomio característico. Entonces, el número de sucesiones ordenadas  $(L_1, \dots, L_k)$  de funcionales lineales sobre  $V(n, q)$ , que distinguen el subconjunto  $S$ , es igual a  $P(M, q^k)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $A \subseteq S$  y que  $g_k(A)$  es el número de sucesiones ordenadas  $(L_1, L_2, \dots, L_k)$  de funcionales lineales sobre  $V(n, q)$  tales que  $A \subseteq \bigcap_{i=1}^k L_i^{-1}(0)$ . Sea  $f_k(A)$  el número de sucesiones  $(L_1, L_2, \dots, L_k)$  para las cuales  $A$  es exactamente igual a la intersección de los núcleos, es decir,  $A = \bigcap_{i=1}^k L_i^{-1}(0)$ . Entonces,  $g_k(A) = \sum_{B: A \subseteq B} f_k(B)$  y, en virtud de la fórmula de inversión de Moebius (véase teorema 55), tenemos

$$f_k(A) = \sum_{B: A \subseteq B} \mu(A, B) g_k(B).$$

Sea  $W_B$  una cápsula lineal de los vectores de  $B$  en  $V(n, q)$ . Entonces,  $W_B$  es un subespacio del espacio  $V(n, q)$  y  $\dim B = r(B)$ , donde  $r$  es la función de rango del matroide  $M$ . Observemos que  $g_k(B)$  es igual al número de sucesiones ordenadas  $(L_1, L_2, \dots, L_k)$  de funcionales lineales sobre el factor-espacio  $V(n, q)/W_B$ . Por cuanto  $\dim V(n, q)/W_B = r(S) - r(B)$ , entonces

$$g_k(B) = q^{(r(S) - r(B))k}.$$

Por consiguiente,  $f_k(A) = \sum_{\substack{B: A \subseteq B \\ \subseteq S}} \mu(A, B) q^{(r(S) - r(B))k}$ . Al poner  $A = \emptyset$ , obtenemos

$$f_k(\emptyset) = \sum_{B: B \subseteq S} \mu(0, B) q^{(r(S) - r(B))k} = P(M; q^k),$$

donde  $f_k(\emptyset)$  es precisamente el número de sucesiones ordenadas  $(L_1, L_2, \dots, L_k)$  de las funcionales lineales sobre  $V(n, q)$  que distinguen  $S$ . El teorema está demostrado.

**Corolario 13.** Sea  $M$  un matroide generado por el subconjunto  $S$  de vectores no nulos del espacio  $V(n, q)$  de dimensión  $n$  sobre el campo  $GF(q)$ . Entonces, el polinomio característico  $P(M; \lambda)$  del matroide  $M$  posee la siguiente propiedad:

$$P(M; q^k) = 0 \text{ para } k = 0, 1, \dots, c-1;$$

$$P(M; q^k) > 0 \text{ para } k \geq c,$$

donde  $c$  es la exponente crítica del conjunto  $S$ . Además,  $c \leq n$  para todos los subconjuntos  $S$  de  $V(n, q)$ .

Crapo y Rota suponen que el problema crítico es «el problema central en la teoría combinatoria extremal» (véase [104]). En efecto, toda una serie de problemas combinatorios se enuncia adecuadamente en términos de esta teoría. Por ejemplo, la hipótesis de cuatro colores, mencionada más arriba, se enuncia así: si  $M$  es un matroide cíclico de un simple grafo planario, tendremos para las exponentes críticas:  $c(M; 2) \leq 2$ , y  $c(M; 4) \leq 1$ . Sin embargo, se han obtenido muy pocos resultados generales concernientes al problema crítico. Se ha demostrado, por ejemplo, que

a) la exponente crítica de una geometría lineal finita sobre  $GF(q)$  es igual a 1, cuando y sólo cuando dicha geometría es isomorfa al submatroide de la geometría afin  $AG(n, q)$ ;

b) las raíces del polinomio característico  $P(G; \lambda)$  de una geometría superresoluble  $G$  son números positivos iguales a  $|A_{i+1} \setminus A_i|$  (la geometría combinatoria  $G = (S, \mathcal{A})$  se denomina *superresoluble*, si existen superficies modulares  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n = S$ , tales que  $r(A_i) = i$ . La superficie  $A$  de la geometría  $G$  se denomina *modular*, si forma un par modular con todas las demás superficies de la geometría  $G$ ).

**Ejercicios. 5.** Sea  $S$  un conjunto finito y sea  $\Pi = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  una partición del conjunto  $S$ . Diremos que un subconjunto  $A \subseteq S$  es independiente, si ningún par de elementos de  $A$  yace en un mismo bloque de la partición  $\Pi$ , es decir,  $|A \cap s_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ . Muéstrase que el par  $(S, \mathcal{F})$ , donde  $\mathcal{F}$  es una familia de todos los subconjuntos independientes del conjunto  $S$ , representa un matroide llamado *matroide de partición*.

6. Sea  $G(V, E)$  un grafo orientado sin lazos, y  $S, T \subseteq V$ . Diremos que un subconjunto  $A \subseteq S$  es independiente, si existe  $|A|$  caminos que van de los vértices del conjunto  $A$  a los del conjunto  $T$  en el grafo  $G$  y que no se intersecan por los vértices. Muéstrase que el par  $(S, \mathcal{F})$ , donde  $\mathcal{F}$  es una familia de todos los subconjuntos independientes del conjunto  $S$ , representa un matroide denominado *gammoide* (indicación: hágase uso del lema 6 del § 8.1)

7. Demuéstrase que cada matroide transversal es un gammoide. ¿Es cierta la afirmación inversa?

8. Muéstrase que un matroide es gammoide cuando y sólo cuando su contracción es un matroide transversal.

El resumen de los resultados referentes a los gammoides se da en [14].

Una peculiaridad de la estructura matroidal consiste en que cualquier conjunto independiente máximo por inclusión es también máximo por el



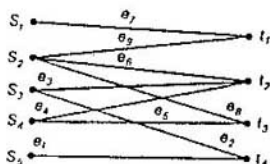


Fig. 8.41.

número de elementos. El problema de hallar los subconjuntos independientes máximos por inclusión del matroide es trivial; basta añadir los elementos hasta que sea posible. En esto precisamente está basado el algoritmo «ávido» (véase § 6.3).

**Ejercicio. 9.** Muéstrase que si el algoritmo «ávido» elige  $k$  elementos, esos tienen un peso máximo entre todos los conjuntos independientes compuestos de  $k$  o menos elementos.

**10.** Supongamos que se tiene un conjunto de tareas cuyo cumplimiento con ayuda de un ordenador requiere un lapso de tiempo igual. Además, se conoce el plazo extremal de cumplimiento de cada tarea. Muéstrase que el juego de todos los subconjuntos de tareas, que pueden realizarse según un horario, forma el conjunto de todos los conjuntos independientes de cierto matroide.

**11.** Supongamos que en el ejercicio 10 se paga una multa por cada tarea no realizada. ¿En qué orden han de realizarse las tareas para que la multa total sea mínima?

**12.** Supongamos que a todos los elementos del matroide  $M$  les han sido asignados los pesos no negativos. Demuéstrase que

a) para todo  $x$  perteneciente a la base del matroide  $M$ , no existe un ciclo  $C$ , tal que  $x \in C$  y  $x$  posea el menor peso entre todos los  $y \in C$ ;

b) para cada elemento  $x$  de peso máximo, perteneciente a la base, existe por lo menos un cociclo  $C^*$ , tal que  $x \in C^*$ , y  $x$  tenga el mayor peso entre todos los elementos de  $C^*$ .

**13.** Sea  $M$  matroide sobre el conjunto  $S$ , a cuyos elementos les han sido asignados pesos no negativos, y sea  $B$  una familia de todas las bases, mientras que  $C^*$  es una familia de todos los cociclos del matroide  $M$ . Muéstrase que en este caso

$$\min_{K \in B} \max_{x \in K} w(x) = \max_{C^* \in C^*} \min_{x \in C^*} w(x).$$

Veamos un grafo bipartido  $G(SUT, E)$  (fig. 8.41). Un subconjunto  $\{e_2, e_4, e_9\} \subseteq E$  es una combinación de pares máxima por inclusión del grafo  $G$ , el cual no es máximo por el número de elementos. Por consiguiente, el par  $(E, \mathcal{P})$ , donde  $\mathcal{P}$  es una familia de combinaciones de pares, no es matroide. Sin embargo, la familia de combinaciones de pares  $\mathcal{P}$  del grafo posee una estructura bastante buena: es una intersección de dos matroides, es decir, pueden encontrarse dos tales matroides,  $(E, \mathcal{I}_1)$  y  $(E, \mathcal{I}_2)$  sobre el conjunto  $E$  de aristas del grafo con familias de conjuntos independientes  $\mathcal{I}_1$  y  $\mathcal{I}_2$ , respectivamente, que  $\mathcal{P} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ . Por ejemplo, definamos para el grafo expuesto en la fig. 8.41 dos matroides de partición  $(E, \mathcal{I}_1)$  y  $(E, \mathcal{I}_2)$  (véase ejercicio 5), poniendo  $\Pi_1 = \{\{e_7\}, \{e_6, e_8, e_9\}, \{e_2, e_3\}, \{e_4, e_5\}, \{e_1\}\}$ , y  $\Pi_2 = \{\{e_9, e_7\}, \{e_3, e_4, e_6\}, \{e_8, e_5\}, \{e_2, e_1\}\}$ . No es difícil notar que el subconjunto  $A \subseteq E$  es una combinación de pares en el grafo  $G(SUT, E)$  cuando y sólo cuando  $A$  es independiente tanto en el matroide  $(E, \mathcal{I}_1)$  (ningún par de aristas de  $A$  tiene vértice común en  $S$ ), como también en el matroide  $(E,$

$\mathcal{S}_2$ ) (ningún par de aristas de  $A$  tiene vértice común en  $T$ ). Por consiguiente,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ . De este modo, el problema sobre una combinación de pares en un grafo bipartido puede considerarse como un problema de búsqueda del subconjunto máximo del conjunto  $E$  que sea independiente en dos matroides a la vez.

**Ejercicio 14.** Sea  $S$  un conjunto finito y  $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_n\}$  una familia de subconjuntos del conjunto  $S$ . Se pregunta si existe o no tal subconjunto  $H \subseteq S$  que  $|H| = n$  y  $|H \cap S_i| = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ . Enúnciese este problema como un problema de intersección de un matroide transversal (ejemplo 9) y de un matroide de partición (véase ejercicio 5).

Sean dos matroides,  $M_1(S, \mathcal{S}_1)$  y  $M_2 = (S, \mathcal{S}_2)$  sobre el conjunto  $S$ , a cada elemento del cual le está asignado el peso  $w(s)$ , donde  $s \in S$ . Se requiere encontrar un subconjunto  $I \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  tal que la suma  $\sum_{s \in I} w(s)$  sea máxima.

**Teorema 79** (de Edmonds). El problema de intersección ponderada de los matroides es equivalente al problema de programación lineal

$$\max \left( \sum_{s \in S} w(s) \cdot x(s) \right)$$

a condición de que para todo  $A \subseteq S$

$$\sum_{s \in A} x(s) \leq r_{M_1}(A) \text{ y } \sum_{s \in A} x(s) \leq r_{M_2}(A),$$

donde  $r_{M_i}$  es la función de rango del matroide  $r_{M_i}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $x(s)$  es una función binaria sobre el conjunto  $S$ .

La relación existente entre la teoría de los matroides y la optimización combinatoria fue revelada por primera vez en [142]. En la misma obra Edmonds anunció la solución polinomial del problema sobre la intersección de matroides, cuyo algoritmo de resolución puede encontrarse en [143, 144]. Los algoritmos y su argumentación para los problemas de optimización combinatoria de estructura matroidal están bien descritos en [145].

Solamente hemos hecho un breve resumen de las tendencias principales de la teoría de los matroides. Para el estudio ulterior del problema se recomiendan las obras [1, 34, 104...109, 138 y 145].

## BIBLIOGRAFÍA

1. M. Aigner, *Combinatorial Theory*. Heidelberg, 1979.
2. A. Kaufmann, *Introduction a la combinatorique en vue des application*, Dunon, Paris, 1968.
3. В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. М., Наука, 1982. (V. N. Sachkov, *Introducción a los métodos combinatorios de las matemáticas discretas*.)
4. M. Hall, *Combinatorial Theory*, Toronto, 1967.
5. С. В. Яблонский, *Введение в дискретную математику*. М., Наука, 1979. (S. V. Yablonski, *Introducción a las matemáticas discretas*.)
6. Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко, *Сборник задач по дискретной математике*. М., Наука, 1977. (G. P. Gavrilov, A. A. Sapozhenko, *Problemas de las matemáticas discretas*.)
7. *Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения* (под ред. Рыбникова К. А.). М., Наука, 1982. (Análisis combinatorio. Problemas y ejercicios, dirigido por Rybnikov K. A.)
8. L. Lovasz, *Combinatorial problems and Exercises*. Budapest. Akademiai Kiado, 1979.
9. G. Birkhoff, T. Barteel, *Modern applied algebra*. New-York, 1970.
10. *Applied Combinatorial Mathematics*. Ed. by E. Beckenbach. New-York, 1964.
11. Г. П. Егорычев, *Интегральные представления и вычисление комбинаторных сумм*. — Новосибирск: Наука, 1977. (G. P. Egor'ychev, *Representaciones integrales y cálculo de las sumas combinatorias*.)
12. *Перечислительные задачи комбинаторного анализа/ Под редакцией Г. П. Гаврилова*. — М.: Мир, 1979. (Problemas enumerativos del análisis combinatorio.)
13. М. Л. Платонов, *Комбинаторные числа класса отображений и их приложения*. М. Наука, 1979. (M. L. Platónov, *Números combinatorios de la clase de aplicaciones y su empleo*.)
14. J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*. New-York, 1958.
15. R. Graham, *Rudiments of Ramsey Theory*, American Math. Soc., Providence, 1981.
16. G. Andrews, *Theory of partitions*, Reding, Mass. 1976.
17. M. Marcus, H. Minc, *Survey of matrix theory and matrix inequalities*, 1964.
18. H. Minc, *Permanents*. Reding. Mass. USA, 1978.
19. В. А. Носов, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, *Комбинаторный анализ. Итоги науки и техники*, 1981, т. 18, с. 53—93. (V. A. Nósov, V. N. Sachkov, V. E. Tarakanov, *Análisis combinatorio*.)
20. J. Dénes, A. D. Keedwell, *Latin squares and their applications*. Budapest. Akadémiai Kiado, 1974.
21. F. Kármész, *Introduction to finite geometry*, Akadémiai Kiado, Budapest, 1976.
22. P. Cameron, J. van Lint, *Graph theory, coding theory and block-designs*. Cambridge Univ., 1975.
23. R. Busacker, Th. Saaty, *Finite Graphs and networks*. Mc Graw Hill Book Co.
24. N. Christofides, *Graph theory. An algorithmic approach*. London, 1975.
25. O. Ore, *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc., 1962.
26. В. К. Леонтьев, *Дискретные экстремальные задачи. Итоги науки и техники*, 1979, т. 16, с. 39—101. (Leóntiev V. K. *Problemas extremales discretos*.)
27. H. Saaty, *Optimization in Integers and Related Extremal Problems*. New-York, 1970.

28. L. Ford, D. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton, 1962.
29. В. Н. Сачков, Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978. (V. N. Sachkov, *Métodos probabilísticos en el análisis combinatorio*.)
30. P. Erdős, J. Spencer, *Probabilistic methods in combinatorics*. Budapest, 1974.
31. G. Birkhoff, *Lattice Theory*. Providence, 1967.
32. G. Grätzer, *General Lattice Theory*. Berlin, 1978.
33. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Мир, 1982 (L. Skorniakov, *Elementos de la teoría de las estructuras*.)
34. Welsh D. J. A. *Matroid theory*. London: Academic Press, 1976.
35. R. L. Graham, Partitions of a finite set. *J. Combinatorial Theory*, 1966, v. 1, N 2, p. 215—223.
36. A. Rényi, On a problem of information theory. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 1961, v. 6, p. 505—516.
37. G. Katona G. On separating systems of a finite set. *J. Combinatorial Theory*, 1966, v. 1, N 2, p. 174—194.
38. П. Эрдеш, Д. Клейтман, Экспериментальные задачи о подмножествах конечного множества. — М.: Мир, 1976, с. 115—130. (P. Erdos, J. Spencer, *Probabilistic Methods in combinatorics*.)
39. P. Erdős, Ko Chao, R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math.*, ser. 2, 1961, v. 12, n 48, p. 313—320.
40. P. Turan, Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatrol. *Mat. és Fiz. Lapok*, 1941, vol. 48, N 3, p. 436—453.
41. А. Ф. Сидоренко, О проблеме Турана для 3-графов. В кн.: *Комбинаторный анализ*. Вып. 6. М.: Изд-во МГУ, 1983, с. 51—57. (A. F. Sidorenko, *Sobre el problema de Turan para 3-grafos*.)
42. В. И. Богдашов,  $(A_1, \dots, A_n)$ -перманенты и их приложения. *Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., мех.* 1985, № 3, с. 18—22. (V. I. Bogdanov,  $(A_1, \dots, A_n)$ -permanentes y sus aplicaciones.)
43. R. Mullin, G. C. Rota, On the foundations of combinatorial theory III: theory of binomial enumeration. — In: *Graph theory and its applications*, N. Y.: Academic Press, 1970. p. 167—213.
44. A. P. Giunand, The umbral method: a survey of elementary mnemonic and manipulative uses. — *Amer. Math. Monthly*, 1979, v. 86, N 3, p. 187—195.
45. F. P. Ramsey, On a problem of formal logic. — *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, 1929, v. 30, N 4, p. 264—286.
46. D. König, Über Graphen und ihre Anwendungen auf Determinantentheorie und Mengenlehre. — *Math. Ann.*, 1916, v. 77, N 4, p. 453—465.
47. A. Hadayat, W. D. Wallis, Hadamard matrices and their applications. — *Ann. Statist.*, 1978, v. 6, N 6, p. 1184—1238.
48. J. Riordan, Three-line Latin rectangles. — *Amer. Math. Monthly*, 1944, v. 51, p. 450—452.
49. М. Н. Добровольский, О четырехстрочных латинских прямоугольниках. — В кн.: *Материалы межвузовской научной конференции педагогических институтов центральной зоны*. Тула, 1968, с. 72—75. (M. N. Dobrovolski, *Sobre los rectángulos latinos de cuatro filas*.)
50. K. Yamamoto, On the asymptotic number of Latin rectangles. *Jap. J. of Math.*, 1951, v. 21, p. 113—119.
51. G. Tarry, Le probleme des 36 officiers. — *C.—R. Assoc. Fr. Acad. Sci.*, 1900, v. 1, p. 122—123; 1901, v. 2, p. 170—203.
52. H. B. Mann, The construction of orthogonal Latin squares. — *Ann. Math. Statistics*, 1942, v. 13, N 4, p. 418—423.
53. R. C. Bose, S. S. Shrikhande, E. T. Parker, Further results on the construction of mutual-

- ly orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. — *Canadian J. of Math.*, 1960, v. 12, N 2, p. 189—203.
54. J. Steiner, Combinatorische Aufgabe. — *J. Reine und Angew. Math.*, 1953, v. 45, p. 181—182.
  55. M. Reiss, Über eine Steinersche combinatorische Aufgabe welche in 45-sten Bande dieses Journal, setie 181, gestellet worden ist. — *J. Reine und Angew. Math.*, 1859, v. 56, p. 326—344.
  56. T. R. Kirkman, On a problem in combination. — *Cambridge and Dublin Math. J.*, 1847, v. 2, p. 191—204.
  57. T. R. Kirkman, Note on an unanswered prize question. — *Cambridge and Dublin Math. J.*, 1850, v. 5, p. 255—262.
  58. R. Wilson, Nonisomorphic Steiner triple systems. — *Math. Z.*, 1974, v. 135, p. 303—313.
  59. E. H. Moore, Concerning triple systems. — *Math. Ann.*, 1893, v. 43, p. 271—285.
  60. E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik*. — Oslo: 1927, p. 234.
  61. C. C. Lindner, A. Rosa, Steiner quadruple systems. — *Discrete Math.*, 1978, v. 21, p. 147—181.
  62. G. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*. New-York, 1963.
  63. J. P. M. Binet, Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques. — *J. Ec. Polyt.*, 1812, v. 9, cah. 16, p. 280—302.
  64. A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. — *J. Ec. Polyt.*, 1812, v. 10, cah. 17, p. 29—112, Oeuvres (2i).
  65. T. Muir, On a class of permanent symmetric functions. — *Proc. Roy. Soc., Edinburgh*, 1882, v. 11, p. 409—418.
  66. T. Muir, A relation between permanents and determinants. — *Proc. Roy. Soc., Edinburgh*, 1897, v. 22, p. 134—136.
  67. Г. П. Егорьев, Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов — Институт физики им. Л. В. Киреевского СО АН СССР, Препринт ИФСО—13М. Красноярск, 1980. (G. P. Egor'yev, Solución del problema de Van der Waerden para los permanentes.)
  68. Д. И. Филлиман, Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы. — *Матем. заметки*, 1981, т. 29, № 6, с. 931—938. (D. I. Filikman, Demostración de la hipótesis de Van der Waerden sobre el permanente de una matriz dos veces estocástica.)
  69. А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*. — М.: Изд-во МГУ, 1980. (Kostr'kin A. I., Manin Yu. I. Algebra lineal y geometría.)
  70. А. А. Пытов, О сигнатуре и ядре билинейной формы, связанной с перманентом. — *Успехи матем. наук*, 1984, т. 39, № 6, с. 201—202. (A. A. Panyov, Sobre la signatura y el núcleo de una forma bilineal asociada con un permanente.)
  71. V. L. Waerden, van der. Aufgabe 45. — *Iber Deutsch. Math. Verein.*, 1926, v. 35, p. 117.
  72. P. A. Mac Mahon, Researches in the theory of determinants. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, \*(24, v. 23, N 5, p. 89—135).
  73. Л. М. Брегман, Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов. Докл. АН СССР, 1973, в. 211, № 1, с. 27—30. (L. M. Bregman, Algunas propiedades de las matrices no negativas y de sus permanentes.)
  74. A. A. Schrijver, A short proof of Minc's conjecture. — *J. Combinatorial theory, ser. A*, 1978, v. 25, N 1, p. 80—83.
  75. J. M. Hammersley, An improved lower bound for the multidimensional dimer problem. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1968, v. 64, N 2, p. 455—463.
  76. Л. А. Скормяков, Проективные плоскости. — *Успехи матем. наук*, 1951, т. 6, вып. 6, с. 112—153. (L. A. Skornjakov, Planos proyectivos.)
  77. R. Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*. New-York, 1967.
  78. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*. Paris. 1958.
  79. N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, *Graph Theory*. 1736—1936. — Oxford: Clarendon Press, 1977.

80. V. Klee, Combinatorial optimization: what is the state of the art? — *Math. Oper. Research*, 1980, v. 5, N 1, p. 1—26.
81. В. Е. Бурков, С. Е. Ловецкий, Методы решения экстремальных комбинаторных задач. — *Изв. АН СССР, сер. техническая кибернетика*, 1968, № 4, с. 82—93. (V. E. Burkov, S. E. Lovétski, Métodos de resolución de los problemas combinatorios extremales.)
82. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol I. New-York, 1966.
83. R. C. Bose, S. Chowla, Theorems in additive theory of numbers. — *Comment. Math. Helv.*, 1962, v. 37, N 2, p. 141—147.
84. А. Г. Дьячков, В. В. Рыков Об одной модели кодирования для суммируемого канала с множественным доступом. — *Проблемы передачи информации*, 1981, т. 17, № 2, с. 26—39. (A. G. Djachkov, V. V. Rykov, Sobre un modelo de codificación para el canal de sumación con acceso multiplicativo.)
85. B. Lindström, On  $B_2$ -sequences of vectors — *J of Number Theory*, 1972, v. 4, N 3, p. 261—265.
86. Л. Д. Мешалкин, К обоснованию метода случайного баланса. Заповская лаборатория, 1970, т. 36, № 3, с. 18—27. (L. D. Meshalkin, Para la argumentación del método de equilibrio aleatorio.)
87. М. Б. Малютов, М. С. Пинскер, Замечания о простейшей модели метода случайного баланса. — В кн.: *Вероятностные методы исследования*. — М.: Изд-во МГУ, 1974. (M. B. Malútov, M. S. Pinsker, Notas sobre un modelo más simple del método de equilibrio aleatorio.)
88. L. Wegener, On separating systems whose elements are sets of at most  $k$  elements — *Discrete Math.*, 1979, v. 28, p. 219—222.
89. В. Н. Лузгин, Разделяющие системы разбиений конечного множества. — В кн.: *Комбинаторный анализ*. Вып. 5. — М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 39—45. (V. N. Luzgin, Sistemas separadores de particiones de un conjunto finito.)
90. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973. (A. G. Kurosh, Conferencias del álgebra general)
91. Дж. Л. Келли. Общая топология. — М.: Наука. (J. L. Cayley, Topología general.)
92. R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets. — *Ann. of Math.*, ser. 2, 1950, v. 51, N 1, p. 161—166.
93. Б. С. Стечкин, Теоремы вложения для мебиус-функции. — *Докл. АН СССР*, 1980, т. 260, № 1, с. 40—43. (B. S. Stechkin, Teoremas de encaje para las funciones de Moebius.)
95. Н. Н. Срапо, Erecting geometries. — *Ann. New-York Acad. Sci.*, 1970, v. 175, p. 89—92.
94. Н. Н. Срапо, Single-element extension of matroids. — *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 1969, v 69B, p. 55—65.
96. А. М. Ревакин, О наращиваниях комбинаторных геометрий. — *Вестн. Моск. ун-та, сер. мат., мех.*, 1976, № 4, с. 59—62. (A. M. Revjakin, Sobre alargamientos de las geometrías combinatorias.)
97. H. Q. Nguen, Constructing the free erection of a geometry. *J. Combinatorial Theory*, ser B, 1979, v. 27, N 2, p. 216—224.
98. T. Brilawsky, Modular construction for combinatorial geometries. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, v. 203, p. 1—44.
99. D. Higgs, Strong maps of geometries. — *J. Combin. Theory*, 1968, v. 5, N 2, p. 185—191.
100. D. Higgs, Maps of geometries. — *J. London Math. Soc.*, 1966, v. 41, N 4, p. 612—618.
101. H. Q. Nguen, Functors of the category of combinatorial geometry and strong maps. — *Discrete Math.*, 1977, v. 20, N 2, p. 143—158.
102. D. Lucas, Weak maps of combinatorial geometries. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, v. 206, p. 247—279.
103. P. D. Seymour, Decomposition of regular matroids. — *J. Combinatorial Theory*, ser. B, 1980, v. 28, N 3, p. 305—359.

104. H. H. Crapo, G. C. Rota, On the foundations of Combinatorial theory II: Combinatorial geometries. — Cambridge Mass.: MIT Press, 1970.
105. Дж. Х. Мейсон, Изучение матроидов как геометрических конфигураций. — М.: Мир, 1980. (J. H. Mason, Estudio de los matroides como configuraciones geométricas.)
106. B. Lindstrom, Lectures on matroids. — Stock. Univ., 1974, N 7, p. 1—43.
107. L. Mirsky, Transversal theory. — N. Y.: Academic Press, 1971.
108. R. Randow, Introduction to the theory of matroids. — Lect. Notes in Econ. and Math. Syst., 1975, v. 109, p. 1—110.
109. W. T. Tutte, Lectures on matroids — J. Res. Nat. Bur. of Standards, 1965, v. 69B, p. 1—47.
110. D. J. A. Welsh, Colouring, Flows and projective geometry. — Nieuw. arch. wisk., 1980, v. 28, N 2, p. 159—176.
111. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное управление. — Наука, 1979. (V. M. Alexeev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, Dirección optimal.)
112. В. А. Носов, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, Комбинаторный анализ — Итоги науки и техники, 1983, т. 21, с. 120—178. (V. A. Nósov, V. N. Sachkov, V. E. Tarakanov, Análisis Combinatorio.)
113. В. П. Козырев, С. В. Юшманов, Теория графов (алгоритмические, алгебраические и метрические проблемы). — Итоги науки и техники, 1985, т. -3, с. 68—117. (V. P. Kózirev, S. V. Yushmanov, Teoría de los grafos (problemas algorítmicos, algebraicos y métricos.)
114. J. Von Neumann, Lectures on continuous geometries. Inst. of advanced Studies, Princeton, N. Y., 1936.
115. G. Birkhoff, Lattice Theory. First Edition, Amer. Math. Soc., 1940.
116. F. Maeda, S. Maeda, Theory of symmetric lattices. Springer-Verlag, N. Y., 1970.
117. F. Maeda, Lattice theoretic characterization of abstract geometries. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A., 15, 1951, 87—96.
118. U. Sasaki, S. Fujiwara, The decomposition of matroid lattices. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A., 15, 1952, 183—188.
119. K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie. Fund. Math., 10, 1927, 96—115.
120. L. Mirski, Perfect H. Systems of representatives. J. Math. Anal. Applic., 15, 1966, 520—568.
121. J. T. Robacker, On network theory. RAND Corporation Research Memorandum. RM—1498, 1955.
122. F. Harary, Graph Theory. Reding, Mass., 1969.
124. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Крацов, Многогранники, графы, оптимизация. М. Наука, 1981. (V. A. Emelichev, M. M. Kovalev, M. K. Kravtsov. Poliedros, grafos, optimización.)
125. В. Е. Тараканов, Комбинаторные задачи и  $(0, 1)$ -матрицы. Наука, 1985. (V. E. Tarakanov, Problemas combinatorios y  $(0, 1)$ -matrices.)
126. Э. Майника, Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. — М.: Мир, 1981. (E. Minieka, Algoritmos de optimización en redes y grafos.)
127. Ch. Papadimitriou, k. Steiglitz, Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity, USA, Prentice-Hall, 1982.
128. M. Nakamura, M. Iri, A structural theory for submodular functions, polymatroids and polymatroid intersection. Research Memorandum RM1 81—06, University of Tokyo, 1981.
129. M. Iri, A review of recent work in Japan on principal partitions of matroids and their application. Annals of New-York Academy of Sciences 319, 1979, 306—319.
130. M. Iri, S. Fujishige, Use of matroid theory in operations research, circuits and systems theory. International Journal of Systems Science 12, 1981, 27—54.
131. N. Tomizawa, S. Fujishige, Historical survey of extensions of the concept of principal partition and their unifying generalization to hypermatroids. Systems Science Research Report N 5. Tokyo Institute of Technology, 1982.

132. S. Fujishige, Submodular systems and related topics. *Math. Programming Study*, 22, 1984, 113—131.
133. L. Mirski, *Transversal theory*. Academic Press, N. Y., 1971.
134. P. Elias, A. Feinstein, C. E. Shannon, A note on the maximum flow through a network. *IRE Trans. Inform. Theory*, 2, n 4, 1956, 117—119.
135. А. А. Зыков, Теория конечных графов. Н. Наука, 1969. (A. A. Zykov, Teoría de los grafos finitos)
136. M. Iri, Application of matroid theory to engineering systems problems. Proc. of the 6 Conference on Probability Theory. September 1—15, 1976, Brasov, Romania, Bucuresti, 1981, 107—127.
137. I. Herstein, *Noncommutative Rings*, New-York, 1968.
138. *Theory of matroids* (edited by N. White). Cambridge e.a. 1986.
139. А. М. Ревякин, Об одной конструкции в категориях комбинаторных геометрий и отображений. *ДАН СССР*, 1976, т. 229, № 5, 1055—1058. (A. M. Reviakin, Sobre una construcción en las categorías de las geometrias y aplicaciones combinatorias).
140. А. М. Ревякин, Некоторые свойства и конструкции категории комбинаторных геометрий и отображений. В кн.: *Комбинаторный анализ*. Вып. 6. М. Изд-во МГУ, 1983, 4—12. (A. M. Reviakin, Propiedades y construcciones de la categoría de las geometrias y aplicaciones combinatorias.)
141. A. W. Ingleton, *Transversal matroids and related structures*. Higher Combinatorics (Aigner, ed.), Dordrecht: Reidel 1977
142. J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm. *Math. Prog.*, 1971, 1, 127—136.
143. E. L. Lawler, Matroid intersection algorithms. *Math. Prog.*, 1975, 9, 31—56.
144. J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent subsets. *J. Res. NBS*, 1965, 69B, 67—77.
145. E. L. Lawler, *Combinatorial optimization: networks and matroids*. New York, 1976.



# Índice alfabético de materias

- Álgebra 16,41  
- de Boole 275  
- de funciones generatrices exponenciales 46  
- de incidencia 300  
- numeradora 42  
Álgebras isomorfas 41  
Algoritmo ávido 186  
- de Hellman-Kalaba 191  
- de elección de un sistema de representantes distintos 80  
- de Ford 191  
- de Little 169, 174, 179  
Árbol 151, 153  
- de esqueleto 152  
Bloque-esquema 103  
- completo 105  
- incompleto 105  
- - equilibrado (BIB) 105  
- - parcialmente equilibrado (PBIB) 105  
- simétrico 106  
Bosque 151  
Combinación 17  
Configuración 8  
- de Desargues 133  
- de Fano 139  
- de Pappus 133, 134  
Corte de un grafo 155  
Cuadrado latino 93, 96, 97  
Encaje (inmersión) 10  
Enlace de los grupos (Gruppenkranz) 71  
Espacio con métrica 117  
- de Minkowski 117  
- proyectivo clásico 135  
Función de altura (de rango) 276  
- generatriz 39  
- - de Dirichlet 50  
- - de distribución de las probabilidades 65  
- - exponencial 46, 47  
- de una magnitud aleatoria bidimensional 63  
- - de momentos centrales 65  
- - de momentos factoriales 65  
- - de momentos ordinarios 65  
- - ordinaria 41  
- modular 239  
- de rango generalizada 355  
- de recubrimiento 301  
- submodular 295  
Geometría proyectiva 132, 135  
Grafo 144, 145  
- bipartido 146, 249  
- completo 146  
- euleriano 149  
- de Ferrers 30  
- hamiltoniano 150  
Grafo de Kuratovski 348  
- no orientado 145  
- orientado 144  
- orientado sin contornos 251  
- planario 146, 350  
- simple 144  
- sin lazo 144  
Homomorfismo de un grupo 15  
- de un retículo 226  
Inversión de Möbius 300, 315, 321  
Isomorfismo de los grafos 144  
Matriz de adyacencia 146, 238  
- - - de un grafo 146  
- bien indecomponible 121  
- binaria 87  
- de los ciclos fundamentales 156  
- - - (contornos) de un grafo 148  
- de congruencia de dos en dos 90  
- conmutable 89  
- de los cortes fundamentales 156  
- estocástica 91  
- - por columnas 91  
- - por filas 91  
- de Hadamard 90  
- - - normalizada 90, 111  
- de incidencia 87, 148  
Matriz minimizadora 121  
- del plan estático 212, 217  
- parcialmente descomponible 121  
- dos veces estocástica 91, 121  
- - - minimizadora 125  
- (0,1) 111, 126, 211  
Matroide 324, 326  
- algebraico 333  
- binario 346  
- cíclico de los grafos 333, 335  
- cocíclico 339  
- cográfico 339  
- conexo 340  
- dual 338, 346  
- de Fano 346  
- gammoide 357  
- gráfico 334, 355  
- homogéneo 332, 346  
- isomorfo 326  
- libre 332  
- lineal 333  
- orientado 349  
- de partición 357  
- regular 347  
- representable 346  
- ternario 346  
- transversal 324, 335  
Modularidad 12  
Muestra 17  
Número de Bernoulli 59  
- ciclomático 154  
- cociclomático 154  
- de combinaciones 19  
- - - con repetición 20  
- cromático 350  
- de De Morgan 53  
- de distribuciones 24  
- de Fibonacci 56  
- de permutaciones con repetición 18  
- - - sin repetición 17  
- de Ramsey 86  
- de Stirling de 1º género 54, 65  
- - - de 2º género 27, 54, 65  
Partición 23  
- autoconjugada 30  
- conjugada 32  
- de un conjunto 12  
- de un n-conjunto 29, 31  
- de números naturales 27  
Permanente 93, 113, 114  
Permutaciones con repetición 18  
- sin repetición 18  
Polinomio cromático 322  
- - de un grafo 351  
Primera fórmula de inversión de Möbius 315  
Principio de dualidad 237  
Problema de empaques 35  
- de Euler 98  
- de experimentos de rechazo 217  
- de una mochila 160

- Problema de nombramientos 159
- de partición de conjuntos 82
- de planificación del experimento 210
- de recubrimientos 35, 162
- sobre los subconjuntos que se intersecan 34
- de Van der Waerden 116
- de un viajante de comercio 160
- Rectángulo latino normalizado** 94
- Rectángulos latinos equivalentes** 94
- Reticulo** 263
  - arguesano 292
  - de Boole (booleano) 271, 273, 274
  - con complementos relativos 274
  - completo 273
  - diamante 266
  - distributivo 249, 271, 295
  - finito 265
  - geométrico (matroidal) 282, 283, 287
  - libre 268
  - matroidal 282, 324
  - modular 267, 279
  - semimodular 276, 279
  - unimodal 286
- Segunda fórmula de inversión de Moebius** 315
- Signatura** 117
- Sistema de representantes comunes** 82
  - - - distintos 78
  - de ternas de Kirkman 101
  - - - de Steiner 101
- Subgrafo de esqueleto (grafo parcial)** 146
  - generado 146
- Sustitución** 11
- Teorema binomial** 39
  - de Birkhoff 92
  - de circulación 203
  - de Crape 344
  - de demanda y oferta 204
  - de Desargues 134
  - de Dilworth 256, 261
  - de Edmonds 334
  - de Ford 249, 250, 261
  - de Fulkerson 249, 250, 261
  - de P. Hall 79, 88, 113, 249, 250
  - Jordan-Hölder para retículos modulares 273
  - de König 88, 121, 206
  - de Menger 249, 254, 256, 261
  - de optimalidad 190
  - de Pappus 134, 136
  - de Polya 69
    - de Ramsey 36, 84, 131
  - Teorema de Rota 313
  - de Seymour 234, 285, 349
  - de Sperner 234, 285
  - de Sylvester 117
  - de Taylor 60
  - de Whitney 339
  - de Zermelo 249, 250, 261
- Teoría de los discriminantes mixtos** 117
  - de Ramsey 83
  - de Redfield-Polya 66, 154
- Ternas de Kirkman** 101
  - de Steiner 101, 111
- Topología combinatoria** 132
- Transitividad** 245
- Transversal de una matriz** 91, 114, 251

K. RIBNIKOV

**ANALISIS COMBINATORIO**  
**PROBLEMAS Y EJERCICIOS**



# **ANÁLISIS COMBINATORIO**

## **PROBLEMAS Y EJERCICIOS**

# КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Задачи и упражнения

Под редакцией К. А. Рыбникова

Москва «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы

# ANÁLISIS COMBINATORIO

## PROBLEMAS Y EJERCICIOS

Dirigido por el Prof. Dr. K. Ríbnikov



Editorial Mir Moscú

Colegio de autores: K. Ríbnikov, M. Ménshikov, A. Reviakin,  
A. Kopilova, Yu. Makárov, B. Stechkin

Traducido del ruso por K. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000693-1

©; Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1982

© traducción al español, revisada y ampliada, editorial Mir, 1989



# INDICE

Prefacio . . . . .		7
<b>CAPÍTULO I.</b>	<b>ESQUEMAS COMBINATORIOS . . . . .</b>	<b>9</b>
	§ 1. Relaciones combinatorias . . . . .	10
	§ 2. Muestras y ordenaciones . . . . .	12
	§ 3. Particiones . . . . .	14
	§ 4. Problemas mixtos . . . . .	18
<b>CAPÍTULO II.</b>	<b>MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES . . . . .</b>	<b>23</b>
	§ 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones . . . . .	24
	§ 2. Números especiales y funciones especiales . . . . .	29
	§ 3. Teorías de Polya . . . . .	39
<b>CAPÍTULO III.</b>	<b>MÉTODOS LÓGICOS . . . . .</b>	<b>45</b>
	§ 1. Método de inclusión y exclusión . . . . .	45
	§ 2. Sistemas de representantes de los conjuntos . . . . .	48
	§ 3. Teorema y números de Ramsey . . . . .	50
<b>CAPÍTULO IV.</b>	<b>TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS . . . . .</b>	<b>52</b>
	§ 1. Matrices especiales . . . . .	52
	§ 2. Rectángulos y cuadrados latinos . . . . .	56
	§ 3. Sistemas de ternas de Steiner y juegos semejantes . . . . .	60
	§ 4. Bloque-esquemas . . . . .	67
	§ 5. Problemas de Van der Waerden . . . . .	71
<b>CAPÍTULO V.</b>	<b>MÉTODOS GEOMÉTRICOS . . . . .</b>	<b>75</b>
	§ 1. Interpretaciones y problemas referentes a los grafos . . . . .	75
	§ 2. Problemas enumerativos en los grafos . . . . .	85
	§ 3. Planos finitos . . . . .	92
<b>CAPÍTULO VI.</b>	<b>SISTEMAS DE CONJUNTOS . . . . .</b>	<b>98</b>
	§ 1. Problemas extremales en los grafos e hipergrafos . . . . .	98
	§ 2. Problemas extremales sobre la partición de los números . . . . .	108
	§ 3. Constantes geométricas extremales . . . . .	145
<b>CAPÍTULO VII.</b>	<b>ANÁLISIS COMBINATORIO SOBRE LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS . . . . .</b>	<b>118</b>
	§ 1. Conjuntos parcialmente ordenados . . . . .	118
	§ 2. Reticulos . . . . .	128
	§ 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius . . . . .	143
	§ 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados . . . . .	151

<b>CAPÍTULO VIII. MATROIDES</b> . . . . .	158
§ 1. Conceptos fundamentales y ejemplos . . . . .	158
§ 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides . . . . .	174
§ 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides . . . . .	187
§ 4. Problemas mixtos en los matroides . . . . .	202
<b>RESPUESTAS, SOLUCIONES, INDICACIONES</b> . . . . .	208
Capítulo I . . . . .	208
Capítulo II . . . . .	230
Capítulo III . . . . .	259
Capítulo IV . . . . .	268
Capítulo V . . . . .	295
Capítulo VI . . . . .	327
Capítulo VII . . . . .	372
Capítulo VIII . . . . .	404
Bibliografía . . . . .	436
Índice alfabético . . . . .	438

## PREFACIO

Tras la publicación en castellano de la obra de K. A. Ríbnikov «Análisis combinatorio», la editorial «Mir» presenta ahora la versión española de «Análisis combinatorio. Problemas y ejercicios». El colectivo de autores de este libro (incluso el autor del Prefacio) se ha formado en el transcurso del trabajo conjunto en la facultad mecánico-matemática de la Universidad Estatal de Moscú M. V. Lomonósov, en la que se lleva a cabo una iniciativa importante de preparación de cuadros y de desarrollo de investigaciones científicas en el campo de la matemática discreta.

El contenido de ambos libros está estrechamente ligado entre sí y obedece a un objetivo común: ayudar al lector a asimilar tanto los hábitos de investigación de los problemas teóricos del análisis combinatorio, como la técnica de resolución de los problemas combinatorios. La experiencia enseña que el uso de estos libros hace más amplia la erudición teórica y eleva la importancia de la preparación práctica de los matemáticos jóvenes.

En la edición rusa hicieron su aportación el doctor D. Katona (RP de Hungría) y V. N. Luzguín (URSS) quienes participaron en la preparación del capítulo VI y del § 5 del capítulo IV, respectivamente, lo que influyó positivamente en el contenido de éstos.

Especialmente para la versión española K. A. Ríbnikov, A. M. Reviakin y B. S. Stechkin prepararon dos capítulos nuevos: «Análisis combinatorio en los conjuntos parcialmente ordenados» y «Matroides», como también un nuevo párrafo, «Problemas extremales sobre

la partición de los números» del capítulo VI. Han sido minuciosamente revisados los textos de los problemas, las resoluciones y las indicaciones. A nuestro parecer esto nos permitió tomar en consideración, en sumo grado, los avances ulteriores del análisis combinatorio.

*Moscu, 1988*

*K. A. Ribnikov*

## ESQUEMAS COMBINATORIOS

Introduzcamos las siguientes designaciones:

*n*-conjunto será un conjunto de *n* elementos distintos;

(*n*)-conjunto será un conjunto que contiene elementos de *n* tipos diferentes (se supone, si no se especifica de antemano, que el número de elementos de cada tipo es suficientemente grande);

*r*-muestra de cierto conjunto será una totalidad de *r* elementos (no forzosamente diferentes para el (*n*)-conjunto) de dicho conjunto.

El número de *r*-muestras de un *n*-conjunto (*r*-combinaciones) será:

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \begin{cases} 0, & \text{si } r < 0, \text{ ó bien } 0 \leq n < r; \\ n!/(r!(n-r)!), & \text{si } n \geq r \geq 0. \end{cases}$$

El número de *r*-muestras ordenadas de un *n*-conjunto (*r*-permutaciones) será:

$$A_n^r = n!/(n-r)!, \quad n \geq r \geq 0.$$

El número de *r*-muestras de un (*n*)-conjunto (combinaciones con repetición) será:

$$C_{(n)}^r = C_{n+r-1}^r.$$

El número de *r*-muestras ordenadas de un (*n*)-conjunto es igual a

$$A_{(n)}^r = n^r.$$

El número de *n*-permutaciones de un *n*-conjunto (*n*-sustituciones), cada una de las cuales contiene  $k_1$  ciclos de longitud 1,  $k_2$  ciclos de longitud 2, etc.,  $k_n$  ciclos de longitud  $n$  ( $\sum_{i=1}^n ik_i = n$ ) será:

$$P_1(k_1, \dots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n} k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

El número de permutaciones de un (*k*)-conjunto que contiene  $n_1$  elementos del primer tipo,  $n_2$  elementos del segundo tipo, etc.,  $n_h$  elementos del *h*-ésimo tipo ( $\sum_{i=1}^h n_i = n$ ), es igual a

$$P(n_1, \dots, n_h) = n!/(n_1! \dots n_h!)$$

(en particular,  $P(r, n-r) = C_n^r$ ).

## § 1. Relaciones combinatorias

1.1. Demuéstrese, por medio de los razonamientos combinatorios (es decir, empleando solamente ciertos números de combinaciones), las identidades:

$$a) C_n^h = C_{n-1}^h + C_{n-1}^{h-1}, \quad n > 0;$$

$$b) C_n^h = C_{n-1}^h + C_{n-2}^{h-1} + \dots + C_{n-h-1}^0, \quad n > h.$$

1.2. Demuéstrese la identidad

$$C_{n+m}^m = \sum_{h=0}^m C_{n+h-1}^h, \quad m, n > 0.$$

1.3. Demuéstrese, para cualquier  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ , la identidad

$$C_n^r = \sum_{h=0}^n C_{n-m}^h C_m^{r-h}.$$

1.4. Demuéstrese las identidades

$$a) \sum_{h=0}^n C_n^h = 2^n, \quad n \geq 0;$$

$$b) \sum_{h=0}^n h C_n^h = n 2^{n-1};$$

$$c) \sum_{h=0}^n h^2 C_n^h = n(n+1) 2^{n-2}.$$

1.5. Demuéstrese, con ayuda de los razonamientos combinatorios, la identidad

$$\sum_{h=0}^n C_n^h (m-1)^{n-h} = m^n.$$

1.6. Demuéstrese la identidad

$$\sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = k^n,$$

donde la sumación se extiende a todas las particiones ordenadas de  $n$  en  $k$  sumandos:  $n = n_1 + \dots + n_k$ ,  $n_i \geq 0$  son números enteros.

1.7. a) Demuéstrese la identidad

$$\sum_{m_1, \dots, m_q} C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_q}^{m_q} = C_n^m,$$

donde  $n = \sum_{i=1}^q n_i$ , los números  $n_i$  son arbitrarios, y la sumación se extiende a todos los juegos de números  $m_1, \dots, m_q$  tales que

$$m = \sum_{i=1}^q m_i, \quad 0 \leq m_i \leq n_i.$$

b) Demuéstrase que

$$\sum C_{n_1+m_1-1}^{m_1} C_{n_2+m_2-1}^{m_2} \dots C_{n_q+m_q-1}^{m_q} = C_{n+m-1}^m,$$

$$n = \sum_{i=1}^q n_i, \quad m = m_1 + \dots + m_q,$$

donde la sumación se realiza respecto de los juegos  $(m_1, \dots, m_q)$ .

1.8. Demuéstrase que

$$\frac{(C_{n+1}^{r+1} - C_n^r) C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2 - C_{n+1}^r C_{n-1}^r} = r, \quad n > 1, \quad 0 < r < n.$$

1.9. Demuéstrase que

$$\sum_{x=1}^n \frac{C_{x-1}^{x-1}}{C_{x-1}^{x-1}} = \frac{2}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

1.10. Demuéstrase que

$$\sum_{x=1}^n \frac{C_{x-1}^{x-1}}{C_{x+q}^{x+q}} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}, \quad n \geq 1.$$

1.11. Demuéstrase la identidad

$$\sum_{x=0}^n \frac{C_n^x C_n^x}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

1.12. Demuéstrase que

$$a) \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} 2^{n-2i} = \frac{3^n + 1}{2};$$

$$b) \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} k^{n-2i} = \frac{(k+1)^n + (k-1)^n}{2}.$$

1.13. Demuéstrase para cualquier  $p = 0, 1, \dots, n$  la identidad

$$\sum_{x=0}^m C_{p+x-1}^x C_{n+m-p-x-1}^{m-x} = C_{n+m-1}^m.$$

1.14. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = C_{n+m}^{n+1}.$$

1.15. Demuéstrese la identidad

$$C_{n+m}^m = \sum P(k_1, \dots, k_m, n - k_1 - k_2 - \dots - k_m + 1),$$

donde la sumación viene extendida a todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m.$$

1.16. Supongamos que para  $n, r > 0$  enteros se tiene:  $C_{-n}^r = (-1)^r C_{n+r-1}^r$ . Demuéstrese que para cualquier  $r$  natural y  $n$  entero se verifica la igualdad

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}.$$

## § 2. Muestras y ordenaciones

1.17.  $n$  hombres ( $n > 2$ ) se encuentran sentados a una mesa redonda. Convengamos en considerar coincidentes dos disposiciones respecto a los sitios, siempre que cada hombre tenga los mismos vecinos en ambos casos. ¿Cuántos son los modos de sentarse a la mesa?

1.18. ¿Mediante cuántos métodos pueden sentarse a una mesa redonda  $n$  hombres y  $n$  mujeres de tal modo que de cada dos personas de un mismo sexo ninguna esté sentada al lado de otra?

1.19. De una baraja que contiene 52 cartas se sacaron 10. ¿En cuántos casos entre las cartas sacadas habrá:

a) por lo menos un as; b) exactamente un as; c) no menos de dos ases; d) exactamente dos ases?

1.20. ¿Mediante cuántos procedimientos se pueden componer tres pares de  $n$  ajedrecistas?

1.21. ¿Cuántas funciones con valores en un conjunto de  $m$  elementos pueden construirse, si las funciones citadas dependen de  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$ , donde  $x_i$  puede tomar uno de  $k_i$  valores?

1.22. ¿Cuántos divisores tiene el número  $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ , donde  $p_i$  son diferentes números primos distintos de la unidad y  $\alpha_i$  son ciertos números naturales? ¿A qué es igual la suma de los divisores?

1.23. ¿Cuántas permutaciones pueden componerse de  $n$  elementos, en las cuales los  $m$  elementos dados no se disponen juntos en cualquier orden?

1.24. ¿Cuántos son los números desde 0 hasta  $10^n$ , en los cuales no figuran cifras iguales sucesivas?



1.25. ¿Mediante cuántos métodos se pueden escoger 6 cartas de una baraja, que contiene 52 cartas, de tal modo que entre las cartas sacadas se encuentren cartas de cada palo?

1.26. ¿Cuántos son los números naturales de  $n$  cifras en los que éstas se disponen en orden no decreciente?

1.27. <sup>1)</sup> Hállese el número de métodos que permiten repartir  $n$  bolas diferentes entre  $m$  urnas distintas?

1.28. ¿Cuántos son los métodos que permiten colocar  $n$  bolas iguales en  $m$  urnas diferentes?

1.29. ¿Mediante cuántos métodos pueden colocarse  $n$  bolas iguales en  $m$  urnas diferentes, observándose las siguientes condiciones:

a) no hay urnas vacías;

b) en la segunda urna hay  $k$  bolas;

c) en las primeras  $s$  urnas hay  $a_1, a_2, \dots, a_s$  bolas, respectivamente ( $a_1 + a_2 + \dots + a_s \leq n$ );

d) en la  $i$ -ésima urna se encuentran no menos de  $a_i$  bolas ( $i = 1, 2, \dots, m$ )?

1.30. ¿Cuántos son los métodos que permiten colocar en  $m$  urnas diferentes  $n_1$  bolas blancas,  $n_2$  bolas negras y  $n_3$  bolas azules?

1.31. Hállese el número de métodos de distribución de  $n$  bolas iguales entre a) dos urnas, b) tres urnas, c)  $i$  urnas, todas ellas indistinguibles. Obténgase la relación recurrente para el caso c).

1.32. ¿Cuántos son los métodos para colocar  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  diferentes bolas en  $k$  urnas distintas de tal modo que en la primera urna caigan  $n_1$  bolas, en la segunda  $n_2$ , etc., en la  $k$ -ésima urna,  $n_k$  bolas?

1.33. Hállese el número de métodos de colocación de  $n$  bolas diferentes en  $m$  urnas de tal modo que  $m_1$  urnas contengan  $p_1$  bolas cada una;  $m_2$  urnas,  $p_2$  bolas, etc.,  $m_h$  urnas,  $p_h$  bolas ( $m = m_1 + \dots + m_h, n = m_1 p_1 + \dots + m_h p_h$ ), si

a) las urnas son diferentes;

b) las urnas, en las que están contenidas un número igual de bolas, son indistinguibles.

1.34. a) ¿Cuántos son los números de  $n$  cifras, en los cuales la suma de las cifras es igual a  $k$ , donde  $k \leq 9$  (la primera cifra es distinta de cero)?

b) El mismo problema, pero para los números de 0 a  $10^n$ .

1.35. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden componerse, empleando las cifras del número 75 226 522?

1.36. ¿Cuántas sucesiones de longitud  $n + m$  pueden componerse a partir de  $n$  ceros y  $m$  unidades, en cuya notación el número total de pares 01 y 10 sería igual a: a)  $2r - 1$ ; b)  $2r$ ?

1.37. Hállese el número  $S$  tal que entre los números del primer millar haya exactamente 10 números, en cada uno de los cuales la suma de las cifras sea igual a  $S$ .

<sup>1)</sup> En los problemas 1.27—1.33 la capacidad de las urnas se considera ilimitada.

1.38. ¿Cuál es la probabilidad de que, al comprar un billete de lotería deportiva, puedan adivinarse:

- a)  $k$  números ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) de 49;
- b) por lo menos  $k$  números?

1.39. LOTERÍA GENOVESA. Los participantes de esta lotería compran billetes, en los cuales figuran los números del 1 al 90. Algunos billetes tienen a la vez 2, 3, 4 ó 5 números. En el día de sorteo se escogen al azar 5 fichas con los números del 1 al 90. Ganan aquellos participantes en los billetes de los cuales todos los números resultan ser entre los elegidos. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio en el caso de un billete comprado con un número? ¿Con  $k$  números ( $1 \leq k \leq 5$ )?

1.40. Se analizan todas las sucesiones de longitud  $n$  de los números  $0, 1, \dots, k$ . ¿Cuántas son las sucesiones entre ellas que contienen un número par de ceros?

1.41. Para ingresar en un centro de enseñanza superior es necesario dar cuatro exámenes. Se supone que para el ingreso es suficiente adquirir 17 puntos. ¿De cuántas formas el que ingresa puede dar los exámenes acumulando no menos de 17 puntos y no sacando ni un solo dos?

1.42. En un portamonedas hay monedas de 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 y 50 kopeks de valor, a razón de una moneda de cada valor. ¿De cuántos modos se puede pagar, empleando dichas monedas, por una compra de 73 kopeks de valor?

1.43. Por el envío de un impreso hay que pagar 18 kopeks. ¿De cuántos modos puede pagarse el envío con sellos de 4, 6 y 10 kopeks de valor, si dos modos que se diferencian en el orden de los sellos se consideran distintos?

### § 3. Particiones

1.44. Dese la explicación de las siguientes igualdades:

$$a) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) x^n,$$

donde  $\lambda(n)$  es el número de representaciones de  $n$  en forma de la suma no ordenada de los sumandos enteros positivos desiguales;

$$b) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n z) = 1 + \prod_{n,m=1}^{\infty} \lambda(n, m) x^n z^m,$$

donde  $\lambda(n, m)$  es el número de representaciones de  $n$  en forma de la suma no ordenada de  $m$  sumandos enteros positivos desiguales;

$$c) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(n) x^n,$$

donde  $\bar{\mu}(n)$  es el número de representaciones no ordenadas de  $n$  en forma de la suma de sumandos enteros positivos iguales o desiguales;

$$d) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n z} = 1 + \sum_{n, m=1}^{\infty} \mu(n, m) x^n z^m,$$

donde  $\mu(n, m)$  es el número de representaciones no ordenadas de  $n$  en forma de la suma de  $m$  sumandos enteros positivos, iguales o desiguales;

$$e) \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^{2n-1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} v(n) x^n,$$

donde  $v(n)$  es el número de representaciones de  $n$  en forma de la suma no ordenada de sumandos impares positivos desiguales;

$$f) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2n-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) x^n,$$

donde  $\rho(n)$  es el número de representaciones de  $n$  en forma de la suma no ordenada de sumandos impares positivos iguales o desiguales;

$$g) \frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_m(n) x^n,$$

donde  $\sigma_m(n)$  es el número de particiones ordenadas o la cantidad de representaciones de  $n$  en forma de la suma ordenada de no más de  $m$  sumandos enteros no negativos iguales o desiguales, o bien el número de soluciones de la ecuación  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , donde  $x_i \geq 0$  son los números enteros,  $i = 1, \dots, m$ ;

$$h) \prod_{i=1}^m \frac{1}{1-x^{n_i}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n_1, \dots, n_m, n) x^n,$$

donde  $\sigma(n_1, \dots, n_m, n)$  es el número de soluciones de la ecuación  $n = n_1 x_1 + \dots + n_m x_m$  y  $x_i \geq 0$  son los números enteros;

$$i) \left( \frac{1-x}{1-x} \right)^m = \sum_{n=m}^{\infty} \sigma(m, n) x^n,$$

donde  $\sigma(m, n)$  es el número de particiones ordenadas de  $n$  en  $m$  sumandos enteros positivos iguales o desiguales, o bien el número de soluciones de la ecuación  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$  y  $x_i \geq 1$  son números enteros.

1.45. Demuéstrase que el número de particiones ordenadas del número  $n$  en  $k$  sumandos naturales, es decir, el número de soluciones de la ecuación

$$n = x_1 + \dots + x_k, \quad x_i > 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

es igual a

$$C_{n-1}^{k-1} = \sigma(k, n),$$

mientras que el número total de particiones ordenadas de  $n$  en sumandos es igual a  $2^{n-1}$ .

1.46. Denotemos con  $\lambda(n)$  el número de particiones no ordenadas de  $n$  en diferentes sumandos, y con  $\rho(n)$ , el número de particiones no ordenadas de  $n$  en sumandos impares (iguales o desiguales). Demuéstrase que  $\lambda(n) = \rho(n)$ .

1.47. Los números  $w_k = (3k^2 - k)/2$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) se denominan *pentagonales*. Demuéstrase la siguiente afirmación (*teorema de Euler—Legendre*): la diferencia entre el número de representaciones no ordenadas de un número natural dado  $n$  en forma de la suma de números par e impar de los sumandos desiguales es igual a cero, si  $n$  es el número no pentagonal, y a  $(-1)^h$ , si  $n$  es el número pentagonal  $w_h$ .

1.48. Demuéstrase la siguiente afirmación: para todo  $n > 0$  se tiene

$$\sum_{h: w_h \leq n} (-1)^h S(n - w_h) = \left\{ \begin{matrix} (-1)^{S-1} n \\ n = w_S \end{matrix} \right\},$$

donde  $S(n)$  es la suma de divisores del número natural  $n$ ; la suma en el primer miembro se toma respecto de todos los números  $k \geq 0$ , para los cuales  $w_k \leq n$ , y el símbolo  $\left\{ \begin{matrix} (-1)^{S-1} n \\ n = w_S \end{matrix} \right\}$  denota 0 para  $n$  distinto de un número pentagonal, y  $(-1)^{S-1}$ , para  $n = w_S$ .

1.49. Designemos  $\bar{\mu}(n)$ , el número de representaciones no ordenadas de un número natural  $n$ , como la suma de números naturales iguales o desiguales. Demuéstrase que

$$\sum_{h: w_h \leq n} (-1)^h \bar{\mu}(n - w_h) = 0,$$

donde  $w_h = (3k^2 - k)/2$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) son los números pentagonales,  $\bar{\mu}(0) = 1$ .

1.50. Sean  $f(n)$  y  $F(n)$  unas funciones de números enteros y supongamos que

$$\sum_{S: w_S \leq n/h} (-1)^S f(n - hw_S) = F(n).$$

donde  $h > 0$  es un número entero prefijado. Demuéstrese la fórmula de inversión

$$f(n) = \sum_{0 < h \leq n/h} \bar{\mu}(h) F(n-hk),$$

donde  $\mu(k)$  es la cantidad de particiones del número  $k$  en sumandos iguales o desiguales (análogo de la función de Moebius  $\mu(n)$ ).

1.51. Sea  $\lambda(n)$  el número de particiones de  $n$  en sumandos desiguales,  $\lambda(0) = 1$ . Demuéstrese las igualdades:

$$a) \sum_{h: w_h \leq n} (-1)^h \lambda(n - w_h) = \begin{cases} (-1)^S, & n = 2w_S, \\ 0, & n \neq 2w_S, \end{cases}$$

$$b) \lambda(n) = \sum_{h: 2w_h \leq n} (-1)^h \bar{\mu}(n - 2w_h).$$

1.52. Sea  $v(n)$  el número de particiones de  $n$  en una suma de sumandos positivos impares desiguales ( $v(0) = 1$ ). Demuéstrese las desigualdades:

$$a) \sum_{h: 2w_h \leq n} (-1)^h v(n - 2w_h) = \begin{cases} (-1)^{n+S}, & n = w_S, \\ 0, & n \neq w_S; \end{cases}$$

$$b) v(n) = \sum_{S: w_S \leq n} (-1)^{n+S} \bar{\mu}\left(\frac{n-w_S}{2}\right).$$

1.53. Hállese el número de soluciones no ordenadas de la ecuación  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = m$ , si todas las incógnitas satisfacen la desigualdad  $0 \leq l \leq x_k \leq n$ .

1.54. ¿En cuántas partes puede dividirse la superficie de una esfera mediante los planos que pasan por el centro de ella, a condición de que cualesquiera tres planos no pasan por un mismo diámetro?

1.55. Hállese el número de todos los polígonos convexos de  $k$  lados de cuyos vértices sirven  $k$  de  $n$  vértices del polígono convexo de  $n$  lados, con la particularidad de que dos vértices adyacentes han de estar separados al menos por  $s$  vértices del polígono de  $n$  lados.

1.56. ¿De cuántos modos puede dividirse un polígono convexo de  $(n+2)$  lados en triángulos mediante las diagonales que no se intersecan en el interior del polígono?

1.57. ¿En cuántas partes dividen un plano  $n$  rectas que se intersecan, si cualesquiera tres de ellas no se cortan en un mismo punto?

1.58. En un plano están trazadas  $n$  rectas. Se denominará *multiplicidad* de un punto al número de rectas que pasan por el punto citado. Están prefijados los números:  $k_2$  que representa el número de vértices de multiplicidad dos,  $k_3$  que expresa el número de vértices de multiplicidad tres, etc.,  $k_n$  que expresa el número de vértices de multiplicidad  $n$ . Hállese el número de pares de rectas paralelas.

1.59. En un plano están trazadas  $n$  rectas. Están profijados los números:  $k_2$  que expresa el número de vértices de multiplicidad dos,  $k_3$  que expresa el número de vértices de multiplicidad tres, etc.,  $k_n$  que expresa el número de vértices de multiplicidad  $n$ . ¿En cuántas partes dividen el plano dichas rectas?

1.60. ¿En cuántas partes dividen un espacio  $n$  planos, de los cuales cualesquiera cuatro de ellos no pasan por un mismo punto, cualesquiera tres no pasan por una misma recta y cualesquiera dos no son paralelos, y cualesquiera tres planos tienen un punto común?

1.61. Por un punto  $A$  en un espacio pasan  $k$  planos, con la particularidad de que de tres de ellos ninguno pasa por una misma recta. ¿En cuántas partes los planos dividen el espacio?

1.62. En un espacio están trazados  $n$  planos. Se sabe:  $l_2$  es el número de rectas de intersección de dos planos exactamente;  $l_3$  es el número de rectas de intersección de tres planos exactamente, etc.,  $l_n$  es el número de rectas de intersección de  $n$  planos exactamente. Hállese el número de pares de planos paralelos.

1.63. ¿En cuántas partes dividen un espacio  $n$  planos, si de tres de ellos ninguno pasa por una misma recta, de dos, ninguno es paralelo y  $k_3$  es el número de puntos de intersección de tres planos,  $k_4$  es el número de puntos de intersección de cuatro planos, etc., y  $k_n$  es el número de puntos de intersección de  $n$  planos.

#### § 4. Problemas mixtos

1.64. Demuéstrese que los números que siguen más abajo son enteros:

$$a) \frac{(2n)!}{2^n}; \quad b) \frac{(3n)!}{2^n 3^n}; \quad c) \frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}; \quad d) \frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}; \quad e) \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

1.65. ¿Cuántos son los pares diferentes de números enteros  $x$  y  $y$  desde 1 hasta 1000, para los cuales  $(x^2 + y^2)/49$  es un número entero. (Los pares  $(x, y)$  y  $(y, x)$  se consideran iguales.)

1.66. Partiendo de los números del 1 al  $n$  han sido compuestos toda clase de productos, que constan de  $k$  diferentes factores ( $k$  está fijado). ¿Cuántos productos obtenidos se dividen por un número primo  $p \leq n$ ?

1.67. Teniendo por condición de que de tres diagonales del polígono conexo de  $n$  lados ( $n \geq 5$ ) ninguna se interseca en un punto, hállese el número de segmentos en los cuales se dividen las diagonales mediante los puntos de intersección.

1.68. Se dan cinco puntos en un plano. Entre las rectas que unen dichos puntos no hay paralelas, perpendiculares y coincidentes. Por cada punto trazamos perpendiculares a todas las rectas que pueden construirse uniendo dos a dos los cuatro puntos restantes. ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección de las perpendiculares citadas entre sí sin tomar en consideración los cinco puntos dados?



comienza en el punto  $A$ , entonces ¿cuál es la probabilidad de que el hombre llegue al final del paseo al  $k$ -ésimo cruce de la  $n$ -ésima fila?

1.77. Demuéstrese que la probabilidad de caer en los cruces pares de la  $n$ -ésima fila es igual a la probabilidad de caer en los cruces impares de la  $n$ -ésima fila (véase el dibujo del problema anterior). ¿Qué propiedad de las combinaciones  $C_n^k$  se deduce de lo descrito?

1.78. En la ecuación  $ax = b$  los parámetros  $a$  y  $b$  se eligen al azar de los segmentos  $1 \leq a \leq m$ ,  $1 \leq b \leq n$ , respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la raíz de esta ecuación sea superior a 1, a condición de que  $m$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$  son todos números naturales?

1.79.  $(m, n)$  es un punto de coordenadas enteras no negativas  $m$  y  $n$ . Hállese el número de diferentes caminos de longitud  $m + n$  que llevan desde el origen de coordenadas al punto  $(m, n)$  y que están compuestos de segmentos paralelos a los ejes de coordenadas, a condición de que de extremos de dichos segmentos sirven los puntos con coordenadas de números enteros.

1.80. En un papel cuadrículado está dibujado el rectángulo  $ABCD$  cuyos lados yacen en la línea de un retículo, con la particularidad de que  $AD$  es  $k$  veces mayor que  $AB$  ( $k$  es un entero). Se examinan toda clase de caminos que pasan por las líneas del retículo y que son los más cortos entre  $A$  y  $C$ . Demuéstrese que entre los caminos que se consideran hay en  $k$  veces más aquellos, donde el primer eslabón yace en  $AD$ , que aquellos donde el primer eslabón yace en  $AB$  (fig. 1.2).

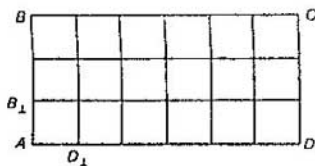


Fig. 1.2.

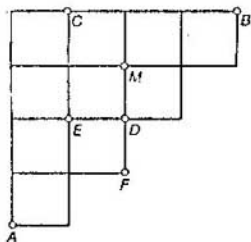


Fig. 1.3.

1.81. En la encrucijada  $A$  un automovilista rompió el vidrio del faro izquierdo y debe ahora dirigirse por el camino más corto al taller de reparación  $B$ , evitando en dicho camino el punto  $M$  (fig. 1.3). ¿Cuántos métodos existen para la elección de la ruta?

1.82. En un plano se han elegido 9 puntos dispuestos en forma del cuadrado  $3 \times 3$ . ¿Cuántos son los triángulos en los que un vértice se encuentra en el punto fijo  $A$ , y los otros dos, en los 8 puntos restantes?

1.83. Cierta comisión se reunía 40 veces. Cada vez en las sesiones estaban presentes 10 hombres, con la particularidad de que cuales-



quiera dos de los miembros de la comisión no presenciaban juntos las sesiones más que una vez. Demuéstrese que el número de miembros de la comisión es superior a 60.

1.84. En una oficina hay 25 empleados. Demuéstrese que de dichos empleados no pueden formarse más de 30 comisiones de 5 personas en cada una de tal modo que ningún par de comisiones tenga más de un miembro común.

1.85. Después de la presentación de 20 deportistas de patinaje artístico cada uno de 9 jueces distribuye según su propio parecer los puestos desde el 1 hasta el 20. Resultó que los puestos de cada deportista atribuidos a él por los distintos jueces difieren en no más de 3. Calculemos las sumas de los puestos obtenidos por cada deportista y dispongámoslas en orden de crecimiento:  $C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_{20}$ . ¿Qué valor máximo puede tener  $C_1$ ?

1.86. La distancia de  $A$  a  $B$  es de 999 km. A lo largo del camino están instalados postes en los cuales la distancia entre  $A$  y  $B$  se marca de la manera siguiente:

$$\boxed{0 \mid 999}, \quad \boxed{1 \mid 998}, \quad \boxed{2 \mid 997}, \quad \dots, \quad \boxed{999 \mid 0}.$$

¿Cuántos son los postes, en los cuales hay solamente dos cifras diferentes?

1.87. Imaginémosnos un juego entre dos hombres. Sin ver el número de un coche que se aproxima el primero de ellos «toma para sí» dos cualesquiera cifras del número (por ejemplo, la primera y la tercera, o bien la segunda y la cuarta), dejando las otras dos cifras para el segundo jugador; cuando se detecta el número, ambos jugadores suman sus cifras y gana aquel de ellos cuya suma de las cifras da un mayor número de unidades (o en ella es mayor la última cifra). ¿Entre los números del 0001 al 9999 cuántos son tales que el juego termina con un empate independientemente de la elección del primer jugador?

1.88. Para pintar una cara de un cubo hacen falta 5 segundos. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el transcurso del cual 3 hombres pueden pintar 188 cubos? (Se supone que dos hombres no pueden pintar simultáneamente un cubo).

1.89. En un campeonato gimnástico dos equipos contaban con un número igual de participantes. En total la suma general de tantos obtenidos por todos los participantes era igual a 156. ¿Cuál fue el número de participantes, si cada uno de ellos obtuvo notas sólo de 8 y 9 tantos.

1.90. Se tienen 9 palos de diferente longitud desde 1 hasta 9 cm. ¿De cuántos métodos y con qué lados pueden formarse cuadrados, haciendo uso de dichos palos? (No es obligatorio que se usen todos los palos; los métodos de formación de un cuadrado se consideran diferentes, si se emplean palos distintos.)

1.91. Un grupo de 41 estudiantes aprobó los exámenes de tres disciplinas. Las calificaciones posibles son: 5, 4 y 3. Demuéstrese

que por lo menos cinco estudiantes aprobaron los exámenes con calificaciones iguales.

1.92. Conservando las condiciones del problema antecedente hállese la probabilidad de que en el grupo no resulten 8 estudiantes que hayan aprobado los exámenes con calificaciones iguales.

1.93. ¿Qué números hay más entre el primer millón: aquellos en cuya notación se encuentra 1, o aquellos en cuya notación la unidad no está contenida?

1.94. Escribamos una oración: "Cuatro caminantes cansados y tácitos estuvieron esperando durante mucho tiempo a que cesara la tormenta que se desató tan súbitamente". Vamos a tachar las palabras en esta oración de una manera tal que se obtenga cada vez, como resultado, una oración correcta (por ejemplo, no se puede tachar la palabra "cuatro", pero sí podemos eliminar la palabra "cansados"). Se permite tachar las palabras en cualquier orden una tras otra. ¿De cuántos modos se puede llegar a una oración, de la cual no se podrá tachar ya ninguna palabra?

1.95. Demuéstrese que si una partida de ajedrez se desarrolla llegando a un número infinito de jugadas, entonces por lo menos una posición se repetirá un número infinito de veces. Demuéstrese que existe una sucesión de jugadas de longitud tan grande como se quiera, la cual se repetirá un número infinito de veces.

1.96. Un tal  $A$  sabe  $X \cdot Y$  (se conoce que  $X + Y < 100$ ;  $X, Y > 1$  son números enteros) y un tal  $B$  sabe  $X + Y$ . Entre  $A$  y  $B$  tiene lugar el diálogo siguiente:

A: no conozco  $X$  e  $Y$ ,

B: esto yo lo sabía,

A: entonces conozco  $X$  e  $Y$ ,

B: en tal caso también yo conozco  $X$  e  $Y$ .

Hállense los números  $X$  e  $Y$ .

1.97. Demuéstrese que en cada fracción decimal infinita existe una sucesión de signos decimales de longitud arbitraria, la cual en el desarrollo de la fracción se encuentra un número infinito de veces.

1.98. Demuéstrese que en el desarrollo del número  $n!$  en factores primos un número primo  $p$  figura con el exponente

$$\alpha = [n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \dots$$

(los corchetes denotan la parte entera del número).

1.99. ¿Cuántos ceros tiene al final el número  $3!!!$  en la notación decimal?

1.100. Supongamos que  $n$  números,  $1, 2, \dots, n$  están dispuestos uno tras otro en círculo. Desplazándonos por el círculo, tachamos cada segundo número. Hállese el último número  $N$  no tachado. Demuéstrese que

$$N = 2n - 2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1} + 1.$$

## MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

Se denomina *función generatriz*, o función generatriz ordinaria, de una sucesión de números  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  a una serie formal

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots,$$

donde  $t$  es una variable formal. En este caso escribiremos  $a_n = \text{Coef}_{t^n} \{A(t)\}$ . Por definición, dos funciones generatrices

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

son iguales, si  $a_n = b_n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para las funciones generatrices ordinarias se introduce el álgebra de las series formales de potencias, o bien álgebra de Cauchy con operaciones de adición, multiplicación, superposición, sustitución, diferenciación o integración. En particular, una función generatriz  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  es, por definición, un producto de las funciones generatrices

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

cuando y sólo cuando, para cualquier  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_n = \sum_{h=0}^n b_h c_{n-h}.$$

Una sucesión de números  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  lleva el nombre de *convolución de sucesiones*  $b_0, b_1, \dots, b_n$  y  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ , si  $A(t) = B(t)C(t)$ .

Se llama *función generatriz exponencial* de la sucesión  $a_0, a_1, \dots, \dots, a_n, \dots$  a una serie

$$E(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + \dots + a_n \frac{t^n}{n!} + \dots,$$

donde, al igual que en el caso anterior,  $t$  es una variable formal. Aquí,  $a_n = \text{Coef}_{t^n} \{E(t)\}$ . En el álgebra de funciones generatrices

exponenciales el producto  $E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$  de funciones generatrices exponenciales  $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$  y  $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$  se define, a diferencia del álgebra de Cauchy, por la igualdad  $a_n = \sum_{h=0}^n C_n^h b_h c_{n-h}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$

Observemos que si por  $t$  entendemos una variable compleja, entonces, para  $t$  inferior al radio de convergencia de la serie correspondiente, la función generatriz será analítica. Con este motivo surge un problema recíproco: hallar los coeficientes de un desarrollo potencial según la función analítica.

### § 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones

Hállense las funciones generatrices de las siguientes sucesiones:

$$2.1. f(n) = \begin{cases} 1, & n=0, 1, \dots, N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

$$2.2. f(n) = \begin{cases} n+1, & n=0, 1, \dots, N, \\ 0, & n \geq N+1. \end{cases}$$

$$2.3. f(n) = \begin{cases} (n+1)(n+2), & n=0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & n \geq N, \end{cases}$$

$$2.4. f(n) = 1, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$2.5. f(n) = \alpha^n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$2.6. f(n) = \alpha n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$2.7. f(n) = n^2, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$2.8. f(n) = n^k, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$2.9. f(n) = n\alpha^n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$2.10. f(n) = C_{n+p-1}^n \alpha^n, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$2.11. f(n) = C_{n+p-1}^{n-1} \alpha^n, \quad n=1, 2, \dots$$

$$2.12. f(n) = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \alpha^n/n, & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$2.13. f(n) = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \alpha^n/n!, & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$2.14. f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ es par,} \\ \alpha^n/n!, & n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$2.15. f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ es impar,} \\ \alpha^n/n!, & n \text{ es par.} \end{cases}$$

$$2.16. f(n) = \text{sen } \alpha n, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.17. f(n) = \text{cos } \alpha n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Hállese la función generatriz de la sucesión  $F(n)$  a través de la función generatriz de la sucesión  $f(n)$ , si

$$2.18. F(n) = \begin{cases} 0, & n=0, \\ f(n-1), & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$2.19. F(n) = f(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.20. F(n) = f(n+k), n = 0, 1, 2, \dots; k \in \mathbb{N}, k > 0,$$

$$2.21. F(n) = \alpha^n f(n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.22. F(n) = n f(n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.23. F(n) = \sum_{i=0}^n f(i), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.24. F(n) = \begin{cases} 0, & n=0, 1, \dots, k-1, \\ f(n-k), & n \geq k. \end{cases}$$

$$2.25. F(n) = f(n+1) - f(n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.26. F(n) = \sum_{r=0}^n f(r) g(n-r), n = 0, 1, 2, \dots$$

Hállese la función generatriz exponencial  $F^e(z)$  de la sucesión  $F(n)$  expresada a través de  $f^e(z)$ :

$$2.27. F(n) = \begin{cases} 0, & n=0, \\ f(n-1), & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$2.28. F(n) = f(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.29. F(n) = n f(n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.30. F(n) = \alpha^n f(n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.31. F(n) = \begin{cases} 0, & n=0, 1, 2, \dots, k-1, \\ f(n-k), & n \geq k. \end{cases}$$

$$2.32. F(n) = f(n+1) - f(n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.33. F(n) = \sum_{r=0}^n C_n^r f(n-r) g(r).$$

$$2.34. F(n) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} f_1(k_1) f_2(k_2) \dots f_m(k_m).$$

2.35. ¿Cómo son las sucesiones a las cuales corresponden las funciones generatrices

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n, \quad \frac{x^n}{(1-x)^n} = (x+x^2+x^3+\dots)^n?$$

2.36. Sea  $A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$  una función generatriz corriente y sea  $\alpha$  una raíz primitiva de  $n$ -ésima potencia de 1,  $\alpha = \exp\{2\pi i/n\}$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria.

Dividamos  $\Lambda(z)$  en  $n$  secciones, de las cuales la  $k$ -ésima será  $A_k^{(n)}(z) = a_k z^k + a_{k+n} z^{k+n} + \dots$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  (2.1) (método de división en secciones de Morgan). Muéstrase que

$$\Lambda_k^{(n)}(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha^{kj}} \Lambda(\alpha^j z). \quad (2.2)$$

2.37. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_h$  unas variables. Muéstrase que

$$(1 + x_1 z)(1 + x_2 z) \dots (1 + x_h z) = \\ = 1 + \sigma_1(x_1, \dots, x_h) z + \sigma_2(x_1, \dots, x_h) z^2 + \dots + \sigma_h(x_1, \dots, x_h) z^h,$$

donde  $\sigma_m(x_1, \dots, x_h) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq h} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$  ( $m = 1, 2, \dots, h$ ) es la  $m$ -ésima función simétrica elemental. En particular, si

$$C_h^m = \binom{h}{m} = \sigma_m(x_1, \dots, x_h) |_{x_1=x_2=\dots=x_h=1}$$

es el número de combinaciones de  $h$  según  $m$ , entonces

$$C_h(z) = (1+z)^h = \sum_{m=0}^h C_h^m z^m, \quad (2.3)$$

donde  $C_h^0 = 1$ .

2.38. Demuéstranse las siguientes propiedades de las combinaciones:

a)  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots, n+1$ ; las condiciones iniciales son:  $C_1^0 = C_1^1 = 1$ ;

b)  $\sum_{h=0}^n C_n^h = 2^n$ ;

c)  $\sum_{h=0}^n (-1)^h C_n^h = 0$ ;

d) para  $m = 0, 1, \dots, n-1$  es válida la identidad de Vander Monde

$$C_n^k = \sum_{j=0}^k C_{n-m}^j C_m^{k-j}.$$

2.39. Sean

$$S_m(x_1, \dots, x_h) = \sum_{i=1}^h x_i^m,$$

$$\sigma_m(x_1, \dots, x_h) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq h} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \quad 1 \leq m \leq h,$$

sumas potenciales y funciones simétricas elementales, respectivamente. Demuéstrase que

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sigma_m(x_1, \dots, x_h) z^m = \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x_1, \dots, x_h) \frac{z^j}{j} \right\}. \quad (2.4)$$

(La fórmula (2.4) se llama a veces fórmula de Waring.) Observemos que el primer miembro de (2.4) contiene sólo un número finito de sumandos.

2.40. Sea  $\pi = \pi(n)$  una partición no ordenada  $\{1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}\}$  del número  $n$ , donde  $k_i$  es el número de partes iguales a  $i$ , de suerte que  $n = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n$ ;  $k(\pi)$  es el número de partes en la partición  $\pi$ , es decir,  $k(\pi) = \sum_{i=1}^n k_i$ , y para cada  $j = 1, 2, \dots$

$$A_j(x) = a_0(j) + a_1(j)x + \dots + a_h(j)x^h + \dots$$

es una función generatriz de la sucesión  $a_0(j), a_1(j), \dots, a_h(j), \dots$ . Demuéstrase que

$$\prod_{j=1}^{\infty} A_j(x^j) = \prod_{j=1}^{\infty} a_0(j) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_{k_1}(1) \dots a_{k_n}(n) \prod_{m=n+1}^{\infty} a_0(m), \quad (2.5)$$

donde  $\sum_{\pi(n)}$  significa la sumación respecto de todas las particiones del número  $n$ .

2.41. Sea  $p_n$  el número de particiones no ordenadas de  $n$ ,  $n \geq 1$ ,  $p_0 = 1$ . Introduzcamos la función generatriz  $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ . Demuéstrase que

$$p(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j}. \quad (2.6)$$

2.42. Denotemos con  $p_{n,h}$ , para  $n \geq 1$ , el número de particiones de  $n$  en  $h$  partes;  $p_{00} = 1$ . Demuéstrase que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{h=0}^n p_{n,h} y^h \right) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - yx^j)^{-1}. \quad (2.7)$$

2.43. Muéstrase que

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - y_j x^j)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\pi(n)} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_n^{k_n} \right) x^n. \quad (2.8)$$

2.44. Muéstrase que

$$\exp\left\{\frac{xy}{1-x}\right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n \sum_{\pi(n)} \frac{y^{h(\pi)}}{k_1! k_2! \dots k_n!}\right). \quad (2.9)$$

2.45. Sea  $a_1, a_2$  cierta sucesión numérica y supongamos que para toda partición  $\pi = \{1^{h_1} 2^{h_2} \dots n^{h_n}\}$  del número  $n$  se verifica

$$L(\pi) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n.$$

Demuéstrase que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi)\right) = p(x) \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{x^j}{1-x^j}, \quad (2.10)$$

donde  $p(x)$  es la función generatriz de las particiones definida en el problema 2.41.

2.46. Demuéstrase la identidad

$$\sum_{\pi(n)} \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!} = \binom{n-1}{k-1}, \quad (2.11)$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las particiones  $\pi = \{1^{h_1} 2^{h_2} \dots n^{h_n}\}$  del número  $n$  tal que  $k(\pi) = k$ .

2.47. Demuéstrase que en las designaciones de los problemas 2.41 y 2.45 tiene lugar la identidad

$$\sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{u+v=n} \rho_u \sum_{d|v} a_d, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

2.48. Pruébese que

$$n p_n = \sum_{h=0}^{n-1} p_h \sigma_{n-h}, \quad (2.13)$$

donde  $\sigma_v = \sum_{d|v} d$  es la suma de divisores  $v$ .

2.49. Demuéstrase que

$$\sum_{\pi(n)} (k_1 + \dots + k_n) = \sum_{h=0}^{n-1} p_h \tau(n-h),$$

donde  $\tau(v) = \sum_{d|v} 1$  es el número de divisores  $v$ .

2.50. Sea  $\sigma(x) = \sigma_1 + \sigma_2 x + \dots + \sigma_n x^{n-1} + \dots$  una función generatriz de los números  $\sigma_n$  definidos en el problema 2.48. Demuéstrase que

$$a) \quad dp(x)/dx = \sigma(x) p(x)$$



y que, por consiguiente,

$$b) \quad p(x) = \exp \left\{ \sigma_1 x + \frac{\sigma_2}{2} x^2 + \dots + \frac{\sigma_n}{n} x^n + \dots \right\};$$

$$c) \quad p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \frac{x^n}{n!},$$

donde  $C_n(y_1, \dots, y_n)$  es el índice cíclico del grupo simétrico de grado  $n$ ; en particular,

$$d) \quad p_n = \frac{1}{n!} C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

2.51. Sean  $E(x)$  y  $F(x)$  funciones generatrices exponenciales de las sucesiones  $a_0, a_1, \dots, a_h, \dots$  y  $b_0, b_1, \dots, b_h$ , respectivamente, donde  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 1$ . Demuéstrese que  $E(x)$  y  $F(x)$  satisfacen la relación

$$F(x) = \exp \{E(x)\}, \quad (2.14)$$

cuando y sólo cuando para cada  $n \geq 0$  se cumplen las igualdades

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^n C_n^j a_{j+1} b_{n-j}. \quad (2.15)$$

## § 2. Números especiales y funciones especiales

2.52. Denominemos  $(r_1, r_2, \dots, r_h)$ -partición del  $n$ -conjunto  $M$  a un juego ordenado  $M_1, M_2, \dots, M_h$  de subconjuntos  $M$  tales que  $M_i \cap M_j = \emptyset$ , siempre que  $i \neq j$ , y  $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_h = M$ , con la particularidad de que  $|M_1| = r_1, \dots, |M_h| = r_h$ . Los números  $r_i$  son no negativos y satisfacen la relación  $r_1 + r_2 + \dots + r_h = n$ . Demuéstrese que el número de  $(r_1, r_2, \dots, r_h)$ -particiones es

$$\sigma(r_1, r_2, \dots, r_h) = n! / (r_1! r_2! \dots r_h!).$$

2.53. Sean  $k_1, k_2, \dots, k_n$  unos números enteros no negativos tales que

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n.$$

Muéstrese que el número de particiones de un  $n$ -conjunto que contienen  $k_i$   $i$ -subconjuntos ( $i = 1, 2, \dots$ ), es

$$B_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{n!}{(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n} k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

2.54. Designemos con  $P_n(k_1, k_2, \dots, k_n)$  el número de permutaciones (sustituciones) de  $n$  símbolos que contienen  $k_1$  ciclos de longitud 1,  $k_2$  ciclos de longitud 2, etc.,  $k_n$  ciclos de longitud  $n$ .

Muéstrese que

$$a) P_n(k_1, \dots, k_n) = (0!)^{k_1} (1!)^{k_2} (2!)^{k_3} \dots \\ \dots ((n-1)!)^n B_n(k_1, \dots, k_n)$$

y, por consiguiente,

$$b) P_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n! 1^{h_1} 2^{h_2} \dots n^{h_n}}$$

2.55. Designemos con  $B_n$  el número de toda clase de particiones de un conjunto compuesto por  $n \geq 1$  elementos. Estos números llevan el nombre de Bell. Pongamos, además,  $B_0 = 1$ . Demuéstrese que los números de Bell satisfacen la relación recurrente

$$B_{n+1} = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \dots + \binom{n}{n} B_n, \quad n \geq 0. \quad (2.16)$$

2.56. Muéstrese que el número de particiones diferentes de  $n$ -conjunto (número de Bell) puede escribirse en la forma

$$B_n = \sum_{(h_1, h_2, \dots, h_n)} \frac{n!}{\prod_{s=1}^n (s!)^{h_s} k_s!},$$

donde la sumación se realiza respecto de diferentes particiones del número  $n$  tal que  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ .

2.57. Examinemos, para cada  $n \geq 1$ , un polinomio de  $n$  variables  $y_1, y_2, \dots, y_n$ :

$$a) Y_n(y_1, \dots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_n^{k_n}, \quad (2.17)$$

donde  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ , y los números  $B_n(k_1, \dots, k_n)$  están definidos en el problema 2.53. Muéstrese que la función generatriz exponencial de estos polinomios es

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!} \right\}. \quad (2.18)$$

(Estos polinomios llevan el nombre de *polinomios de Bell*).

$$b) \text{ Sea } B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \text{ una función generatriz exponencial de}$$

los números de Bell, definidos en el problema 2.55. Muéstrese que

$$B(x) = \exp \{e^x - 1\}. \quad (2.19)$$

2.58. Sea  $c_0 = 1$  y supongamos que para cada  $n \geq 1$ ,  $c_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$  es un polinomio de las variables  $y_1, \dots, y_n$  de la forma

$$c_n(y_1, \dots, y_n) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} P_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}, \quad (2.20)$$

donde  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ , y los números  $P_n(k_1, \dots, k_n)$  están definidos en el problema 2.54. Muéstrase que la función generatriz exponencial de los polinomios  $c_n(y_1, \dots, y_n)$  es

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n} \right\}. \quad (2.21)$$

2.59. Introduzcamos los polinomios de  $n$  variables:

$$Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{(h_1, h_2, \dots, h_n)} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n}, \quad (2.22)$$

donde  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ ,  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ , y los números  $B_n(k_1, \dots, k_n)$  están definidos en el problema 2.53. Muéstrase que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) x^h \frac{z^n}{n!} = \exp \left\{ x \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right\} \quad (2.23)$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{h=0}^n Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) = Y_n(y_1, \dots, y_n), \quad (2.24)$$

donde  $Y_n(y_1, \dots, y_n)$  son polinomios de Bell del problema 2.57, a); y, además, muéstrase que para  $k \geq 1$

$$\sum_{n=h}^{\infty} Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right]^k, \quad (2.25)$$

es decir,

$$Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) = n! \text{Coef}_{z^n} \left[ \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right]^k. \quad (2.26)$$

2.60. Demuéstrase las siguientes propiedades de los polinomios de Bell  $Y_n(y_1, \dots, y_n)$ , definidos por la igualdad (2.17):

a) para  $n = 0, 1, \dots$  tiene lugar una relación recurrente

$$Y_{n+1} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s};$$

$$b) \quad Y_n(cy_1, c^2y_2, \dots, c^ny_n) = c^n Y_n(y_1, y_2, \dots, y_n);$$

$$c_1) \quad \frac{\partial}{\partial y_1} Y_n(y_1, \dots, y_n) = \binom{n}{1} Y_{n-1}(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$c_2) \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, [n/j]$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \dots, y_n) = \frac{n!}{(j)^r (n-r)!} Y_{n-r}(y_1, \dots, y_{n-r});$$

$$c_3) \quad \text{para } r > [n/j]$$

$$\frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \dots, y_n) = 0;$$

d) los polinomios  $Y_n(y_1, \dots, y_n)$  satisfacen el teorema de adición

$$Y_n(y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} Y_h(y_1, \dots, y_h) \times \\ \times Y_{n-h}(x_1, \dots, x_{n-h}), \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$e) \quad Y_{n+1} = \left( y_1 + \sum_{s=1}^n y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s} \right) Y_n.$$

2.61. Sea  $H$  un subconjunto de una serie natural  $A_H(x) = \sum_{h \in H} \frac{x^h}{k!}$  y  $B_n(H)$ , el número de particiones del  $n$ -conjunto en partes, cuyas potencias representan precisamente los elementos de  $H$ . Entonces, para la función generatriz exponencial de los números  $B_n(H)$  se verifica la relación

$$B_H(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(H) \frac{x^n}{n!} = \exp \{A_H(x)\}. \quad (2.27)$$

donde

$$B_n(H) = \sum_{h=1}^n \sum_{\substack{h_1 + \dots + h_k = n, \\ h_i \in H}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k!)^{l_k} l_k!}, \quad (2.28)$$

y para los números  $B_n(H)$  es válida la relación recurrente

$$B_{n+1}(H) = \sum_{h+1 \in H} \binom{n}{h} B_{n-h}(H). \quad (2.29)$$

2.62. Designemos con  $S_k^l(n, k)$  el número de particiones de un  $n$ -conjunto en  $k$  partes no vacías,  $n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, n$ . Pongamos, por definición,  $S(0, 0) = 1, S(0, m) = 0$ , si  $m \neq 0$ ,

y  $S(n, k) = 0$ , si  $n > 0$  y  $k \notin \{1, 2, \dots, n\}$ . Los números  $S(n, k)$  se llaman *números de Stirling de 2º género*.

a) Cerciórese de que

$$S(n, 1) = 1, \quad S(n, n) = 1, \quad \sum_{k=0}^n S(n, k) = B(n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde  $B(n) = B_n$  son los números de Bell.

b) Muéstrese que para los números de Stirling de 2º género se verifica la relación recurrente

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1), \quad n \geq 1,$$

con las condiciones iniciales  $S(0, 0) = 1$ ,  $S(0, k) = 0$ ,  $k \neq 0$ .

c) Demuéstrese que tiene lugar la representación

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_n!},$$

donde la sumación se realiza respecto de todos los juegos de números enteros positivos  $r_1, \dots, r_n$  tales que  $r_1 + r_2 + \dots + r_n = n$ .

Demuéstrese que

$$S(n, k) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} \frac{n!}{k_1! \dots k_n! (1)^{k_1} \dots (n!)^{k_n}},$$

donde  $k_1, k_2 + \dots + k_n = k$ ,  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ .

e) Compruébese que

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}, \quad n \geq 2,$$

$$S(n, n-2) = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) \binom{n-i}{2}, \quad n \geq 3.$$

2.63. Llamemos *polinomios de Stirling* los siguientes

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^n S(n, k) y^k, \quad P_n(1) = B_n,$$

y, además, pongamos  $P_0(y) = 1$ . Muéstrese que

$$P_n(y) = y [dP_{n-1}(y)/dy + P_{n-1}(y)] \quad (2.30)$$

y que (2.30) es equivalente a la solución

$$P_n(y) e^y / y = d[e^y P_{n-1}(y)] / dy. \quad (2.31)$$

2.64. Sea  $S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y) \frac{x^n}{n!}$  una función generatriz exponencial de los polinomios de Stirling. Muéstrese que

$$S(x, y) = \exp\{y(e^x - 1)\}. \quad (2.32)$$

2.65. Introduzcamos para cada  $k = 1, 2, \dots$  las funciones generatrices exponenciales

$$Y_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.33)$$

Muéstrese que

$$Y_k(x) = (e^x - 1)^k / k!, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

2.66. Muéstrese que las funciones generatrices  $Y_k(x)$  del problema 2.65 satisfacen la correlación

$$dY_k(x)/dx = kY_k(x) + Y_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

2.67. Demuéstrese la identidad

$$S(n+1, k) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S(j, k-1). \quad (2.36)$$

2.68. Muéstrese que para los polinomios de Stirling  $P_n(x)$  quedan cumplidas las relaciones

$$P_{n+1}(x) = x \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} P_h(x), \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n}{h} P_h(x). \quad (2.38)$$

2.69. Demuéstrese la identidad

$$\sum_{h=0}^{\infty} k^h \frac{y^h}{k!} = e^y P_n(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

donde  $P_n(x)$  son polinomios de Stirling definidos en el problema 2.63, y, como consecuencia, para los números de Bell, la validez de la representación

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{k^h}{h!}. \quad (2.40)$$

2.70. Demuéstrese la identidad

$$x \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{x^s}{s!} = e^x P_{n+1}(x) \quad (2.41)$$

y el caso particular:

$$B_{n+1} = \frac{1}{e} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{1}{s!}. \quad (2.42)$$

**2.71.** Introduzcamos las funciones generatrices  $S_n(z) = 1$  también para  $k = 1, 2, \dots$

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k, k) z^n. \quad (2.43)$$

Demuéstrase la relación recurrente

$$(1 - kz) S_k(z) = S_{k-1}(z), \quad (2.44)$$

de suerte que

$$(1 - z)(1 - 2z) \dots (1 - kz) S_k(z) = 1. \quad (2.45)$$

**2.72.** Demuéstrase para los números de Stirling de 2º género las siguientes fórmulas

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n, \quad (2.46)$$

$$S(n, k) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} i^n. \quad (2.47)$$

**2.73.** Obténgase para los números de Stirling de 2º género la representación

$$S(n, k) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_{n-k})} i_1 i_2 \dots i_{n-k}, \quad (2.48)$$

donde  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq k$ , es decir, que  $S(n, k)$  es igual a la suma de los productos de los elementos de las combinaciones de orden  $n - k$  con repetición, mas sin permutaciones de los números  $1, 2, \dots, k$ .

**2.74.** Muéstrase que los números de Stirling de 2º género  $S(n, k)$  pueden ser definidos como coeficientes del desarrollo

$$x^n = \sum_{h=0}^n x(x-1) \dots (x-k+1) S(n, h), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

**2.75.** Sea  $q_0 = 1$  y supongamos que para  $n \geq 1$

$$q_n = \sum_{h=0}^n (-1)^{h-1} \binom{n}{h} B_h B_{n-h}.$$

Muéstrase que la función generatriz exponencial de los números  $q_n$  es

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z + e^{-z} - 2}. \quad (2.50)$$

**2.76.** Sea  $C(0, 0) = 1$ ,  $C(n, 0) = 0$  para cualquier  $n \neq 0$  y  $C(0, k) = 0$ , siempre que  $k \neq 0$ . Para  $n \geq 1$  designemos por

$C(n, k)$  el número de permutaciones de  $n$  símbolos con  $k$  ciclos. Los números

$$s(n, k) = (-1)^{n+k} C(n, k)$$

se denominan *números de Stirling de 1<sup>er</sup> género*. Muéstrase que

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1)C(n-1, k),$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad (2.51)$$

y, por consiguiente,

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k),$$

$$k = 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

2.77. Sea  $C_0(x) = 1$  y supongamos que para  $n \geq 1$

$$C_n(x) = \sum_{h=0}^n C(n, h) x^h.$$

Muéstrase que

$$C_n(x) = (x+n-1)C_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$C_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.53)$$

2.78. Compruébese que los números de Stirling de 1<sup>er</sup> género  $s(n, k)$  son precisamente coeficientes en el desarrollo

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{h=1}^n s(n, h) x^h. \quad (2.54)$$

2.79. Muéstrase que las magnitudes  $(-1)^{n+h} s(n, k)$  son positivas para  $n \geq 1$ ,  $1 \leq k \leq n$  y son iguales a

$$(-1)^{n+h} s(n, k) = a_{n-h}(1, 2, \dots, n-1) =$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_{n-h})} i_1 i_2 \dots i_{n-h}, \text{ donde } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-h} \leq n-1. \quad (2.55)$$

2.80. Muéstrase que la función generatriz exponencial

$$y_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

( $y_0(x) \equiv 1$ ), satisface la relación diferencial recurrente

$$(1+x) dy_k(x)/dx = y_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

Dedúzcase de aquí que

$$y_k(x) = [\ln(1+x)]^k / k!. \quad (2.57)$$



2.81. Muéstrase que la función generatriz

$$s(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k \frac{t^n}{n!}$$

es  $s(t, x) = (1 + t)^x$ .

2.82. Demuéstrase la identidad

$$s(n+1, k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j j! \binom{n}{j} s(n-j, k-1). \quad (2.58)$$

2.83. Muéstrase que los números de Stirling de 1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> género están ligados entre sí mediante las relaciones

$$\sum_{k=1}^n S(n, k) s(k, m) = \delta_{nm}, \quad (2.59)$$

$$\sum_{k=1}^n s(n, k) S(k, m) = \delta_{nm}, \quad (2.60)$$

donde  $\delta_{nm} = 1$ , si  $n = m$ , y  $\delta_{nm} = 0$ , si  $n \neq m$ , y las sumas se toman respecto de todos los valores  $k$ , para los cuales  $s(k, m)$  y  $S(n, k)$  son distintas de cero.

2.84. Sean  $a_1, a_2, \dots$  y  $A_1, A_2, \dots$  dos sucesiones numéricas tales que

$$A_n = \sum_{\nu=1}^n s(n, \nu) a_{\nu}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.61)$$

Muéstrase que en este caso

$$a_n = \sum_{\nu=1}^n S(n, \nu) A_{\nu}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.62)$$

y viceversa, de (2.62) se deduce (2.61).

2.85. Muéstrase que

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) B_k = 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.63)$$

donde  $s(n, k)$  son los números de Stirling de 1<sup>er</sup> género;  $B_k$  son los números de Bell.

2.86. Demuéstrase que los números de Stirling de 2<sup>o</sup> género  $s(n, k)$  y los polinomios de Stirling  $P_n(x)$  (véase el problema 2.63) están ligados mediante la relación

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) P_k(x) = x^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.64)$$

2.87. Pongamos

$$j_0(x) = 1, \quad j_n(x) = x(x-1) \dots (x-n+1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Muéstrase que los polinomios  $j_n(x)$  y los números de Stirling de 2° género están ligados mediante la relación

$$\sum_{k=0}^n S(n, k) j_k(x) = x^n, \quad n=0, 1, \dots \quad (2.65)$$

2.88. Muéstrase que el número de métodos para alojar  $n$  diferentes objetos (mostacillas) en  $m$  diferentes células, a condición de que ninguna de las células esté vacía, es igual a

$$\mu(n, m) = m! S(n, m) \quad (2.66)$$

(donde  $S(n, m)$  es el número de Stirling de 2° género),

$$\mu(n, m) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n \quad (2.67)$$

y se expresa por la relación recurrente

$$\mu(n, m) = m [\mu(n-1, m) + \mu(n-1, m-1)]. \quad (2.68)$$

2.89. Muéstrase que el número de métodos para alojar  $n$  diferentes objetos en  $m$  cajones distinguibles, a condición de que  $p$  cajones estén ocupados y  $(m-p)$  cajones libres, es igual a

$$\mu_p(n, m) = m(m-1) \dots (m-p+1) S(n, p). \quad (2.69)$$

2.90. Dese la interpretación combinatoria de la identidad

$$m^n = \sum_{p=1}^m (m)_p S(n, p), \quad (2.70)$$

donde  $(m)_p = m(m-1) \dots (m-p+1)$ ,  $m$  es un número positivo entero.

2.91. Muéstrase que el número de métodos para distribuir  $n$  objetos distinguibles en  $m$  células iguales, a condición de que ninguna de ellas quede vacía, se determina por el número de Stirling de 2° género  $S(n, m)$ , y si la condición mencionada está ausente, por el número de Bell  $B_n$ .

2.92. Muéstrase que un número igual al producto de  $n$  diferentes factores simples puede ser representado en forma del producto de  $m$  factores mediante  $S(n, m)$  diferentes métodos.

2.93. Introduzcamos los números generalizados de Stirling  $S(n, m, k)$  que se definen como el número de métodos para alojar  $n$  objetos distinguibles en  $m$  células diferentes dividido por  $k!$ , a condición de que ninguna de las  $k$  células fijas citadas quede vacía. Muéstrase que

$$S(n, m, k) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (m-k)^{n-v} S(v, k). \quad (2.71)$$

2.94. Examinemos una función generatriz exponencial de los números generalizados de Stirling

$$\varphi_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, m, h) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.72)$$

Muéstrase que

$$\varphi_h(x) = e^{(m-h)x} (e^x - 1)^h / h! \quad (2.73)$$

### § 3. Teoría de Polya

Si la permutación (sustitución) de un  $n$ -conjunto se desarrolla en el producto de  $b_i$  ciclos de longitud  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), suele decirse que la permutación es del tipo  $(b_1, \dots, b_n)$ . Si  $G$  es un grupo de permutaciones del  $n$ -conjunto, entonces el polinomio

$$P_G(x_1, \dots, x_n) = |G|^{-1} \sum_{s \in G} x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n},$$

donde  $(b_1, \dots, b_n)$  es el tipo  $g$ , se denomina *índice cíclico del grupo*  $G$ . Si  $G$  es un grupo de permutaciones del conjunto  $S$ , entonces dos elementos  $s_1$  y  $s_2$  se llaman equivalentes (la notación es  $s_1 \sim s_2$ ), si  $\exists g \in G: gs_1 = s_2$ . Las clases de equivalencia se llaman *conjuntos transitivos*, o bien *órbitas*.

LEMA DE BERNSAID. *El número de conjuntos transitivos es igual a*

$$|G|^{-1} \sum_{s \in G} \psi(g), \quad \text{donde } \psi(g) = |\{s \in S: gs = s\}|.$$

Sean  $D$  y  $R$  unos conjuntos finitos y sea  $G$  un grupo de permutaciones del conjunto  $D$ . Designemos con  $R^D$  un conjunto de funciones, para las cuales  $D$  será el campo de definición y  $R$ , el campo de valores. Para  $f_1, f_2 \in R^D$

$$f_1 \sim f_2, \quad \text{si } \exists g \in G: f_1(g\alpha) = f_2(\alpha) \quad \forall \alpha \in D.$$

A todo elemento  $r \in R$  se le atribuye el peso  $\omega(r)$ , esto es, el elemento de un anillo conmutativo. El peso de la función  $f \in R^D$  es, por definición,  $W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$ . El inventario de cualquier conjunto  $Q$  con elementos provistos de peso será

$$\text{Inv } Q = \sum_{q \in Q} \omega(q).$$

Si los elementos  $f_1$  y  $f_2$  son equivalentes, tienen un peso igual. Por eso resulta posible definir *el peso de la clase de equivalencia*  $W(F)$  como el peso  $W(f)$  de cualquier elemento  $f \in F$ .

TEOREMA FUNDAMENTAL DE POLYA. *El inventario de las clases de equivalencia es igual a*

$$\sum_F W(F) = P_G \left\{ \sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} [\omega(r)^2], \sum_{r \in R} [\omega(r)]^3, \dots \right\}.$$

En particular, si los pesos se han elegido iguales a 1, entonces obtenemos el número de clases de equivalencia igual a  $P_G(|R|, |R|, |R|, \dots)$ .

2.95. Sea  $N = \{1, \dots, n\}$ , y  $S_n$ , un grupo simétrico sobre  $N$ .

Si  $\pi \in S_n$  divide  $N$  en  $b_i$  ciclos de longitud  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), se dice que la permutación  $\pi$  es del tipo  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Demuéstrese que el número de permutaciones con el tipo dado  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  es igual a

$$n! / \prod_{i=1}^n (i^{b_i} b_i!)$$

2.96. Sea  $G$  un subgrupo del grupo simétrico  $S_n$ . Para cada  $g \in G$  formamos el producto  $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$ , siempre que  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  es del tipo  $g$ .

Demuéstrese que

$$P_{S_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum^* \frac{x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}}{\prod_{i=1}^n (i^{b_i} b_i!)},$$

donde el signo \* significa que la sumación se realiza respecto de toda clase de números enteros no negativos  $b_1, b_2, \dots, b_n$  que satisfacen la condición  $b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n = n$ .

2.97. Demuéstrese el teorema de Cayley: todo grupo finito  $G$  es isomorfo a cierto subgrupo del grupo simétrico  $S_{|G|}$ . Dicho subgrupo lleva el nombre de *representación de Cayley* del grupo  $G$ .

2.98. Sea  $G$  un grupo finito. Se denomina *índice cíclico*  $P_G$  de este grupo el índice cíclico de su representación de Cayley. Demuéstrese que

$$P_G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} [x_{k(g)}]^{n/h(g)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \nu(d) (x_d)^{n/d},$$

donde  $n$  es el orden del grupo  $G$ ;  $k(g)$  es el orden del elemento  $g \in G$ ;  $\nu(d)$ , el número de elementos  $g \in G$  cuyo orden es  $k(g) = d$ .

2.99. Sea  $G$  un grupo de todas las raíces de  $n$ -ésima potencia de la unidad,  $G = \{e^{2\pi i j/n}\}$ , donde  $j = 1, \dots, n$ , e  $i$ , la unidad imaginaria.

Demuéstrese que  $P_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_n/(n, j))^{(n, j)}$ , donde  $(n, j)$  es el máximo común divisor de  $n$  y  $j$ .

2.100. Sea  $G$  el conjunto de todas las permutaciones de los vértices de un tetraedro que pueden obtenerse haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo  $G$ .

2.101. Sea  $G$  un conjunto de todas las permutaciones de las aristas de un tetraedro que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo  $G$ .

2.102. Sea  $G$  un conjunto de todas las permutaciones de las caras de un tetraedro que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo  $G$ .

2.103. Sea  $G$  un conjunto de permutaciones de los vértices de un cubo que pueden ser obtenidas mediante sus revoluciones. Hállese el índice cíclico del grupo  $G$ .

2.104. Sea  $G$  un conjunto de todas las permutaciones de las aristas de un cubo que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo  $G$ .

2.105. Sea  $G$  un conjunto de todas las permutaciones de las caras de un cubo que pueden ser obtenidas haciéndolo girar. Hállese el índice cíclico del grupo  $G$ .

2.106. Demuéstrase que el índice cíclico de un grupo simétrico  $S_n$  es igual al coeficiente de  $z^n$  en el desarrollo

$$\exp \{zx_1 + z^2x_2/2 + z^3x_3/3 + \dots\}.$$

2.107. Sea  $G$  un grupo de permutaciones del conjunto  $S$ , y  $H$ , un grupo de permutaciones del conjunto  $T$ . Supongamos que  $S \cap T = \emptyset$ , y  $S \cup T = U$ . A cualquier opción de  $g \in G$  y  $h \in H$  le corresponde la permutación  $g \times h$  del conjunto  $U$  definida del modo siguiente:

$$u \rightarrow gu, \text{ si } u \in S; \quad u \rightarrow hu, \text{ si } u \in T.$$

a) Muéstrase que estas permutaciones forman un grupo cuyo orden es igual a  $|G| |H|$ . Este grupo lleva el nombre de *producto directo de los grupos  $G$  y  $H$*  y se denota  $G \times H$ .

b) Muéstrase que si  $g \in G$  y  $h \in H$  tienen los tipos  $(b_1, \dots, b_n)$  y  $(c_1, \dots, c_n)$ , respectivamente, entonces  $g \times h$  es del tipo  $(b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots)$ .

c) Demuéstrase la fórmula  $P_{G \times H} = P_G P_H$ .

2.108.  $G$  es un grupo finito y  $S$ , un conjunto finito. Supongamos que existe una aplicación homomorfa  $\pi$  del grupo  $G$  en el grupo simétrico del conjunto  $S$ :

$$\pi: g \rightarrow \pi_g \quad \forall g \in G.$$

En este caso suele decirse que  $G$  actúa en  $S$ . Para  $s_1, s_2 \in S$

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow \exists g \in G: \pi_g s_1 = s_2.$$

Demuéstrase que  $\sim$  es una relación de equivalencia. (Las clases de equivalencia que le corresponden a esta relación se llaman conjuntos transitivos.)

2.109. Demuéstrase el lema de Bernsайд: el número de conjuntos transitivos definidos por el grupo  $G$ , que actúa sobre el conjunto  $S$ , es igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g), \quad \psi(g) = |\{s \in S: \pi_g s = s\}|,$$

2.110. Sea  $S = \{a, b, c, d\}$  y  $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$  donde

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, & \pi_2 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, \\ \pi_3 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, & \pi_4 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La relación de equivalencia en  $S$  viene inducida por el grupo  $G$ . Hállese el número de clases de equivalencia.

2.111. Partiendo de las letras  $a$  y  $b$  se forman palabras de longitud 3. Ellas se consideran equivalentes, si se obtienen una de la otra al cambiar de lugar las letras extremas, por ejemplo,  $abb \sim bba$ . Determínese el número de clases de equivalencia sirviéndose del lema de Bernsайд.

2.112. Se hacen collares de abalorios (cuentas de vidrio) de tres colores. Cada collar está compuesto por cinco abalorios. Se consideran iguales aquellos que se obtienen uno del otro por revolución en un plano (no se admiten reflexiones especulares). Determínese el número de diferentes collares.

2.113. Se hacen collares de abalorios de  $k$  colores. Cada collar está compuesto por  $n$  abalorios. Se consideran iguales aquellos collares que se obtienen uno del otro por revolución en un plano (no se admiten reflexiones especulares). Determínese el número de diferentes collares aplicando el teorema de Polya.

2.114.  $n$  hombres se sientan alrededor de una mesa. ¿Cuántos son en este caso los diferentes modos de sentarse, si se consideran iguales aquellos que se obtienen por desplazamiento de todas las personas en sentido horario en un número arbitrario (pero igual para todos) de asientos? (Hágase uso del lema de Bernsайд.)

2.115. Los números del 1 al  $10^5$  están escritos cada uno en hojas sueltas. Los números inferiores a  $10^5$  comienzan por el número correspondiente de ceros, por ejemplo,  $346 = 000346$ . Convengamos en considerar que las cifras 0, 1, 8 significan lo mismo tanto en la inscripción directa (normal), como en la forma volcada, mientras que la cifra 6 se convierte, al volcarla, en 9, y viceversa. Por eso, para los números, por ejemplo, 89166 y 99168 podemos preparar tan solo una hoja. ¿Cuántas hojas nos harán falta?

2.116.  $D$ ,  $R$  son unos conjuntos finitos. Designemos con  $R^D$  el conjunto de aplicaciones de  $D$  en  $R$ ;  $G$  es el grupo de permutaciones

del conjunto  $D$ . Se escribe

$$f_1 \sim f_2, \text{ si } \exists g \in G: f_1(gd) = f_2(d) \quad \forall d \in D.$$

Demuéstrase que: a)  $|R^D| = |R|^{|D|}$ ; b)  $\sim$  es una relación de equivalencia en el conjunto  $R^D$ .

2.117. Las caras de un cubo están pintadas de dos colores: azul y rojo. Las coloraciones de dos cubos se consideran equivalentes, si uno de ellos se puede girar de un modo tal que los cubos dejen de parecer diferentes. ¿Cuántas son las clases de equivalencia y cuál es la potencia de cada una de ellas?

2.118.  $D, R$  son unos conjuntos finitos;  $G$  es un grupo de permutaciones del conjunto  $D$ . A todo elemento  $r \in R$  se le está atribuido un peso  $\omega(r)$ , esto es, el elemento de un anillo conmutativo. El peso  $W(f)$  de la función  $f \in R^D$  se define como el producto  $W(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$ . Demuéstrase que si las funciones  $f_1$  y  $f_2$  son equivalentes, entonces tienen un peso igual.

2.119. Se denomina *inventario*  $\text{Inv } Q$  de un conjunto  $Q$  a

$$\text{Inv } Q = \sum_{q \in G} \omega(q),$$

donde  $\omega(q)$  es un elemento del anillo conmutativo.

Sean  $D$  y  $R$  unos conjuntos finitos. Demuéstrase que

a)  $\text{Inv } R^D = (\text{Inv } R)^{|D|}$ ;

b) Si  $D$  está dividido en varios componentes disjuntos  $D_1, \dots, D_h$ , y  $S$  es el conjunto de todas las funciones que son constantes en cada componente, entonces se verifica la relación

$$\text{Inv } S = \prod_{i=1}^h \sum_{r \in R} [\omega(r)]^{|D_i|}.$$

2.120. Las caras de un tetraedro se pintan en dos colores: rojo y azul. Si dos tetraedros dispuestos paralelamente están pintados de un modo distinto, puede ocurrir que uno de ellos se pueda girar de tal manera que ambos dejen de parecer distintos. En este caso pertenecerán a una clase de equivalencia. Calcúlese el número de diferentes clases de equivalencia aplicando el teorema de Polya.

2.121. Determínese, aplicando el teorema de Polya: ¿mediante cuántos métodos se puede pintar un cubo en dos colores de tal modo que cuatro caras sean coloreadas de rojo, y dos caras, de azul? (Dos cubos en el espacio tridimensional se consideran coloreados igual, si uno de ellos se puede girar de tal manera que los cubos se hagan indistinguibles.)

Si  $X$  es un conjunto, la relación binaria en  $X$  es un subconjunto  $P \subset X \times X$ ; escribimos  $x \leq y$ , si  $(x, y) \in P$ . La relación binaria recibe el nombre de orden parcial, si satisface las condiciones:

a)  $x \leq x, \quad \forall x \in X$ ;

b)  $x \leq y, \quad y \leq x \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X$ ;

c)  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z, \forall x, y, z \in X$ .

Se denomina *conjunto parcialmente ordenado* al conjunto  $X$  junto con el orden parcial en él. El conjunto parcialmente ordenado  $X$  se denomina anticadena, si para cualesquiera,  $x, y \in X$  de  $x \leq y$  se deduce que  $x = y$ . Se llama *automorfismo* del conjunto parcialmente ordenado  $X$  a tal permutación  $g$  del conjunto  $X$  que  $x \leq y \Leftrightarrow gx \leq gy$  para cualesquiera  $x, y \in X$ .

2.122. Demuéstrase que el conjunto de todos los automorfismos del conjunto parcialmente ordenado  $X$  es un grupo respecto a la operación de composición llamado grupo de automorfismos del conjunto parcialmente ordenado  $X$ .

2.123. Sea  $L$  un subgrupo del grupo de automorfismos de un conjunto finito parcialmente ordenado  $X$ . Demuéstrase que las órbitas del grupo  $L$  son anticadenas.

Con  $X/L = \{C\}$  se denota el conjunto de órbitas del grupo  $L$ . En este conjunto se introduce una relación binaria  $\leq$  del modo siguiente:  $C \leq C'$ , si existen  $x' \in C, x' \in C'$  tales que  $x \leq x'$ .

2.124. Demuéstrase que la relación binaria  $\leq$  en  $X/L$  es un orden parcial.

Sea  $D$  un conjunto finito parcialmente ordenado,  $R$ , una cadena finita y  $G$ , un subgrupo del grupo de automorfismos de  $D$ . La función  $f \in R^D$  se denomina *isótona*, si de  $d_1 \leq d_2$  se deduce que  $f(d_1) \leq f(d_2)$  para cualesquiera  $d_1, d_2 \in D$ . El conjunto de todas las funciones isótomas de  $D$  en  $R$  se designa por  $M(D, R)$ .

2.125. Demuéstrase que de  $f_1 \in M(D, R)$  y  $f_1 \sim f_2$  se deduce  $f_2 \in M(D, R)$ .

2.126. Demuéstrase que el número de clases de equivalencia de las funciones isótomas de  $D$  en  $R$  es igual a  $|G|^{-1} \sum_{g \in G} |M(D/\{g\}, R)|$ , donde por medio de  $\{g\}$  se designa un grupo cíclico engendrado por el elemento  $g$ .

2.127. Demuéstrase, haciendo uso de la afirmación del problema 2.126, que para los conjuntos finitos  $D$  y  $R$  con el grupo de permutaciones  $G$  sobre el conjunto  $D$  el número de clases de equivalencia de las funciones de  $D$  en  $R$  es igual a  $P_G(|R|, |R|, \dots)$ .



## MÉTODOS LÓGICOS

### § 1. Método de inclusión y exclusión

Examinemos un  $n$ -conjunto de elementos y un  $m$ -conjunto de propiedades  $p_1, \dots, p_m$ , de las que pueden disponer o no los elementos citados.

Designemos por  $N_{i_1, \dots, i_h}$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ ) el número de elementos que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$ , y por  $N(r)$  ( $0 \leq r \leq m$ ) el número de elementos que poseen exactamente  $r$  propiedades.

Siendo fijo  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , la suma  $\sum_{i_1, \dots, i_h} N_{i_1, \dots, i_h}$ , extendida a toda clase de juegos de números naturales  $i_1, \dots, i_h$  tales que  $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ , representa el número de elementos (tomando en consideración su multiplicidad) que poseen no menos de  $k$  propiedades. Si un elemento posee  $s$  propiedades, se contará en la suma mencionada  $C_s^k$  veces.

Tiene lugar la siguiente fórmula de inclusión y exclusión:

$$N(r) = \sum_{h=1}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_h^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h}$$

En efecto, un elemento que posee exactamente  $s$ ,  $s \neq r$ , propiedades no se tendrá en cuenta en la suma que figura en el segundo miembro de esta igualdad, mientras que el elemento que posee exactamente  $r$  propiedades se tendrá en cuenta una sola vez, puesto que

$$\sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_h^s = C_s^r \sum_{h=r}^s (-1)^{h-r} C_{s-r}^{h-r} = \begin{cases} 1, & r = s, \\ 0, & r \neq s. \end{cases}$$

De esta fórmula se deduce, en particular, que el número de elementos que no posee ninguna de las propiedades  $p_1, \dots, p_m$  es igual a

$$N(0) = \sum_{h=0}^m (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h}$$

Si a cada elemento le ponemos en correspondencia un número llamado su peso y si designamos por  $V(0)$  la suma de pesos de todos los elementos, por  $V(r)$  ( $1 \leq r \leq m$ ) la suma de pesos de los elementos (tomando en consideración la multiplicidad de éstos) que poseen no menos de  $r$  propiedades y por  $W(r)$  la suma de pesos de los elementos que poseen exactamente  $r$  propiedades, entonces, razonando igual que anteriormente, podemos demostrar la igualdad

$$W(r) = \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r V^*(h), \quad 0 \leq r \leq m,$$

de la cual se deduce la fórmula de inclusión y exclusión, si el peso de cada elemento es igual a la unidad.

3.1. Demuéstrese la igualdad:

$$\left| \sum_{i=1}^m S_i \right| = \sum_{i_1=1}^m |S_{i_1}| - \sum |S_{i_1} S_{i_2}| + \dots + (-1)^m |S_1 \dots S_m|,$$

donde  $S_1, \dots, S_m$  son conjuntos finitos;  $S_i + S_j$  y  $S_i S_j$  significan la unión y la intersección de los conjuntos  $S_i$  y  $S_j$ , respectivamente;  $|S|$  es el número de elementos del conjunto  $S$ , y la suma  $\sum |S_{i_1} \dots S_{i_k}|$  ( $k = 1, \dots, m$ ) se extiende a toda clase de juegos de números enteros  $i_1, \dots, i_k$  de tal índole que  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ .

3.2. Hállese el número de permutaciones de elementos de un  $m$ -conjunto que dejan en su lugar exactamente  $r$  ( $0 \leq r \leq m$ ) elementos.

3.3. Examinemos  $m!$  permutaciones de elementos de un  $m$ -conjunto. Se pueden formar  $(m!)^d$  diferentes juegos ordenados a partir de  $d$  permutaciones. Hállese el número de tales juegos, en cada una de  $d$  permutaciones de los cuales quedan en su lugar exactamente  $r$  ( $0 \leq r \leq m$ ) elementos.

3.4. Hállese el número de métodos de colocación de  $n$  bolas en  $m$  cajones de un modo tal que  $r$  ( $0 \leq r \leq m$ ) cajones queden vacíos.

3.5. De una urna que contiene  $m$  diferentes bolas se sacan simultáneamente  $s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) bolas y se escriben sus números, después de lo cual las bolas se colocan de nuevo en la urna. Se pueden formar  $(C_m^s)^d$  diferentes juegos que se obtienen como resultado de  $d$  extracciones. Hállese el número de juegos en los cuales

a) se encuentran todas las bolas;

b) no se encuentran exactamente  $r$  ( $0 \leq r \leq m$ ) bolas.

Demuéstrese las identidades:

$$3.6. \sum_{k=0}^n (-1)^k C_m^k C_{m-k}^{n-k} = 0, \quad 1 \leq n < m.$$

$$3.7. \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{m+n-k-1}^{n-k} = 0, \quad 1 \leq m \leq n.$$

$$3.8. \sum_{h=0}^{m-s} (-1)^h C_m^h (C_{m-h}^s)^d = 0, \quad 1 \leq sd < m.$$

$$3.9. \sum \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} = \sum_{h=0}^m (-1)^h C_m^h (m-k)^n,$$

donde la sumación en el primer miembro de la identidad se extiende a toda clase de juegos ordenados de los números enteros positivos  $n_1, \dots, n_m$  tales que  $n = n_1 + \dots + n_m$ .

$$3.10. \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (m-k)^n = 0, \quad 1 \leq n < m.$$

$$3.11. \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (m-k)^m = m!$$

3.12. Designemos por  $\varphi(n)$  (función de Euler) la cantidad de números naturales que son inferiores a  $n$  y recíprocamente primos respecto de éste. Demuéstrese que si el desarrollo del número  $n$  en factores simples  $q_1, \dots, q_m$  tiene por expresión  $n = q_1^{h_1} \dots q_m^{h_m}$  ( $h_i \geq 1, i = 1, \dots, m$ ), entonces

$$\varphi(n) = n (1 - 1/q_1) \dots (1 - 1/q_m).$$

3.13. Sea  $n$  un número natural arbitrariamente elegido. Designemos por  $q_1, \dots, q_m$  todos los números primos que no sobrepasan de  $\sqrt{n}$ , y por  $\pi(x)$ , la cantidad de números primos que no sobrepasan de  $x > 0$ . Demuéstrese que

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = n + 1 + \sum_{h=1}^m (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} \left[ \frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_h}} \right],$$

donde  $[x]$  denota la parte entera del número  $x$ .

3.14. Calcúlese  $S = \sum (1/2^k)$ , donde la sumación se realiza respecto de todos los  $k$  naturales no múltiplos de 2, 3 y 5.

3.15. Sea dada una matriz cuadrada  $A = (a_{i,j})$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) de orden  $m$ . Designemos por

$$\text{per } A = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{1, i_1} \dots a_{m, i_m}$$

(donde la sumación se realiza respecto de toda clase de permutaciones de los números  $1, \dots, m$ ) el permanente de la matriz  $A$ . Demuéstrese que

$$\text{per } A = S(A) + \sum_{h=1}^m (-1)^h \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_h)} S(A_{i_1, \dots, i_h})$$

donde  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ ;  $A_{i_1, \dots, i_k}$  denota una matriz obtenida de  $A$  por sustitución de las columnas con los números  $i_1, \dots, i_k$  por las columnas compuestas de ceros;  $S(A_{i_1, \dots, i_k})$  es el producto de las sumas de las filas de la matriz  $A_{i_1, \dots, i_k}$ , y la suma  $\sum S(A_{i_1, \dots, i_k})$  ( $1 \leq k < m$ ) está extendida a toda clase de muestras sin repetición de los números  $i_1, \dots, i_k$  de  $1, \dots, m$ .

## § 2. Sistemas de representantes de los conjuntos

Sean dados un  $n$ -conjunto  $S = (s_1, \dots, s_n)$  y un  $m$ -conjunto  $M(S) = \{S_1, \dots, S_m\}$ , cuyos elementos  $S_i \subset S$  ( $i = 1, \dots, m$ ). La matriz  $A = (a_{ij})$  de dimensión  $m \times n$ , en la cual

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & s_j \in S_i, \\ 0, & s_j \notin S_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n,$$

lleva el nombre de *matriz de incidencia* para  $M(S)$  con relación a  $S$ . Se denomina *sistema de representantes distintos* (en la forma abreviada: *s.r.d.*) para  $M(S)$  al  $m$ -conjunto de elementos  $x_1, \dots, x_m$  pertenecientes a tales  $S$  que  $x_i \in S_i$ ,  $x_i \neq x_j$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, m$ ).

3.16. Sea  $A$  una matriz de incidencia para  $M(S)$  con relación a  $S$ . Demuéstrese que el número de s.r.d. para  $M(S)$  es igual a  $\text{per } A$ .

3.17. Hállese el número de s.r.d. para un sistema de  $m$  conjuntos

$$S_i = (1, \dots, i-1, i+1, \dots, m), \quad i = 2, \dots, m-1, \\ S_1 = (2, \dots, m), \quad S_m = (1, \dots, m-1).$$

El siguiente teorema que se aduce aquí sin demostración ofrece la condición necesaria y suficiente de existencia del s.r.d. para  $M(S)$ .

TEOREMA DE HALL. Una totalidad de conjuntos  $M(S)$  tiene un sistema de representantes distintos cuando, y sólo cuando, para cualquier  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) y cualquier  $k$ -muestra sin repetición  $i_1, \dots, i_k$  de  $1, \dots, m$  se verifica,

$$\left| \sum_{\alpha=1}^k S_{i_\alpha} \right| \geq k,$$

es decir, el número de elementos de la unión de conjuntos  $S_{i_1}, \dots, S_{i_k}$  no es inferior a  $k$ .

3.18. Supongamos que la matriz de incidencia para  $M(S)$  es de tal índole que la cantidad de unidades en cada fila y en cada columna es igual a un número fijo  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ). Demuéstrese que existe un s.r.d. para  $M(S)$ .

3.19. Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos finitos y sea  $k \geq 1$  un número natural. Entre  $A$  y  $B$  se ha establecido tal correspondencia multi-

forme que a todo elemento del conjunto  $A$  le corresponden exactamente  $k$  elementos del conjunto  $B$  y a todo elemento de  $B$  le corresponden exactamente  $k$  elementos de  $A$ . Demuéstrase que entre  $A$  y  $B$  puede establecerse una correspondencia biunívoca sin que se agreguen nuevas conexiones.

3.20. Se tienen un cierto conjunto de cargos y un conjunto de pretendientes para ocupar dichos cargos. Demuéstrase que si para cada cargo pretenden exactamente  $k$  ( $k \geq 1$  fijo) hombres y cada pretendiente puede trabajar en  $k$  cargos, entonces a cada candidato se le puede conceder un trabajo adecuado.

3.21. Veamos un rectángulo latino de dimensión  $m \times n$  ( $m < n$ ), es decir, una tabla rectangular de  $m$  filas y  $n$  columnas compuesta por los números  $1, \dots, n$  de un modo tal que en cada fila se encuentren todos los números de  $1$  a  $n$ , y en cada columna todos los números sean diferentes. Demuéstrase que siempre puede agregarse una fila más de la permutación de los números  $1, \dots, n$  de un modo tal que la tabla a obtener sea un rectángulo latino de dimensión  $(m + 1) \times n$ .

3.22. Demuéstrase que en una matriz numérica arbitraria el número mínimo de filas y columnas, en las que están contenidos todos los elementos no nulos, es igual al número máximo de elementos no nulos, de los cuales ningún par se contiene en una fila y en una columna.

3.23. Demuéstrase que si en una matriz cuadrada de orden  $m$  se contiene una submatriz nula de dimensión  $s \times t$ , y si  $s + t > m$ , entonces el determinante y el permanente de la matriz son iguales a cero.

3.24. Sean dadas dos particiones del conjunto  $S$  en  $m$  subconjuntos:

$$S = \sum_{i=1}^m A_i = \sum_{i=1}^m B_i$$

y supongamos que para cualquier número natural  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) y cualquier  $k$ -muestra de  $1, \dots, m$  se cumple la condición: el conjunto  $A_{i_1} + \dots + A_{i_k}$  contiene a lo sumo  $k$  conjuntos de los  $B_1, \dots, B_m$ . En este caso existen los elementos  $s_1, \dots, s_m$  que representan un s.r.d. simultáneamente para  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$  y para  $B_1, \dots, B_m$ , con la particularidad de que  $i_1, \dots, i_m$  es cierta permutación de los números  $1, \dots, m$  (la totalidad  $s_1, \dots, s_m$  se llama sistema de representantes comunes (o bien, en forma abreviada, s.r.c.) para  $A_1, \dots, A_m$  y  $B_1, \dots, B_m$ ).

3.25. Sean dadas dos diferentes particiones del conjunto finito  $S$  en  $m$  subconjuntos:

$$S = \sum_{i=1}^m A_i = \sum_{i=1}^m B_i$$

tales que  $|A_i| = |B_j|$ ,  $A_i A_j = B_i B_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ ). Entonces existe un s.r.c. para  $A_1, \dots, A_m$  y  $B_1, \dots, B_m$ .

3.26. Supongamos que  $G$  es un grupo finito y  $H$ , el subgrupo de éste. Demuéstrase que existe un conjunto de elementos  $s_1, \dots, s_m$  que son representantes de las clases contiguas derechas e izquierdas, simultáneamente, del grupo  $G$  en el subgrupo  $H$ , es decir,

$$G = \sum_{i=1}^m s_i H = \sum_{i=1}^m H s_i, \quad m = |G|/|H|.$$

3.27. Supongamos que todo subconjunto  $S_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) de un conjunto finito  $S$  contiene no menos de  $p$ ,  $p \geq 1$ , elementos. El sistema  $B_1, \dots, B_m$  de  $p$ -subconjuntos del conjunto  $S$  se denominará sistema de  $p$ -representantes distintos, o bien, en forma abreviada, s.p.r.d., si  $B_i \subset S_i$ ,  $B_i \neq B_j$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, m$ ). Demuéstrase la siguiente condición necesaria de existencia del s.p.r.d.: para cualquier número natural  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) y para cualquier  $k$ -muestra de  $1, \dots, m$  se verifica la desigualdad  $|S_{i_1} + \dots + S_{i_k}| \geq n$ , donde  $n$  es un número natural mínimo tal que  $C_n^p \geq k$ .

### § 3. Teorema y números de Ramsey

Examinemos  $n$  puntos en un plano, de los cuales cualesquiera tres no están situados en una misma recta; al unir cada dos puntos por el segmento de una recta, obtendremos el  $n$ -grafo completo. Supongamos que cada arista del grafo está pintada en uno de los  $m$  colores. Si todas las aristas del  $n$ -grafo están pintados de un mismo color, dicho grafo se llamará *monocromático*.

3.28. Demuéstrase que, cualquiera que sea la coloración de las aristas de un 6-grafo completo en dos colores, existe un 3-subgrafo monocromático.

3.29. Hállese tal coloración de las aristas de un 5-grafo completo con la cual ningún 3-subgrafo sea monocromático.

3.30. Demuéstrase que en una compañía de 6 hombres siempre se encontrarán tres hombres que se conocen o tres que no se conocen.

3.31. Sean  $k \geq 2$  y  $m \geq 2$  unos números naturales arbitrarios. Demuéstrase que existe un número natural  $R = R(k, m; 2)$  que depende sólo de  $k$  y  $m$  y que es de tal índole que si el número de vértices de un  $n$ -grafo completo no es inferior a  $R$ , entonces cualquiera que sea la coloración de sus aristas en dos colores (rojo y azul), existe o bien un  $k$ -subgrafo rojo monocromático, o bien un  $m$ -subgrafo azul monocromático; y si  $n < R$ , existe tal coloración de las aristas que todo  $k$ -subgrafo no es rojo monocromático y todo  $m$ -subconjunto no es azul monocromático.

3.32. Demuéstrese que

$$R(k, m; 2) \leq R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2), \\ k > 2, m > 2$$

y si los números  $R(k-1, m; 2)$  y  $R(k, m-1; 2)$  son pares, la citada desigualdad será rígida.

3.33. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k, m; 2) \leq C_{m+k-2}^{k-1}, \quad k \geq 2, m \geq 2.$$

3.34. Sean  $k_1, \dots, k_m$  números naturales arbitrarios distintos de cero y de la unidad. Demuéstrese que existe un número natural mínimo  $R = R(k_1, \dots, k_m; 2)$  que depende sólo de  $k_1, \dots, k_m$  y que es de tal índole que si el número de vértices de un  $n$ -grafo completo no es inferior a  $R$ , entonces, cualquiera que sea la coloración de sus aristas en  $m$  colores, existe o bien el  $k_1$ -subgrafo monocromático de primer color etc., o bien el  $k_m$ -subgrafo monocromático de  $m$ -ésimo color.

3.35. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k_1 + 1, \dots, k_m + 1; 2) \leq (k_1 + \dots + k_m)! / (k_1! \dots k_m!).$$

3.36. Hállese tal coloración en dos colores de las aristas de un 13-grafo completo para la cual ningún 3-subgrafo es rojo monocromático y ningún 5-subgrafo es azul monocromático.

3.37. Demuéstrese que

$$R(3, 4; 2) = 9, \quad R(3, 5; 2) = 14.$$

3.38. Hállese tal coloración en dos colores de las aristas de un 17-grafo completo para la cual ningún 4-subgrafo es monocromático.

3.39. Demuéstrese que  $R(4, 4; 2) = 18$ .

3.40. Demuéstrese que si para cierto número natural  $n$  existe el número  $p$  ( $0 < p < 1$ ) para el cual se verifica la desigualdad

$$C_n^h p C_h^i + C_n^i (1-p) C_i^h < 1,$$

entonces  $R(k, l; 2) > n$ .

3.41. Demuéstrese la desigualdad

$$R(k, k; 2) > ck2^{h/2},$$

donde  $c > 0$  es una constante.

3.42. Demuéstrese que para cualquier número natural  $n$  existe un número  $N = N(n)$  tal que entre cualesquiera  $N$  puntos en un plano, de los cuales ninguna combinación de tres yace en una recta, se pueden elegir  $n$  puntos que sean vértices de un polígono convexo de  $n$  lados.

## TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS

## § 1. Matrices especiales

Sean dados un conjunto  $S$  de  $n$  elementos  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  y  $m$  subconjuntos de éste  $S_1, S_2, \dots, S_m$ . Se llama *matriz de incidencia* para un sistema dado de subconjuntos respecto de  $S$  a una matriz  $(a_{ij})$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ), donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & s_j \in S_i, \\ 0, & s_j \notin S_i. \end{cases}$$

Llamaremos *matriz binaria* a la matriz que está compuesta por los elementos 0 y 1.

Se denomina *matriz de congruencia* de dos en dos para un conjunto de números  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  a una matriz  $(a_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), donde  $a_{ij} = 1$ , si  $b_i > b_j$ , y  $a_{ij} = 0$  en el caso contrario.

Se llama *matriz conmutable (de permutación)*  $(k_1, \dots, k_n)$  a una matriz de orden  $n$ , en la cual  $a_{ij} = 1$  para  $j = k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq k_j$ .

Sea una matriz  $A = (a_{ij})$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ). Se denomina *permanente* de esta matriz al número  $\text{per } A = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{mi_m}$ . Aquí la sumación se realiza respecto de todas las  $m$  permutaciones  $(i_1, \dots, i_m)$  de números enteros  $1, 2, \dots, n$  ( $m \leq n$ ). El permanente  $A$  no cambia al realizar la permutación de las filas o de las columnas de la matriz.

Se denomina *matriz de Hadamard* a una matriz cuadrada, compuesta por los elementos 1 y  $-1$ , en la cual cada fila es ortogonal a todas las demás filas y cada columna, ortogonal a todas las columnas restantes. La matriz de Hadamard en la cual la primera fila y la primera columna constan sólo de 1 se llama *normalizada*. Por ejemplo, la matriz  $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  es de tal tipo.

Se denomina *producto directo de las matrices*  $A$  y  $B$ , la matriz de orden  $mn$  que tiene la forma siguiente  $\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$ , donde

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1 \dots n$$

$$B = (b_{lk}), \quad l, k = 1 \dots m.$$



Se llama *traza de una matriz* la suma de elementos que forman su diagonal principal; el valor máximo de la traza, obtenido como resultado de toda clase de permutaciones de las filas y columnas de una matriz se llama *rango de frontera*. Llámase  $\alpha$ -anchura de una matriz el número de sus columnas que pueden ser elegidas de ella de tal manera, que la suma de los valores de éstas sea en cada fila no menor de  $\alpha$ .

4.1. Fórmese la matriz de permutación (3 2 4 1).

4.2. Demuéstrase que el permanente de una matriz de permutación de  $n$  elementos es igual a 1.

4.3. ¿A qué es igual el determinante de una matriz de permutación?

4.4. Fórmese una matriz de incidencia del sistema de ternas {1, 2, 3}, {1, 4, 5}, {1, 6, 7}, {2, 4, 6}, {2, 5, 7}, {3, 4, 7}, {3, 5, 6} con relación al conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Calcúlese el permanente de esta matriz.

4.5. Fórmese una matriz de incidencia para el sistema de subconjuntos {1, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4}, {4, 5} del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Calcúlese el permanente de esta matriz.

4.6. ¿Cuántas matrices cuadradas simétricas binarias de orden  $n$  existen?

4.7. Determínese la cantidad de menores de  $k$ -ésimo orden en la  $n \times n$ -matriz  $A = (a_{ij})$  que carece de elementos diagonales de la matriz.

4.8. Determínese el número de diferentes matrices cuadradas binarias de orden  $n$ , en cada fila y en cada columna de las cuales figura una sola unidad.

4.9. ¿Cuántas  $m \times n$ -matrices binarias existen, en cada una de las cuales la suma de todos los elementos es igual a  $r$ ?

4.10. ¿Cuántas son las matrices cuadradas de orden  $n$  con elementos  $+1$  y  $-1$ , en cada una de las cuales la suma de todos los elementos es igual a  $r$ ?

4.11. ¿Cuántas matrices binarias de  $n$ -ésimo orden existen, en cada columna de las cuales figuran exactamente  $r$  unidades?

4.12. Una matriz se llama *equidiagonal*, si todos los elementos de su diagonal son iguales. ¿Cuántas son las matrices equidiagonales de orden  $n$  con los elementos  $+1$  y  $-1$ ?

4.13. Hállase el número de matrices equidiagonales simétricas binarias de orden  $n$ , en cada una de las cuales hay exactamente  $k$  unidades?

4.14. Hállase el número de matrices cuadradas binarias de orden  $n$ , en cada una de las cuales la diagonal está ocupada por ceros, debajo de la diagonal figuran  $k$  unidades y por encima de ella,  $l$  unidades. Calcúlese este número para  $n = 4$ ,  $k = 5$ ,  $l = 2$ .

4.15. Determínese el número de  $5 \times 7$ -matrices binarias, en cada una de las cuales las dos columnas primeras contienen juntas exactamente 7 unidades y cada una de las siguientes, exactamente dos unidades.

4.16. Sea  $M$  un  $n$ -conjunto y  $X$  su  $r$ -subconjunto. Determínese el número de tales  $m$ -subconjuntos del conjunto  $M$  que tienen en la intersección con  $X$  exactamente  $l$  elementos.

4.17. Demuéstrase que si una matriz de 3<sup>er</sup> orden consta de los elementos  $+1$  y  $-1$ , su determinante es un número par.

4.18. Determínese el número de diferentes matrices cuadradas binarias de orden  $n$  que contienen en cada una de las primeras  $m$  filas  $r$  unidades, y en cada una de las filas restantes,  $q$  unidades.

4.19. Resuélvase el problema antecedente bajo la condición complementaria de que todos los elementos de la diagonal principal sean ceros.

4.20. Determínese el número de diferentes matrices binarias de dimensión  $m \times n$ , en las cuales cada una de las primeras  $r$  columnas tiene  $s$  unidades, mientras que el número total de unidades en las demás columnas es igual a  $k$ .

4.21. Fórmese una matriz de congruencia de dos en dos para el conjunto de números  $\{3, 2, 1, 4, 5\}$ .

4.22. Demuéstrase que el permanente de una matriz de congruencia de dos en dos es igual a cero.

4.23. Calcúlese el permanente de una matriz cuadrada de orden  $n = 4$ , en la cual en cada columna y en cada fila hay solamente un cero, y los demás elementos son unidades.

4.24. Calcúlese los permanentes de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.25. Demuéstrase que para una matriz cuadrada  $A$  con elementos no negativos siempre per  $A \geq |\det A|$ .

4.26. Sea  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) una matriz cuadrada con elementos no negativos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = b_j.$$

Demuéstrase que  $A^2$  es una matriz nula cuando y sólo cuando,  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$ .

4.27. Hállese el valor máximo que puede tomar el determinante de una matriz de tercer orden, a condición de que todos sus elementos son  $+1$  y  $-1$ .

4.28. Para una matriz de la forma

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

demuéstrese la validez de la relación recurrente

$$\text{per } B_n = \text{per } B_{n-1} + \text{per } B_{n-2}.$$

4.29. Demuéstrese que para las  $n \times n$ -matrices, cuyos elementos de la diagonal principal son ceros y los demás elementos son unidades, el permanente es igual a

$$p_n = n! (1 - 1/1! + 1/2! - \dots + (-1)^n/n!).$$

4.30. ¿Serán matrices de Hadamard las siguientes:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

4.31. La primera fila de cierta matriz de Hadamard consta de  $n$  unidades. ¿Cuál es la cantidad total de unidades en esta matriz?

4.32. Verifíquese que los productos directos  $H_2 \times H_2$  y  $H_2 \times H_2 \times H_2$  de una matriz de Hadamard normalizada de orden 2 son matrices de Hadamard normalizadas de orden 4 y 8, respectivamente.

4.33. Hállese la traza, el rango de frontera y la  $\alpha$ -anchura, donde  $\alpha = 1, 2, 3$  y  $4$ , de las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{b) } & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{c) } & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{d) } & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{e) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{f) } & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.34. Indíquese el grupo de tales permutaciones de columnas y de filas que no cambian la matriz  $f$ ) del problema 4.33.

4.35. ¿Cuáles de los valores siguientes no varían al realizar cualesquiera permutaciones de columnas y filas de cualesquiera matrices cuadradas  $A$ :

a) la suma de todos los elementos de la matriz; b) la traza de la matriz; c) el  $\text{per } A$ ; d) el  $\det A$ ; e) el  $\text{per } (A^2)$ ; f) el  $\det (A^2)$ ; g) los valores propios de la matriz; h) el rango de la matriz  $A$ ; i) el rango de la matriz  $A^2$ ?

4.36. Escribáse el número máximo posible de matrices binarias de orden 2 que no se transforman una en otra por permutaciones de las columnas y de las filas.

## § 2. Rectángulos y cuadrados latinos

Se denomina *rectángulo latino* a una tabla rectangular de dimensión  $m \times n$ , en la cual en cada fila y en cada columna los elementos no se repiten. Se denomina *cuadrado latino* de orden  $n$  a una tabla cuadrada de dimensión  $n \times n$  llena de  $n$  diferentes elementos de un modo tal que cada elemento figura una sola vez en cada fila y en cada columna.

Dos cuadrados (o rectángulos) latinos se llaman *equivalentes* (*isomorfos*), si uno se obtiene del otro por permutación de las columnas y de las filas y por designación de nuevo de los elementos. El isomorfismo se escribe en la forma  $A \times B \times C$ , donde  $A$  es una sustitución que define la permutación de las columnas;  $B$ , la permutación de las filas y  $C$ , la designación de nuevo de los elementos. Se denomina *automorfismo* de un cuadrado latino al isomorfismo que transforma el cuadrado en sí mismo. El conjunto de automorfismos del cuadrado dado forma un grupo. Un cuadrado latino se llama *cíclico*, si todas sus filas se obtienen a partir de su primera fila por desplazamientos cíclicos.

Dos cuadrados latinos  $(a_{ij})$  y  $(b_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) de orden  $n$  se denominan *ortogonales*, si todos los pares  $(a_{ij}, b_{ij})$  son diferentes. Los pares de cuadrados latinos ortogonales existen para cualquier  $n$ , salvo para  $n = 2$  y  $n = 6$ . El número de cuadrados latinos ortogonales dos a dos de orden  $n$  no es superior a  $n - 1$ . Si  $n = p^\alpha$ , donde  $p$  es un número primo y  $\alpha$ , un número natural, entonces para  $n \geq 3$  existe un conjunto completo de  $n - 1$  cuadrados latinos ortogonales.

4.37. ¿De cuántos modos puede formarse una tabla de dimensión  $2 \times 9$ , cuya primera fila sea 1 2 3 4 5 6 7 8 9, y la segunda represente una permutación de estos números de una manera tal que no haya repeticiones de los números en ninguna columna de esta tabla?

4.38. Se tienen las siguientes figuras geométricas: un triángulo, un cuadrado, un trapecio y una circunferencia (cada figura en dos ejemplares). En la primera fila se disponen cuatro figuras diferentes.

Hállense todas las disposiciones posibles de las figuras restantes en la segunda fila de un modo tal que debajo de cada figura de la primera fila no haya una figura homónima de la segunda fila.

4.39. Hállense todos los rectángulos latinos  $3 \times 5$  de los elementos 1, 2, 3, 4, 5 que contengan las dos primeras filas

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1.

4.40. Se dan las tablas siguientes:

	1	2	3	4		1	2	3	4
(A)	2	1	4	3	(B)	2	3	4	1
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$

a) ¿De cuántos modos puede elegirse la permutación  $a_1, a_2, a_3, a_4$  de los números 1, 2, 3, 4 de una manera tal que en ninguna columna de la tabla (A) haya repetición de los números?

b) La misma pregunta para la tabla (B).

4.41. Las cifras 1, 2, . . . , 9 se disponen en forma de un rectángulo latino con 8 filas y 9 columnas. ¿Será cierto que

(A) puede agregarse una fila más para obtener un cuadrado latino: a) siempre por lo menos de dos modos, b) siempre exactamente de un solo modo;

(B) no se puede agregar una fila;

(C) el número de métodos que existen para agregar una fila depende de la forma del rectángulo dado?

4.42. ¿Cuántos rectángulos latinos de dimensión  $3 \times 5$  de cinco elementos con la primera fila 1 2 3 4 5 existen?

4.43. Cómo puede dividirse un campo cuadrado en parcelas de tal manera que pueda sembrarse en él  $m$  variedades de trigo con el fin de comparar la fertilidad de dichas variedades, con la particularidad de que la comparación excluya la influencia de la variación de la fertilidad dentro de los límites de la parcela. Convengamos en considerar que la fertilidad decrece a medida que nos alejamos de un lado del campo (no se sabe de qué lado precisamente) hacia el lado opuesto.

4.44. Se tienen monedas de 1, 2, 3, 5 y 10 kopeks de valor. Dispónganse 16 monedas en forma de un cuadrado de dimensión  $4 \times 4$  de un modo tal que en ninguna fila, ninguna hilera y ninguna diagonal del cuadrado hayan dos monedas de igual valor y que el coste total de todas las 16 monedas sea máximo. ¿Cuál es este coste?

4.45. En un torneo ajedrecístico participan cinco hombres. Cada ajedrecista juega una partida al día. Hágase la tabla de torneo de un modo tal que durante cinco días cada ajedrecista tenga un encuentro con todos los demás jugadores. Al completar la tabla obtenida con un elemento fijo, obténgase un cuadrado latino.

4.46. Constrúyanse dos cuadrados latinos cíclicos de orden 5. Demuéstrese que todos los cuadrados de esta índole son isomorfos de dos en dos.

4.47. Constrúyase un cuadrado latino no cíclico de orden 4, haciendo uso de cuadrados latinos de orden 2.

4.48. Muéstrese que los siguientes cuadrados latinos de orden 3 son isomorfos:

1	2	3	1	3	2
2	3	1	3	2	1
3	1	2	2	1	3

4.49. Demuéstrese que los siguientes cuadrados latinos son isomorfos:

1	2	3	4	5	3	1	4	5	2	5	3	4	1	2
2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	3	1	2	4	5
3	4	5	1	2	4	3	5	2	1	4	2	3	5	1
4	5	1	2	3	5	4	2	1	3	1	4	5	2	3
5	1	2	3	4	2	5	1	3	4	2	5	1	3	4

4.50. Hállese el cuadrado latino  $B$ , isomorfo al cuadrado dado  $A$ , si está dado un isomorfismo  $p$  que convierte  $A$  en  $B$ :

$p: (2\ 3) \times (1\ 3\ 4) \times (1\ 3),$	1	2	3	4	
	3	4	2	1	
	$A:$	2	1	4	3
		4	3	1	2

4.51. Muéstrese que los siguientes cuadrados latinos de orden 4 no son isomorfos:

0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	2	1	0

4.52. Indíquense los automorfismos del primer cuadrado latino del problema 4.48.

4.53. Determinése el orden del grupo de automorfismos del cuadrado latino simétrico <sup>1)</sup> de orden 4:

4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	1
3	2	1	4

<sup>1)</sup> Un cuadrado latino cuyos elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, se llama *cuadrado simétrico*.

4.54. Se da un sistema de grupos de pares

01	02	03	04	05
25	13	15	12	14
34	45	24	35	23

Aprovechando este sistema, constrúyase un cuadrado latino simétrico de orden 6.

4.55. Demuéstrese que un cuadrado latino simétrico cíclico de orden  $p$  es equivalente a la tabla de multiplicación del grupo cíclico del mismo orden.

4.56. Demuéstrese que un cuadrado latino de orden  $p$  es equivalente a la tabla de multiplicación de un casi grupo <sup>1)</sup> del mismo orden.

4.57. Demuéstrese que la tabla de multiplicar de un casi grupo es un cuadrado latino.

4.58. Calcúlense los permanentes de los cuadrados latinos cíclicos de orden 3, 4 y 5, compuestos por los elementos 0, 1, 2; 0, 1, 2, 3 y 0, 1, 2, 3, 4 respectivamente.

4.59. Calcúlense los permanentes de los cuadrados latinos del problema 4.51.

4.60. a) Dispónganse 16 cartas superiores de cuatro palos de un modo tal que ni los nombres de las cartas ni los palos se repitan ni en las filas, ni en las columnas, ni en las diagonales principales.

b) ¿Se podrá hacer de tal manera que en este caso los colores de los palos se dispongan escaqueados?

c) ¿Se podrá hallar, sin tener en cuenta la disposición de las cartas en las diagonales principales, una solución, en la cual los colores se alternen en forma escaqueada?

4.61. Tomemos un grupo abeliano de orden 9 que es un producto directo de dos grupos cíclicos de orden 3. A base de la tabla de multiplicación de dicho grupo abeliano construyamos otra tabla de multiplicar, sustituyendo la relación  $a \cdot b = c$  por la  $a \cdot c = b$ . ¿Será la tabla de multiplicar obtenida un cuadrado latino? ¿Será este cuadrado ortogonal al de partida?

4.62. Constrúyase un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden 3.

4.63. El problema 4.62 para cuadrados latinos de orden 5.

4.64. Hállese un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden 4.

4.65. Hállense 6 cuadrados latinos cíclicos, ortogonales de dos en dos, de orden 9.

4.66. Constrúyanse dos cuadrados latinos no cíclicos de orden 6, haciendo uso de los cuadrados latinos de orden 2 y 3. ¿Serán ortogonales los cuadrados obtenidos?

<sup>1)</sup> Un conjunto  $M$  con una operación binaria  $(\circ)$  se llama casi grupo, si las ecuaciones  $a \circ x = b$  e  $y \circ a = b$  tienen soluciones únicas para cualesquiera  $a, b$ .

4.67. Muéstrase que  $p - 1$  cuadrados latinos, que representan el conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden  $p$  ( $p$  es un número impar), son isomorfos entre sí.

4.68. Demuéstrase que si  $p$  es un número primo impar, las matrices de orden  $p$ :

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}),$$

$$i, j = 0, 1, \dots, p - 1; \quad k = 1, 2, \dots, p - 1,$$

donde  $a_{ij}^{(k)} = ik + j$  (mód  $p$ ), forman un sistema completo de cuadrados latinos ortogonales.

4.69. Sea  $G$  un grupo abeliano de orden 8 que representa un producto directo de tres grupos cíclicos de orden 2. Sea  $H$  un grupo de automorfismos del grupo  $G$  tales que dejan inmóvil sólo la unidad del grupo  $G$  (por supuesto, a excepción del automorfismo idéntico). Empleando el grupo  $H$ , constrúyase una familia de siete cuadrados latinos ortogonales de orden 8 que difieren uno de otro solamente en el orden de las filas.

4.70. Sea  $G$  un grupo abeliano de orden  $p^\alpha$  que representa un producto directo de  $\alpha$  grupos cíclicos de orden  $p$ , donde  $p$  es un número primo. Demuéstrase que existe un conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de orden  $p^\alpha$  que difieren uno del otro sólo en el orden de las filas (columnas).

4.71. Sea  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ . Demuéstrase que existe una familia de  $\min \{(p_i^{\alpha_i} - 1) \mid i = 1, \dots, m\}$  de cuadrados latinos de orden  $n$  ortogonales dos a dos.

El esquema se llama *resoluble* si los bloques pueden ser divididos en  $r$  conjuntos de tal manera, que en los bloques de cada uno de estos conjuntos cada elemento se encontrará exactamente una vez. Sea  $A$  una matriz de incidencia del bloque-esquema  $D$ . Entonces el bloque-esquema con la matriz de incidencia  $A^T$  se llamará dual al bloque-esquema  $D$ .

4.72. Constrúyase una familia de cuadrados latinos ortogonales de orden 9, empleando el campo de Galois.

### § 3. Sistemas de ternas de Steiner y juegos semejantes

Se denomina *sistema de ternas de Steiner* de  $n$  elementos tal juego de subconjuntos de dichos  $n$  elementos que

- cada subconjunto consta de tres elementos distintos;
- cualquier par de elementos se contiene en un y sólo en un subconjunto.

Las ternas de Steiner existen cuando, y sólo cuando,  $n = 6t + 1 \geq 7$ , o bien  $n = 6t + 3 \geq 3$ .



Dos sistemas de ternas de Steiner se denominan *isomorfos*, si uno de ellos puede obtenerse del otro mediante una nueva designación de los elementos y una permutación de las ternas y de los elementos en las últimas.

Se llama *automorfismo* de cierto sistema tal transformación que transfiere el sistema en sí mismo. Un conjunto de automorfismos de un sistema dado forma un grupo.

Se denomina *sistema de ternas de Kirkman* a un sistema de ternas de Steiner partido en tales grupos de ternas que cada uno de  $n$  elementos figura en una y sólo una terna de cada grupo.

Describamos el método de distinguir los sistemas de ternas de Steiner no isomorfos. Sea  $\Delta_n$  un sistema de ternas de Steiner construido en un conjunto  $E$ , y supongamos que  $x, y \in E, x \neq y$ . Introduzcamos la designación

$$\Pi_{xy}^x = \{(\alpha, \beta) : (x, \alpha, \beta) \in \Delta_n, \alpha \neq y, \beta \neq y\}.$$

Un grafo  $\Gamma_{xy}$ , cuyo conjunto de vértices está representado por el conjunto  $E$  y el conjunto de aristas, por el conjunto  $\Pi_{xy}^x \cup \Pi_{xy}^y$ , lleva el nombre de *grafo de entrelazamiento* de los elementos  $x$  e  $y$  en  $\Delta_n$ . Este grafo representa un juego de ciclos disjuntos de longitud par. A él se le puede poner en correspondencia la especificación  $\pi_{xy} = (s_1^{r_1}, \dots, s_m^{r_m})$ , donde  $r_i$  es el número de ciclos de longitud  $2s_i$  en el grafo  $\Gamma_{xy}$ . La especificación  $\pi_{xy}$  se denomina *tipo de entrelazamiento* de  $x$  e  $y$  en el sistema  $\Delta_n$ . Es obvio que los tipos de entrelazamiento son especificaciones de las particiones del número  $(n-3)/2$  en partes, cada una de las cuales no es inferior a dos. Denotemos con  $q = q(n)$  el número de tales particiones.

Cuando  $n = 13$ , hay dos tipos posibles de entrelazamiento:  $T_1 = (2, 3), T_2 = (5)$ . Cuando  $n = 15$ , hay cuatro tipos:  $T_1 = (2^3), T_2 = (2, 4), T_3 = (3^2), T_4 = (6)$ . Convengamos en numerar los tipos de entrelazamiento en el orden lexicográfico.

Se denomina *vector índice* del elemento  $x$  en el sistema  $\Delta_n$  a un vector  $q$ -dimensional  $(t_1, t_2, \dots, t_q)$ , donde  $t_j$  significa el número de elementos en  $E$  que tienen el tipo de entrelazamiento  $T_j$  con el elemento  $x$ .

Al sistema  $\Delta_n$  se le puede poner en correspondencia la tabla

$$T(\Delta_n) = \left[ \begin{array}{ccc|c} t_1^{(1)} & t_2^{(1)} & \dots & t_q^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{(k)} & t_2^{(k)} & \dots & t_q^{(k)} \end{array} \right] \begin{array}{c} l_1 \\ \dots \\ l_h \end{array},$$

donde  $l_n$  denota el número de elementos en  $E$  que tienen en  $\Delta_n$  el vector índice  $(t_1^{(k)}, \dots, t_q^{(k)})$ . Los vectores índice en  $T(\Delta_n)$  se disponen en el orden lexicográfico. La tabla  $T(\Delta_n)$  se llama *T-tabla*.

Dos sistemas de ternas de Steiner a los cuales corresponden las *T-tablas* diferentes no son isomorfos.

Se llama *sistema de grupos de pares*  $\Pi_{2\mu}$  de orden  $2\mu$  tal partición del conjunto  $P(F)$  de pares no ordenados de elementos del conjun-

to  $F$ ,  $|F| = 2\mu$ , en grupos de pares que cada elemento de  $F$  interviene exactamente en un par de cada grupo.

Dos sistemas de grupos de pares  $\Pi_{2\mu}$  y  $\Pi'_{2\mu}$  de orden  $2\mu$ , basados en los conjuntos  $F$  y  $F'$ , se llamarán isomorfos, siempre que exista una correspondencia biunívoca  $\varphi: F \leftrightarrow F'$ , en la cual a todo grupo de pares de  $\Pi_{2\mu}$  le corresponde un grupo de pares de  $\Pi'_{2\mu}$ .

Sea  $\Pi_{2\mu}$  un sistema de grupos de pares  $\tau_1, \dots, \tau_{2\mu-1}$  de orden  $2\mu$ . El grafo  $G_{ij}$ , de cuyos vértices sirven los elementos del conjunto  $F$  y de aristas, los elementos del conjunto  $\tau_i \cup \tau_j$  ( $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq 2\mu - 1$ ), representa, evidentemente, un modelo de ciclos disjuntos de longitud par. El símbolo  $(s_1^{r_1}, \dots, s_m^{r_m})$ , donde  $0 < s_1 < \dots < s_m$ ,  $r_i \geq 0$  para cualquier  $i = 1, \dots, m$ , recibe el nombre de *tipo de entrelazamiento de los grupos de pares*  $\tau_i$  y  $\tau_j$ , si en el grafo

$G_{ij}$  están contenidos exactamente  $r_h$  ciclos de longitud  $2s_h$  y  $\sum_{h=1}^m r_h s_h = \mu$ . Los tipos posibles de entrelazamiento son, por consiguiente, especificaciones de las particiones del número  $\mu$  en partes, cada una de las cuales no es inferior al número 2.

Llamemos *vector índice de un grupo de pares*  $\Sigma$  en el sistema de  $h$  grupos de pares  $\Pi_{2\mu}$  un vector  $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ , en el cual  $x_j$  denota el número de grupos de pares de este sistema que tienen el tipo de entrelazamiento  $T_j$  con el grupo  $\Sigma$ .

La especificación de los grupos de pares del sistema de  $h$  grupos de pares  $\Pi_{2\mu}$  según sus vectores índices en este sistema la escribiremos en forma de la siguiente tabla

$$T(\Pi_{2\mu}) = \begin{array}{|ccc|c} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_q^{(1)} & \omega_1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_q^{(2)} & \omega_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(l)} & x_2^{(l)} & \dots & x_q^{(l)} & \omega_l \end{array}$$

donde  $\omega_j > 0$  es el número de grupos de pares en  $\Pi_{2\mu}$  que tiene el vector índice  $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_q^{(j)})$ , mientras que los propios vectores mencionados están dispuestos en el orden de su crecimiento lexicográfico.

La tabla  $T(\Pi_{2\mu})$  se denominará  $T$ -tabla del sistema  $\Pi_{2\mu}$ .

Dos sistemas de grupos de pares, a los que corresponden diferentes  $T$ -tablas, no son isomorfos. Lo recíproco no es siempre cierto.

4.73. Está dado un conjunto  $E$  de  $n$  elementos  $1, 2, \dots, n$ . Fórmense las ternas de tal modo:

- que cada par de  $E$  se contenga a lo sumo en una terna y que el número de ternas sea lo más grande posible,  $n = 5$ ;
- que cada par de  $E$  se contenga por lo menos en una terna y que el número de ternas sea lo más mínimo posible,  $n = 5$ ;
- que cada par de  $E$  se contenga exactamente en una sola terna;  $n = 7$ .

4.74. ¿Existirá al menos un sistema de ternas de Steiner con  $n$  elementos, si a)  $n = 95$ ; b)  $n = 100$ ; c)  $n = 105$ ?

4.75. Demuéstrese que el número de ternas en un sistema de ternas de Steiner de  $n$  elementos es igual a  $n(n-1)/6$ .

4.76. Demuéstrese que no existen sistemas de ternas de Steiner de  $n = 6k + 2$  elementos.

4.77. Compruébese si son sistemas de ternas de Steiner los siguientes juegos de ternas:

- A) 0 1 2 1 3 7 2 3 8 3 4 5 4 8 9 5 7  $b$  6 7 9  
 0 3  $b$  1 4  $c$  2 4 6 3 6  $c$  4  $a$   $b$  5  $a$   $c$  6 8  $b$   
 0 4 7 1 5 6 2 5 9 3 9  $c$  7 8  $c$   
 0 5 8 1 8  $a$  2 7  $a$   
 0 6  $c$  1 9  $b$  2  $b$   $c$   
 0 9  $a$
- B) 0 1  $a$  1 2  $b$  2 3  $c$  3 5  $a$  4 6  $b$  5 7  $c$  6 9  $a$   
 0 2 7 1 3 8 2 4 9 3 6 7 4 7 8 5 8 9 7  $a$   $b$   
 0 3 4 1 4 5 2 5 6 3 9  $b$  4  $a$   $c$  8  $b$   $c$   
 0 5  $b$  1 6  $c$  2 8  $a$   
 0 6 8 1 7 9  
 0 9  $c$
- C) 0 1 4 1 2 9 2 3 8 3 4 6 4 5  $a$  5 7 8 6 7  $a$   
 0 2 5 1 3  $a$  2 4 7 3 5  $b$  4 9  $b$  5 9  $a$  6 8  $b$   
 0 3  $c$  1 4 8 2 5 6 3 7 9 4 6  $c$   
 0 6 9 1 6  $b$  2 8  $b$   
 0 7  $b$  1 7  $c$  2  $a$   $c$   
 0 8  $a$

4.78. ¿Qué ternas de las citadas en los pp. a) — d) deben agregarse al sistema de ternas 1 2 3, 1 4 5, 1 6 7, 2 5 6, 2 4 7 para obtener un sistema de ternas de Steiner:

- a) 2 3 4, 5 6 7; b) 3 4 6, 3 5 7;  
 c) 3 4 5, 3 6 7; d) 4 5 6, 1 2 3?

4.79. Demuéstrese que para cada elemento de un conjunto inicial el número de ternas de Steiner, en las cuales él está presente, no depende de este elemento. Indíquese este número.

4.80. Sea  $\Delta_n$  un sistema de ternas de Steiner y  $\Delta_\alpha$ , su subsistema de Steiner. Demuéstrese que  $\alpha \leq (n-1)/2$ .

4.81. Demuéstrese que dos subsistemas de Steiner de un sistema de ternas de Steiner o bien no se intersecan, o bien su intersección es también un subsistema de Steiner.

4.82. Constrúyase un sistema de ternas de Steiner para  $n = 7$ .

4.83. Dibújese un grafo de entrelazamiento de los elementos 3 y 9 en el sistema A) del problema 4.77. Indíquese el tipo de entrelazamiento de estos elementos.

4.84. Calcúlese el vector índice del elemento 3 en el sistema A) del problema 4.77.

4.85. Escríbase toda clase de tipos de entrelazamiento de los elementos del sistema  $\Delta_n$  en el caso de  $n = 19$ .

4.86. Muéstrase que los siguientes sistemas de ternas de Steiner son isomorfos:

a) 123

145 248 347  
167 256 359 469  
189 279 368 578

b) 123

145 247 348  
168 256 359 469  
179 289 367 578

4.87. Establézcase que los sistemas A) y B) del problema 4.77 no son isomorfos.

4.88. Establézcase si la permutación  $\alpha = (0123456789abc)$  es o no es un automorfismo del sistema B) del problema 4.77.

4.89. Constrúyase un sistema de ternas de Steiner para  $n = 9$  elementos con grupo cíclico de automorfismos.

4.90. Constrúyase un sistema de ternas de Kirkman a base de nueve elementos.

4.91. ¿Cuántos grupos de ternas están contenidos en un sistema de ternas de Kirkman de  $n = 6k + 3$  elementos?

4.92. ¿Se podrá completar un juego de grupos de ternas:

1	2	3	1	4	7	1	5	15	1	9	13	1	6	10
4	5	6	2	5	8	2	9	10	2	4	12	2	11	15
7	8	9	3	10	13	3	4	14	3	5	11	3	7	12
10	11	12	6	11	14	6	8	12	6	7	15	4	8	13
13	14	15	9	12	14	7	11	13	8	10	14	5	9	14

hasta que se obtenga un sistema de ternas de Kirkman de orden 15? Indíquense los grupos que faltan.

4.93. ¿Será un sistema de ternas de Kirkman el siguiente juego de grupos de ternas de los elementos:

1	2	3	1	4	7	1	5	13	1	6	8
4	5	6	2	5	10	2	4	12	2	11	13
10	11	12	6	11	14	6	7	15	4	10	15
13	14	15	9	12	15	8	10	14	5	9	14
7	8	9	3	8	13	3	9	11	3	7	12
1	9	10	1	11	15	1	12	14			
2	7	14	2	6	9	2	8	15			
3	5	15	3	4	14	3	6	10			
4	8	11	5	8	12	4	9	13			
6	12	13	7	10	13	5	7	11?			

4.94. Demuéstrese que no existe un sistema de ternas de Kirkman de  $n = 6k + 1$  elementos.

4.95. Nueve inspectores deben revisar durante cuatro días 12 organizaciones. Cada organización se controla por una comisión de tres inspectores en el transcurso de un día. ¿Cómo realizar el control de las organizaciones de un modo tal que todas ellas sean controladas por las comisiones, pero que en éstas no se repitan ni los pares ni las ternas de inspectores?

4.96. Compruébese si son automorfismos del sistema del problema 4.93 las siguientes permutaciones:

$$\alpha = (1, 12) (2, 7) (5, 15) (8, 11) (6, 10) (9, 13)$$

$$\beta = (1, 2, 3) (4, 12, 7) (6, 10, 9) (5, 11, 8).$$

4.97. Demuéstrese que el grupo de automorfismos de un sistema de ternas de Kirkman es un subgrupo del grupo de automorfismos del correspondiente sistema de ternas de Steiner.

4.98. A partir de los elementos 0, 1, 2, 3, 4, 5 fórmense 5 juegos de a 3 pares en cada uno, de un modo tal que en cada juego sean distintos todos los elementos y en los diferentes juegos los pares no se repitan.

4.99. Se requiere distribuir 8 examinadores entre 4 comisiones, a dos examinadores en cada comisión, de un modo tal que cada día consecutivo en el transcurso de una semana (7 días) las composiciones de las comisiones no se repitan.

4.100. Sean los elementos 1, 2, ...,  $2\mu$  los números de los jugadores. Los pares de jugadores que integran el primer grupo juegan en la primera jornada; los pares que integran el segundo grupo juegan en la segunda, etc. Se necesita hacer el horario de los juegos para 11 días por jornadas para  $2\mu = 12$ . Escribese el sistema de grupos de pares de 12 elementos para obtener la tabla ajedrecística.

4.101. Sea dado un grupo de pares de elementos, por ejemplo,

$$\begin{array}{l} 0 \ 1 \\ 2 \ 2\mu - 1 \\ 3 \ 2\mu - 2 \\ \dots \dots \dots \\ k2\mu - k + 1 \\ \dots \dots \dots \\ \mu\mu + 1 \end{array}$$

¿Cuál de las permutaciones de  $2\mu$  elementos  $(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 2\mu - 1)$  y  $(0) (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 2\mu - 1)$  dará un sistema de grupos de pares de tipo cíclico <sup>1)</sup>?

<sup>1)</sup> Un sistema de grupos de pares, en el que cada grupo de pares se obtiene a partir del grupo anterior de pares con ayuda de una misma permutación de elementos 0, 1, ...,  $2\mu - 1$ , lleva el nombre de sistema de grupos de pares del tipo cíclico.

4.102. Determínese, calculando las  $T$ -tablas, si se tienen sistemas isomorfos de grupos de pares de orden 8 entre los que siguen abajo

1)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 5	1 4	1 7	1 3	1 2	1 6
	4 7	3 4	2 6	2 5	2 7	3 7	2 4
	5 6	6 7	5 7	3 6	4 6	4 5	3 5
2)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 7	1 3	1 5	1 7	1 2	1 4	1 6
	3 6	4 7	2 4	2 6	3 7	2 3	2 5
	4 5	5 6	6 7	3 5	4 6	5 7	3 4
3)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 3	1 2	1 6	1 4	1 7	1 5
	4 5	4 6	5 6	2 7	2 6	2 5	2 4
	6 7	5 7	4 7	3 5	3 7	3 4	3 6
4)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 3	1 2	1 5	1 4	1 7	1 6
	4 5	4 7	4 6	2 6	2 7	2 4	2 5
	6 7	5 6	5 7	3 7	3 6	3 5	3 4
5)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 6	1 5	1 7	1 3	1 2	1 4
	4 7	3 7	2 7	2 6	2 4	3 4	2 5
	5 6	4 5	4 6	3 5	6 7	5 7	3 6
6)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
	2 3	1 3	1 2	1 5	1 4	1 7	1 6
	4 5	4 7	4 6	2 7	2 6	2 5	2 4
	6 7	5 6	5 7	3 6	3 7	3 4	3 5

4.103. Hállese una permutación que convierta el primero de los sistemas de grupos de pares escritos más abajo en el segundo:

a)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
	2 3	1 3	1 4	1 7	1 8	1 9	1 6	1 5	1 2
	4 5	4 6	2 5	2 9	2 6	2 4	2 8	2 7	3 7
	6 7	5 8	6 9	3 5	3 9	3 8	3 4	3 6	4 8
	8 9	7 9	7 8	6 8	4 7	5 7	5 9	4 9	5 6
b)	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9
	2 3	1 3	1 4	1 9	1 6	1 5	1 2	1 7	1 8
	4 5	4 6	2 5	2 7	2 8	2 9	3 6	2 4	2 6
	6 7	5 8	5 9	3 5	3 7	3 8	4 8	3 9	3 4
	8 9	7 9	7 8	6 8	4 9	4 7	5 9	5 6	5 7

4.104. Pártanse los cuatro elementos 0, 1, 2, 3 en pares, sirviéndose para la división de tres modos. Determinése el grupo de automorfismos del sistema obtenido.

4.105. Determinése el orden del grupo de automorfismos del sistema obtenido en el problema 4.98.

4.106. Muéstrese que un grupo de automorfismos de los sistemas de grupos de pares de tipo cíclico contiene un subgrupo cíclico de orden  $2\mu - 1$  con el elemento generatriz  $T$ , donde  $T$  es cierta permutación del problema 4.101.

4.107. Se tiene un sistema de grupos de pares de 4° orden de los elementos 4, 5, 6, 7:

7	6	7	5	7	4
5	4	6	4	6	5

Continúese su construcción hasta que se obtenga un sistema de ternas de Steiner para siete elementos.

4.108. Constrúyase un sistema de grupos de pares, partiendo del siguiente cuadrado latino simétrico

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	7	2	3	9	8	4	6	5
2	7	0	1	8	3	9	6	5	4
3	2	1	0	6	4	5	9	7	8
4	3	8	6	0	1	2	5	9	7
5	9	3	4	1	0	7	8	2	6
6	8	9	5	2	7	0	1	4	3
7	4	6	9	5	8	1	0	3	2
8	6	5	7	9	2	4	3	0	1
9	5	4	8	7	6	3	2	1	0

#### § 4. Bloque-esquemas

El *bloque-esquema* (esquema en bloque) es un sistema de subconjuntos de un conjunto finito que satisface ciertas condiciones ligadas con la frecuencia de aparición de los pares de elementos del conjunto en los subconjuntos del sistema. El bloque-esquema se define por un par de conjuntos  $(V, B)$ , donde

$$V = \{a_1, a_2, \dots, a_v\}, \quad B = \{B_1, B_2, \dots, B_b\},$$

$$B_i \subseteq V, \quad i = 1, 2, \dots, b.$$

Los elementos del conjunto  $V$  se llaman *elementos* del bloque-esquema, y los elementos del conjunto  $B$  reciben el nombre de *bloques* del bloque-esquema. El elemento  $a_i$  y el bloque  $B_j$  son *incidentes*, si  $a_i \in B_j$ . El número  $|B_j|$  de elementos, incidentes con relación al bloque  $B_j$ , se denota por  $k_j$ , y el número de bloques incidentes con

relación al elemento  $a_i$ , por  $r_i$ . Mediante  $\lambda_{il}$  se designa el número  $|\{B_j: a_i \in B_j, a_l \in B_j\}|$ .

Los números  $v, b, r_i, k_j, \lambda_{il}$  ( $i, l = 1, \dots, v; j = 1, \dots, b$ ) se llaman *parámetros* del bloque-esquema. Si  $r_i = r$  para cualquier  $i = 1, \dots, v$ , y si  $k_j = k$  para todos los  $j = 1, \dots, b$ , y  $\lambda_{il} = \lambda$ , entonces  $(V, B)$  es un bloque-esquema *incompleto equilibrado*, o bien BIB-esquema.

Supongamos que entre los números  $\lambda_{il}$  ( $i, l = 1, \dots, v$ ) se encuentran exactamente  $m$  diferentes:  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , y que en los elementos del conjunto  $V$  están introducidas  $m$  relaciones simétricas de conexión de un modo tal que se cumplen las siguientes condiciones:

a) el conjunto  $V^2$  de todos los pares de elementos del conjunto  $V$  se parte en  $m$  subconjuntos disjuntos  $V_1^2, V_2^2, \dots, V_m^2$ , con la particularidad de que si  $(a, a') \in V_j^2$ , suele decirse que los elementos  $a$  y  $a'$  son  $j$ -conexos;

$$b) |\{B_j: a \in B_j, a' \in B_j, (a, a') \in V_j^2\}| = \lambda_j;$$

$$c) |\{a: \exists a' (a, a') \in V_i^2\}| = n_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$d) |\{a'': (a'', a) \in V_j^2, (a'', a') \in V_k^2, (a, a') \in V_i^2\}| = p_{jh}^i,$$

con la particularidad de que, en virtud de la simetría,  $p_{jh}^i = p_{jh}^i$  ( $i, j, k = 1, \dots, m$ ).

El bloque-esquema con las propiedades a) . . . d) se llama *bloque-esquema parcialmente equilibrado con  $m$  tipos de conexiones* o, simplemente, PBIB( $m$ )-esquema. Los parámetros del bloque-esquema están ligados mediante relaciones determinadas. Para los BIB-esquemas son válidas las igualdades

$$vr = kb, \quad \lambda(v-1) = r(k-1). \quad (4.1)$$

Para los parámetros de los PBIB( $m$ )-esquemas son válidas las igualdades (4.1) y las siguientes relaciones:

$$\sum_{i=1}^m n_i = v-1, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i n_i = r(k-1),$$

$$\sum_{h=1}^m p_{jh}^i = \begin{cases} n_j, & i \neq j, \\ n_j - 1, & i = j; \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, m;$$

$$n_i p_{jh}^i = n_j p_{ih}^j = n_h p_{ij}^h, \quad i, j, k = 1, \dots, m.$$

La matriz de incidencia de un BIB-esquema satisface la relación matricial principal

$$AA^T = (r - \lambda)E + \lambda J, \quad (4.2)$$

donde  $E$  es la matriz unidad de orden  $v$ , y  $J$ , la matriz de orden  $v$  formada por unidades. La existencia de la  $(0, 1)$ -matriz que satisface la condición (4.2) es una condición suficiente para la existencia de un BIB-esquema con los parámetros dados. De (4.2) se deduce la desigualdad  $b \geq v$ . Un BIB-esquema, para el cual  $b = v$  (y, por



tanto,  $r = k$ ) se llama *bloque-esquema simétrico*, o bien  $(v, k, \lambda)$ -configuración.

4.109. a) Demuéstrase que si  $B_1, B_2, \dots, B_v$  son bloques de un BIB-esquema simétrico en el conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_v\}$ , entonces para cualquier  $i$  los conjuntos

$B_1 - B_i, B_2 - B_i, \dots, B_{i-1} - B_i, B_{i+1} - B_i, \dots, B_v - B_i$  forman en el conjunto  $X - B_i$  un BIB-esquema. Hállense los parámetros de este esquema, si los parámetros del esquema de partida son  $v, k, \lambda$ .

b) El mismo problema, pero en lugar de la diferencia se tomará la intersección.

4.110. Constrúyase un BIB-esquema con los parámetros:

- a)  $v = b = 7, k = r = 3, \lambda = 1$ ;  
 b)  $v = b = 13, k = r = 4, \lambda = 1$ ;  
 c)  $v = 9, b = 12, r = 4, k = 3, \lambda = 1$ .

4.111. ¿Existirán los BIB-esquemas con los parámetros:

- a)  $v = 15, b = 21, r = 7, k = 5, \lambda = 2$ ;  
 b)  $v = b = 22, r = k = 7, \lambda = 2$ ;  
 c)  $v = b = 43, r = k = 7, \lambda = 1$ ;  
 d)  $v = 36, b = 42, r = 7, k = 6, \lambda = 1$ ?

4.112. Hállense la base y el grupo de automorfismos de un BIB-esquema con los parámetros:

- a)  $v = b = 7, r = k = 3, \lambda = 1$ ;  
 b)  $v = 13, b = 26, r = 6, k = 3, \lambda = 1$ ;  
 c)  $v = 25, b = 100, r = 12, k = 3, \lambda = 1$ .

4.113. Compruébese la relación matricial principal para un BIB-esquema, donde  $D$  es: a) el  $(7, 3, 1)$ -esquema del problema 4.110, a); b) el  $(13, 4, 1)$ -esquema del problema 4.110, b). Escríbase para el esquema  $D$  la ecuación de incidencia en la forma cuadrática.

4.114. Constrúyase un bloque-esquema con los parámetros  $v = 6, b = 10, r = 5, k = 3, \lambda = 2$ .

4.115. Constrúyase un BIB-esquema simétrico partiendo de las siguientes igualdades de incidencia:

- a)  $L_1^2 + \dots + L_7^2 = 2(x_1^2 + \dots + x_7^2) + (x_1 + \dots + x_7)^2$ ;  
 b)  $L_1^2 + \dots + L_{11}^2 = 3(x_1^2 + \dots + x_{11}^2) + 2(x_1 + \dots + x_{11})^2$ ,

donde  $L_j = \sum_{i=1}^v n_{ij} x_i, j = 1, 2, \dots, v$  y  $n_{ij}$  son los coeficientes de la matriz de incidencia del BIB-esquema.

4.116. Establézcase el cumplimiento de la condición necesaria de existencia de los  $(v, k, \lambda)$  BIB-esquemas simétricos:

a) 21, 5, 1; b) 15, 7, 3; c) 19, 9, 4; d) 29, 8, 2.

4.117. ¿Cuáles de los cinco poliedros regulares (tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro) son BIB-esquemas? Hállense los parámetros de estos bloque-esquemas.

4.118. Muéstrese la dualidad de los siguientes pares de bloque-esquemas: a) octaedro y cubo; b) dodecaedro y icosaedro. Muéstrese que el tetraedro es autodual.

4.119. Constrúyase el bloque-esquema de  $PG(2, 2)$ .

4.120. Constrúyase la matriz de Hadamard partiendo de  $PG(2, 2)$ .

4.121. Determinénse los parámetros de un PBIB-esquema obtenido de un conjunto de diferencias: a) 1, 2, 3 (mod 5); b) 1, 3, 9 (mod 13).

4.122. Hállense las matrices de conexión de un esquema:

$$\begin{array}{cccccc} 3478, & 1234, & 2367, & 5678, & 1256, & 1458, \\ \lambda_0 = 3, & \lambda = 2, & \lambda_2 = 1, & \lambda_3 = 0, & n_1 = n_2 = 3, & n_3 = 1. \end{array}$$

Determinénse  $AA^T$  y todos los  $B_i B_j$ .

4.123. Constrúyase el PBIB-esquema de inversiones de un esquema residual obtenido a partir del siguiente BIB-esquema simétrico:

12345	12678	1379X	148XE
1569E	236XE	2479E	2589X
34689	3578E	4567X	

con los parámetros  $v = b = 11$ ,  $r = k = 5$ ,  $\lambda = 2$ . Hállense los parámetros del PBIB-esquema construido.

4.124. Constrúyase el  $(19, 9, 4)$ -esquema cíclico.

4.125. Constrúyase un BIB-esquema resoluble con  $v = 9$ ,  $b = 12$ ,  $r = 4$ ,  $k = 3$  partiendo de  $EG(2, 3)$ . ¿Cuál será el bloque-esquema dual?

4.126. Constrúyanse el plano parcial  $(r, k, t)$  y el PBIB(2)-esquema que le corresponde; hállense los parámetros de dicho bloque-esquema y señálese si éste posee la propiedad de resolubilidad:

a)  $r = 3$ ,  $k = 4$ ,  $t = 2$ ; b)  $r = 4$ ,  $k = 5$ ,  $t = 3$ ;

4.127. ¿Cuáles de los siguientes BIB-esquemas con los parámetros  $v, b, r, k, \lambda$  son resolubles:

a) 9, 12, 4, 3, 1; b) 6, 10, 5, 3, 2; c) 13, 26, 6, 3, 1; d) 10, 30, 9, 3, 2?

4.128. Constrúyase un BIB-esquema  $D$  2-resoluble, si están dados un BIB-esquema  $D_1$  con los parámetros  $v_1 = b_1 = 3$ ,  $r_1 = k_1 = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$  y un BIB-esquema resoluble  $D_2$  con los parámetros  $v_2 = 9$ ,  $b_2 = 12$ ,  $k_2 = 3$ ,  $r_2 = 4$  y  $\lambda_2 = 1$ . Hállense los parámetros del esquema. Muéstrese que  $D$  es 2-resoluble.

4.129. Constrúyase un PBIB-esquema  $D$  3-resoluble, si están dados un BIB-esquema  $D_1$  con los parámetros  $v_1 = b_1 = 4$ ,  $r_1 = k_1 = 3$ ,  $\lambda_1 = 2$  y un PBIB(2)-esquema resoluble con el esquema de conexión en forma del plano parcial (3, 4, 2) y con los parámetros  $v_2 = 16$ ,  $b_2 = 12$ ,  $r_2 = 3$ ,  $k_2 = 4$ ,  $\lambda_{2,1} = 1$ ,  $\lambda_{2,2} = 0$ . Determinéense los parámetros del esquema construido. Muéstrese que  $D$  es 3-resoluble.

4.130. Se tienen tres circunferencias concéntricas dentro de las cuales están trazados tres diámetros. Muéstrese que si los puntos de intersección de los diámetros con las circunferencias se toman por elementos del bloque-esquema  $D$  y los propios diámetros y circunferencias, por los bloques del mismo, entonces  $D$  es un PBIB(3)-esquema. Hállense los parámetros de  $D$ . ¿Será resoluble este esquema?

4.131. Resuélvase el problema 4.130 para el caso de cuatro circunferencias y cuatro diámetros.

4.132. Constrúyase y defínase el esquema de conexión y hállense los parámetros de un PBIB(4)-esquema cuyos elementos son todos los pares ordenados  $(x, y)$ ,  $x \neq y$ ,  $x, y = 1, \dots, n$ , y los bloques, nada más que los conjuntos  $\{(x, 1)\}, \dots, \{(x, n)\}, \{(1, y)\}, \dots, \{(n, y)\}$ , donde  $x, y = 1, \dots, n$ ; a)  $n = 3$ ; b)  $n = 4$ .

4.133. ¿Cuántos son los tipos de conexión y cómo pueden establecerse en un PBIB-esquema cuyos elementos son ternas ordenadas

$$(x, y, z), \quad x \neq y \neq z, \quad x, y, z = 1, \dots, n,$$

y los bloques son nada más que los conjuntos  $\{(x, y, 1)\}, \dots, \{(x, y, n)\}, \{(x, 1, z)\}, \dots, \{(x, n, z)\}, \{(1, y, z)\}, \dots, \{(n, y, z)\}$ ?

Hállense  $v, b, r, k, n_i, \lambda_i$  para  $n = 4$ .

## § 5. Problema de Van der Waerden

Se denomina *cápsula convexa* de los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  el conjunto de puntos  $M \in \mathbb{R}^n$  que pueden ser representados en la forma

$$M = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \quad \text{donde} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, k.$$

Los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  se llaman *independientes*, si los vectores  $(P_i - P_0)$  son linealmente independientes ( $i = 1, \dots, k$ ). La independencia de los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  es posible sólo cuando  $k \leq n$ . Los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  son independientes cuando y sólo cuando de la condición  $\sum_{i=0}^k \lambda_i P_i = 0$ ,  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$  se deduce que todos los  $\lambda_i$  son iguales a cero.

Supongamos que  $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$  son independientes. Se llama *símplice* con vértices en los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_k$  a una cápsula

sula convexa de puntos  $P_0, P_1, \dots, P_k$ . Para cualquier punto  $M$  dispuesto en tal s3mplice una representaci3n de la forma  $M = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i$ ,  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$  es un3voca ( $i = 0, 1, \dots, k$ ). Esto permite llamar el juego  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$  coordenadas baric3ntricas del punto  $M$ .

4.134. Supongamos que el punto  $M$  pertenece a una c3psula convexa de puntos  $P_0, \dots, P_k$  de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existen los n3meros enteros no negativos  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_n$  y los n3meros no negativos  $\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$  tales que  $\sum_{j=0}^n \lambda_{i_j} = 1$ ,  $M = \sum_{j=0}^n \lambda_{i_j} P_{i_j}$ .

Una matriz  $A = \|a_{ij}\|_1^n$  se denomina *dos veces estoc3stica*, si para cualesquiera  $i, j$  se cumplen las condiciones  $a_{ij} \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ .

4.135. Demu3strese que el producto de las matrices dos veces estoc3sticas es una matriz dos veces estoc3stica.

4.136. Demu3strese que el permanente de una matriz dos veces estoc3stica no es superior a 1, y es igual a 1 cuando y s3lo cuando la matriz es conmutable.

4.137. Demu3strese que para las matrices cuadradas  $A$  y  $B$  de un mismo orden con elementos no negativos se verifica la desigualdad  $\text{per}(A + B) \geq \text{per} A + \text{per} B$ .

4.138. Demu3strese que el permanente de una matriz dos veces estoc3stica es superior a cero.

4.139. Pru3bese que para cualquier matriz dos veces estoc3stica  $A$  de orden  $n$  se verifica el desarrollo  $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ , donde  $P_i$  son

matrices conmutables,  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  ( $k \leq n^2 - n + 1$ ).

4.140. Mu3strese que sobre un conjunto de matrices cuadradas de orden  $n$ , en las cuales la suma de elementos de cualquier fila o de cualquier columna es igual a 1, se puede introducir la estructura de un espacio lineal de dimensi3n  $(n - 1)^2$ .

4.141. Demu3strese que para cualquier matriz dos veces estoc3stica  $A$  de orden  $n$  es v3lido el desarrollo  $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ , donde  $P_i$  son matrices conmutables,  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  ( $k \leq n^2 - 2n + 2$ ).

4.142. Demu3strese que el permanente de una matriz dos veces estoc3stica de orden  $n$  es superior o igual a  $(n^2 - 2n + 2)^{1-n}$ .

4.143. Sea  $S(x_1, \dots, x_n)$  un polinomio simétrico de las variables  $x_1, \dots, x_n$ , lineal con relación a cada una de sus variables

$$\Omega = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}.$$

Demuéstrase que

$$\min_{\Omega} S(x_1, \dots, x_n) = \min_{1 \leq k \leq n} S(\underbrace{1/k, \dots, 1/k}_k, 0, \dots, 0)$$

4.144. Determinése el valor mínimo de la expresión  $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ , siendo limitados los valores de  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1$ .

4.145. Demuéstrase que el mínimo del permanente de una matriz dos veces estocástica de orden 3 es igual a  $2/9$ .

4.146. ¿Se podrá representar el permanente de una matriz dos veces estocástica de orden  $n \geq 4$  en forma de una función que sea simétrica respecto de los elementos de cada fila?

4.147. Supongamos que una matriz dos veces estocástica  $A$  es tal que su permanente tiene el valor mínimo entre los permanentes de todas las matrices dos veces estocásticas del mismo orden.

a) Demuéstrase que si todos los elementos de la matriz  $A$  son positivos, entonces  $\text{per } A \geq n!/n^n$ , donde  $n$  es el orden de la matriz  $A$ .

b) Muéstrase que la matriz  $A$  no puede ser representada en forma de una recta de otras dos matrices.

4.148. En un caso particular, cuando  $n = 3$ , obténgase la demostración directa (sin emplear la desigualdad de Cauchy—Bunjakovski para el espacio de Minkowski) de la siguiente desigualdad de Alexándrov—Egórychev:

$$\begin{aligned} & \text{per}^2 \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \geq \\ & \geq \text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \leq \\ & \leq \text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-2} & a_{1n} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-2} & a_{nn} & a_{nn} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $a_{in} \geq 0, a_{ij}$  son, para  $1 \leq j \leq n-1$ , números reales arbitrarios.

En la desigualdad se logra el signo de igualdad cuando y sólo cuando para cualesquiera  $i = 1, 2, \dots, n$  se cumple la igualdad  $a_{in-1} = \lambda a_{in}$ .

Empleando esta desigualdad, G. P. Egórychev demostró en 1980 el siguiente teorema (solución positiva del problema de Van der Waerden): el mínimo del permanente de una matriz dos veces estocástica de orden  $n$  es igual a  $n!/n^n$  y se consigue en un punto único, a saber, en una matriz cuyos elementos son todos iguales a  $1/n$ .

Aún antes, en 1979, este hecho (sin unicidad) fue demostrado por D. E. Falikman. La demostración completa de la desigualdad y la solución del problema de Van der Waerden se aducen en [1].

## MÉTODOS GEOMÉTRICOS

§ 1. Interpretaciones  
y problemas referentes a los grafos

En forma general un grafo puede definirse como una totalidad del conjunto  $V$  (de vértices) y la aplicación  $\alpha$  del conjunto  $V \times V$  en cierto conjunto  $M$  (el signo  $\times$  es el indicio de un producto cartesiano).

Los pares  $(a, b) \in V \times V$ , para los cuales  $\alpha(a, b) > 0$ , se denominan *aristas*. Cuando  $\alpha(a, b) > 1$ , la arista  $(a, b)$  se denomina *múltiple* (o *paralela*), y el grafo  $G$ , que contiene aristas múltiples, se llama *multigrafo*; el número  $\alpha(a, b)$  lleva el nombre de *multiplicidad* de la arista. Si  $\forall(a, b): \alpha(a, b) \leq 1$ , se dice que el grafo está privado de aristas múltiples.

Si  $|V| = n$  es un número finito, el grafo se llama *finito*, mientras que  $n$  se denomina *orden* del grafo.

Si  $\forall(a, b) \in V \times V: \alpha(a, b) = \alpha(b, a)$ , el grafo  $G$  es *no orientado*. De lo contrario, se denomina *orientado*. Si  $\forall a \in V: \alpha(a, a) = 0$ , suele decirse que el grafo  $G$  *no tiene bucles*.

Se denomina *subgrafo*  $G(V, \alpha)$  a un grafo  $G_1(V_1, \alpha_1)$  tal que

$$V_1 \subseteq V, \quad \forall(a, b) \in V_1 \times V_1: \alpha_1(a, b) \in [0, \alpha(a, b)].$$

Un grafo finito no orientado sin bucles y aristas múltiples se llama *grafo simple* (o simplemente *grafo*). El grafo se define por el juego de dos conjuntos  $V, X$ , donde  $X \subseteq V \times V$ , con la particularidad de que  $X = \{(a, b) \in V \times V: \alpha(a, b) = 1\}$ ,  $\forall(a, b) \in X: (b, a) \in X$ ,  $\forall a \in V: (a, a) \notin X$  y este grafo es cómodo expresarlo en un plano en forma de cierto conjunto de puntos (vértices), algunos de los cuales están unidos mediante aristas.

Los vértices  $a, b \in V$  del grafo  $G(V, X)$  se denominan *adyacentes*, si  $(a, b) \in X$ . El vértice  $a$  y la arista  $(b, c) \in X$  se llaman *incidentes*, si  $a = b$  ó  $a = c$ . El número  $|X|$  lleva el nombre de *dimensión* del grafo.

Se denomina *matriz de adyacencia*  $A = (a_{ij})$  del grafo  $G(V, \alpha)$  con  $|V| = n$  la  $(n \times n)$ -matriz, en la cual  $a_{ij} = \alpha(a_i, a_j)$ , donde  $a_i, a_j \in V$ .

Sea  $G$  un grafo simple orientado con  $|V| = n$  y  $|X| = m$ . La *matriz de incidencia*  $B = (b_{ij})$  del grafo orientado  $G$  se llama tal

$(n \times m)$ -matriz, cuyas filas corresponden a los vértices y las columnas a los arcos, que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el vértice } a_i \text{ es incidente a la arista} \\ & x_j \in X \text{ y } x_j = (a_i, a_h); \\ -1, & \text{si el vértice } a_i \text{ es incidente a la arista} \\ & x_j \in X \text{ y } x_j = (a_h, a_i); \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(aquí  $a_h$  es cierto vértice del grafo  $G$ ). La matriz de incidencia de un grafo no orientado  $G$  se determina de manera análoga, a excepción de que todos los elementos iguales a  $-1$  se sustituyen por los iguales a  $+1$ .

Una sucesión alternativa de vértices y aristas  $a_0, (a_0, a_1), a_1, \dots, a_{n-1}, (a_{n-1}, a_n), a_n$  del grafo  $G$ , donde  $a_0, a_i \in V, (a_{i-1}, a_i) \in X$  y  $i = 1, 2, \dots, n$ , se llama *cadena* si todas sus aristas son diferentes, y *cadena simple*, si todos sus vértices (y, por consiguiente, también sus aristas) son distintos. La cadena se llama *cerrada* si  $a_0 = a_n$ . Una cadena cerrada simple se llama *ciclo*, y el número de aristas en la cadena, *longitud de la cadena*. Designemos por  $C_n$  el grafo que consta de un ciclo de longitud  $n$ , y por  $P_n$  una cadena simple de longitud  $n - 1$ . Se llama *cadena hamiltoniana* (respectivamente, *ciclo hamiltoniano*) a un ciclo simple (respectivamente, ciclo) que contiene todos los vértices del grafo  $G$ . El ciclo que contiene todos los vértices y todas las aristas del grafo  $G$  se llama *euleriano*. El grafo  $G$  es *hamiltoniano* (respectivamente, *euleriano*) si contiene el ciclo hamiltoniano (respectivamente, euleriano).

El grafo  $G$  se llama *conexo* si cada par de sus vértices está unido por una cadena simple. El subgrafo conexo máximo del grafo  $G$  se denomina *componente de conexión* de éste.

Se llama *grado* del vértice  $a \in V$  un número  $\deg a = |\{b \in V: (a, b) \in X\}|$ . Si  $\forall a \in V: \deg a = d$ , el grafo se llama *homogéneo* (o *regular*) de grado  $d$ .

Si en el grafo  $G$  se tienen  $k_i$  vértices de grado  $i$ , la expresión  $(1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, n^{k_n})$  se denomina *distribución de los vértices del grafo  $G$  en grados*.

El *grafo completo*  $K_n$  se llama grafo simple sobre  $n$  vértices, en el cual cada par de vértices es adyacente. Se denomina *clique de grafo  $G$*  al subgrafo completo máximo de éste. El *grafo bipartido*  $G$  es un grafo, cuyo conjunto de vértices  $V$  puede ser partido en dos subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$  de tal manera, que cada arista del grupo  $G$  une los vértices de los diferentes subconjuntos. Si el grafo  $G$  contiene todas las aristas que unen los subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$ , entonces tal grafo se llama *bipartido completo*. Si en este caso  $|V_1| = n$  y  $|V_2| = m$ , escribiremos  $G = K_{n,m}$ . Sean  $G_1$  y  $G_2$  grafos arbitrarios sobre los conjuntos de los vértices  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente. Se llama *producto cartesiano*  $G_1 \times G_2$  de los grafos  $G_1$  y  $G_2$  a tal grafo sobre el



conjunto de los vértices  $V_1 = V_1 \times V_2$ , que dos de sus vértices  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$  son adyacentes cuando y sólo cuando o bien  $a_1 = b_1$  y el vértice  $a_2$  es adyacente a  $b_2$  en el grafo  $G_2$ , o bien  $a_2 = b_2$  y el vértice  $a_1$  es adyacente a  $b_1$  en el grafo  $G_1$ . Supongamos que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Entonces el grafo sobre el conjunto de vértices  $V_1 \cup V_2$ , cuyos conjuntos de aristas contienen todas las aristas de los grafos  $G_1$  y  $G_2$ , así como también todas las aristas del tipo  $(a, b)$ , donde  $a \in V_1$  y  $b \in V_2$ , se denomina *unión* de los grafos  $G_1$  y  $G_2$  y se designa por  $G_1 + G_2$ . Se llama *subgrafo de esqueleto* el subgrafo del grafo  $G$  que contiene todos sus vértices.

Sea  $G$  un grafo simple arbitrario con la arista  $e = (a, b)$ . La eliminación de la arista  $e$  de  $G$  conduce al grafo de esqueleto que contiene todas las aristas del grafo  $G$ , a excepción de  $e$ , es decir  $G - e$  es el subgrafo máximo del grafo  $G$ , que no contiene  $e$ . Por otra parte, si  $a$  y  $b$  no son vértices adyacentes del grafo  $G$ , la adición de la arista  $e = (a, b)$  conduce al grafo  $H = G + e$  en el mismo conjunto de vértices  $n$ , tal que  $H - e = G$ . Sea  $G$  el grafo con arista  $e = (a, b)$ . Designemos por  $G/e$  el grafo obtenido de  $G$  mediante el estrechamiento de la arista  $e$ , es decir, por identificación de los vértices adyacentes  $a$  y  $b$ , o, lo mismo separando  $a$  y  $b$  con la siguiente adición de un nuevo vértice  $c$ , adyacente a todos los vértices del grafo  $G$ , que han sido adyacentes a  $a$ , o bien a  $b$ .

El *complemento*  $\bar{G}$  del grafo  $G$  es un grafo sobre el mismo conjunto de vértices que el grafo  $G$ , y dos vértices en  $\bar{G}$  son adyacentes cuando y sólo cuando ellos no son adyacentes en  $G$ .

El grafo  $G$  se llama *planario*, si sus vértices y aristas pueden disponerse en un plano de tal modo que las aristas no se intersequen. Un grafo que no contiene ciclos se denomina *bosque*. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos (circuitos). El *árbol radical* tiene un vértice (*raíz*) que se destaca entre los demás. El subgrafo de esqueleto del grafo conexo  $G$ , que es un árbol, se llama *esqueleto*.

El grafo  $G_1(V_1, X_1)$  se denomina *isomorfo* al grafo  $G_2(V_2, X_2)$  (la designación es:  $G_1 \cong G_2$ ), si existe una aplicación biunívoca  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  que  $(a, b) \in X_1$  cuando y sólo cuando  $(\varphi(a), \varphi(b)) \in X_2$  para cualesquiera  $a, b \in V_1$ . En este caso la aplicación  $\varphi$  se llama *isomorfismo* de los grafos  $G_1$  y  $G_2$ .

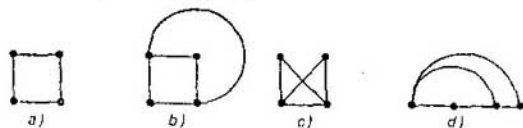


Fig. 5.1.

5.1. ¿Son isomorfos los grafos de las figs. 5.1...5.6?

5.2. Supongamos que  $\varphi$  es un isomorfismo de los grafos  $G_1(V_1, X_1)$  y  $G_2(V_2, X_2)$ , que  $|V_1| = |V_2| = n$ ,  $A_1$  y  $A_2$  son las

matrices de adyacencia de los grafos  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente, y que  $P = (p_{ij})$  es la  $(n \times n)$ -matriz tal que

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi(a_i = b_j), \text{ donde } a_i \in V_1 \text{ y } b_j \in V_2; \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

Convencerse de que  $P$  es la matriz de cierta  $k$ -permutación y  $P^T A_1 P = A_2$ , donde  $P^T$  es una matriz transpuesta a  $P$ .

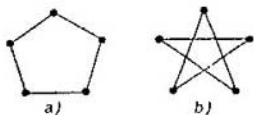


Fig. 5.2.

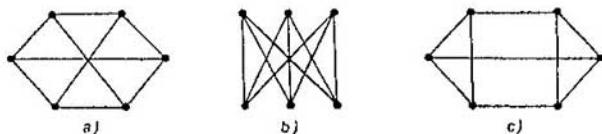


Fig. 5.3.

5.3. Demuéstrese que si los grafos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos, sus matrices de adyacencia tienen valores propios iguales. ¿Es justa la afirmación inversa?

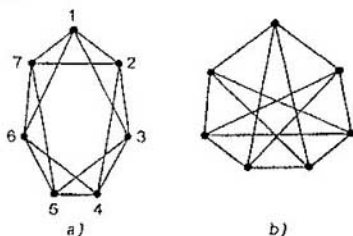


Fig. 5.4.

5.4. Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

- la suma de los grados de los vértices del grafo  $G$  es igual al número duplicado de sus vértices;
- en cualquier grafo el número de vértices con grados impares es par;
- cada grafo cúbico (es decir regular de grado 3) tiene un número par de vértices.

5.5. Sea  $B$  una matriz de incidencia de un grafo simple no orientado. Demuéstrase que su matriz de adyacencia  $A$  se obtiene de  $BB^T$  por sustitución de todos los elementos en la diagonal por ceros. Hálese el rango de la matriz  $B$ .

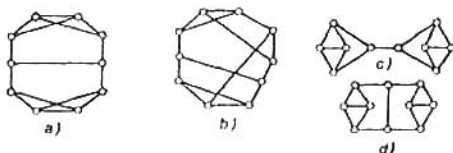


Fig. 5.5.

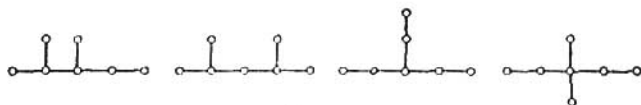


Fig. 5.6.

5.6. Demuéstrase que cada menor de la matriz de incidencia del grafo orientado  $G$  sobre  $n$  vértices es igual a 1,  $-1$  ó 0. Es cierto que su menor de orden  $(n - 1)$  se diferencia de 0 cuando y sólo cuando las columnas de este menor corresponden a las aristas del esqueleto del grafo  $G$ .

5.7. Demuéstrase que el grafo es bipartido cuando y sólo cuando se cumple una de las siguientes condiciones:

- todos sus ciclos son de longitud par;
- para cualquier número impar  $n$  todos los elementos diagonales de la matriz  $A^n$  son iguales a cero.

5.8. Demuéstrase que un grafo simple finito es euleriano cuando y sólo cuando es conexo y todos sus vértices tienen un grado par. Constrúyanse 4 grafos eulerianos no isomorfos de orden 5.

5.9. Demuéstrase la siguiente afirmación:

a) si  $p \geq 3$  y  $\deg a + \deg b \geq p$  para cualquier par  $a$  y  $b$  de vértices no adyacentes del grafo  $G$ , entonces  $G$  es un grafo hamiltoniano;

b) si  $p > 3$  y  $\deg a \geq \frac{p}{2}$  para cualquier vértice  $a$  del grafo  $G$ , entonces  $G$  es un grafo hamiltoniano;

c) en cada grafo hamiltoniano cúbico existe por lo menos tres ciclos hamiltonianos diferentes.

5.10. ¿Cuántos ciclos hamiltonianos distintos hay en los grafos bipartidos completos  $K_{3,3}$  y  $K_{3,4}$ ?

5.11. Dese un ejemplo de un grafo que sea: euleriano y hamiltoniano; b) euleriano, pero no hamiltoniano; c) hamiltoniano, pero no euleriano; d) no euleriano y no hamiltoniano.

5.12. Muéstrase que un grafo con  $n$  vértices, cuyo número de aristas es superior a  $(n-1)(n-2)/2$ , es conexo.

5.13. Muéstrase que para todo  $t$  natural existe un grafo cúbico con  $n = 6t$  vértices, y cada vértice pertenece a un y sólo un triángulo.

5.14. Muéstrase que para todo  $n = 6t + 4$  ( $t > 1$ ) existe un grafo cúbico de  $n$  vértices y cada vértice del grafo, a excepción de uno, pertenece a un y sólo un triángulo.

5.15. ¿Existe un grafo simple finito en el cual no haya dos vértices con grados iguales?

5.16. ¿Existe un grafo con la siguiente distribución de vértices en grados? a)  $(2^3 3^4 15^3 7^2)$ ; b)  $(2^3 3^4 15^3 7^3)$ ?

5.17. Supongamos que un grafo simple  $G$  tiene la distribución de los vértices en grados  $(1^2 3^1 4^2)$ . Hállese la distribución del grafo  $\bar{G}$ .

5.18. Sean  $G_1$  y  $G_2$  unos grafos regulares de grado  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente. ¿Es cierto que los grafos  $G_1 \times G_2$  y  $G_1 + G_2$  son también regulares?

5.19. Demuéstrase la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a)  $G$  es un árbol;

b) cualesquiera dos vértices en  $G$  están unidos por una sola cadena;

c) el grafo  $G$  es conexo, pero la separación de cualquiera de sus aristas lo hace no conexo;

d) la adición de cualquier arista nueva al grafo  $G$  conduce a la aparición exactamente de un ciclo.

5.20. Indíquese el número de componentes conexos de un bosque que tiene 76 vértices y 53 aristas.

5.21. Demuéstrase las siguientes afirmaciones:

a)  $G_1 \times G_2 = G_2 \times G_1$ ;

b) el grafo  $G_1 \times G_2$  es conexo cuando y sólo cuando es conexo por lo menos uno de los grafos  $G_1$  y  $G_2$ ;

c) el grafo  $G_1 \times G_2$  contiene subgrafos isomorfos a  $G_1$  y  $G_2$ .

5.22. Hállese la distribución de los vértices en grados en el grafo  $G_3 \times P_3$ . Representétese gráficamente este grafo.

5.23. ¿Es cierto que: a)  $\overline{G_1 + G_2} = \bar{G}_1 + \bar{G}_2$ ; b)  $\overline{G_1 \times G_2} = \bar{G}_1 \times \bar{G}_2$ ?

5.24. El grafo autocomplementario es un grafo isomorfo a su complemento. Dense ejemplos de grafos autocomplementarios para 4, 5 y 8 vértices. Demuéstrase que cada grafo autocomplementario tiene  $4n$  ó  $4n + 1$  vértices.

5.25. Sea  $A$  una  $(n \times n)$ -matriz simétrica con ceros en la diagonal principal, en cada fila de la cual se encuentran  $2k + 1$  elementos no nulos. Demuéstrase que  $n$  es un número par.

5.26. Se denominará *grafo de las  $n$ -permutaciones* a un grafo cuyos vértices son todas las permutaciones de elementos de un  $n$ -conjunto, y dos vértices son adyacentes cuando y sólo cuando uno de ellos se transforma en el otro por transposición de dos elementos.

Indíquense el orden, la dimensión y el grado de cada vértice del grafo de las  $n$ -permutaciones. ¿Será el grafo regular? Exprésese en un plano el grafo de las 3-permutaciones.

5.27. Sea  $G$  un grafo de  $n$ -permutaciones y  $n \geq 3$ . Demuéstrese que  $G$  contiene una cadena hamiltoniana y no es un grafo planario.

5.28. Sea  $M$  un  $mn$ -conjunto y supongamos que  $R(M)$  es una totalidad de todas las particiones de  $M$  en  $m$ -conjuntos. Las particiones  $R_1, R_2$  de  $R(M)$  se llamarán *ortogonales*, si la intersección de cualesquiera dos componentes, uno de los cuales se toma de  $R_1$  y el otro de  $R_2$ , contiene a lo sumo un elemento. Un grafo con el conjunto de vértices  $R(M)$ , cuyos dos vértices  $R_1$  y  $R_2$  son adyacentes cuando y sólo cuando  $R_1$  y  $R_2$  son ortogonales, se denomina *grafo de  $(m, n)$ -particiones ortogonales*. Determinéense el orden y la dimensión del grafo de las  $(m, n)$ -particiones ortogonales para  $m \leq n$ . ¿Será este grafo regular? Si es regular, indíquese la potencia de regularidad.

5.29. Muéstrese que el orden del clique en el grafo de  $(m, n)$ -particiones ortogonales no sobrepasa el número  $\{(mn - 1)/(m - 1)\}$ .

5.30. Indíquese el orden del clique y constrúyase el mismo:

a) en el grafo de las  $(2, 3)$ -particiones ortogonales;

b) en el grafo de las  $(3, 4)$ -particiones ortogonales.

5.31. Se denomina *cubo de Boole*  $Q_m$  de dimensión  $m$  un grafo cuyos vértices están representados por los vectores  $m$ -dimensionales de ceros y unidades, con la particularidad de que dos vectores semejantes son adyacentes cuando y sólo cuando se diferencian en un componente.

Demuéstrese que  $Q_m$  es un grafo hamiltoniano conexo.

5.32. Existe un grupo de  $n$  individuos y hay  $n$  obras. Cada miembro del grupo puede realizar sólo algunas de las obras mencionadas. Se necesita llenar todos los lugares de trabajo con obreros calificados. ¿Será suficiente para ello que cada miembro del grupo pueda realizar un mismo número  $0 < k < n$  de obras (diferentes) y cada obra pueda ser efectuada por  $k$  individuos?

5.33. Hay  $n$  personas y cada dos de ellas tienen exactamente un conocido. Muéstrese que en el grafo de los conocidos existe al menos un triángulo y no existe ningún  $C_4$ .

5.34. Muéstrese que el número de particiones de un  $N$  entero en  $n$  partes de un modo tal que la parte mayor es igual a  $m$ , equivale al número de particiones de  $N$  en  $m$  partes de tal modo que la mayor parte es igual a  $n$ .

Sea  $A$  un cuadrado latino de orden 6. Determinemos dos grafos  $A_a$  y  $A_b$ , que tendrán por vértices las filas y las columnas del cuadrado latino  $A$ , respectivamente, con la particularidad de que dos vértices son adyacentes, si uno de los vértices se puede pasar a otro con ayuda de una permutación del siguiente tipo:

$$\alpha = (i_1 i_2) (i_3 i_4) (i_5 i_6); \quad \beta = (i_1 i_2 i_3) (i_4 i_5 i_6); \quad \gamma = (i_1 i_2) \times \\ \times (i_3 i_4 i_5 i_6); \quad \delta = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6).$$

Las aristas que corresponden a  $\alpha$  se representarán en la figura mediante  $\text{-----}$ , las que corresponden a  $\beta$ , a través de  $\text{----}$ , las que corresponden a  $\gamma$ , por  $\text{~~~~}$  y  $\delta$ , mediante  $\text{=====}$ .

5.35. Dibújense los grafos de los siguientes cuadrados latinos:

A:	B:	C:
1 2 3 4 5 6	1 2 3 6 5 4	1 2 3 4 5 6
2 4 4 3 6 5	2 1 6 3 4 5	2 3 4 5 6 1
3 5 1 6 2 4	3 4 5 2 1 6	3 5 1 6 2 4
4 6 2 5 1 3	4 3 2 5 6 1	4 6 5 1 3 2
5 3 6 1 4 2	5 6 1 4 3 2	5 4 6 2 1 3
6 4 5 2 3 1	6 5 4 1 2 3	6 1 2 3 4 5

5.36. Hállense las permutaciones de filas, columnas y elementos que convierten el cuadrado latino  $A$  en el cuadrado latino  $B$  (problema 5.35).

Se llama *automorfismo* del grafo  $G$  el isomorfismo  $\varphi$  del grafo  $G$  consigo mismo.

5.37. ¿Es cierto que cada automorfismo  $\varphi$  del grafo  $G$  es una permutación del conjunto de vértices del grafo  $G$  que conserva la adyacencia de éstos? Compruébese que todos los automorfismos del grafo  $G$  referente a la operación de composición de las aplicaciones, forman un grupo. ¿Cómo están relacionados entre sí los grupos de permutaciones en  $n$  elementos y automorfismos del grafo  $G$  con el conjunto de los vértices  $V$ , donde  $|V| = n$ ?

5.38. Hállese el grupo de automorfismos de los siguientes grafos: a)  $K_n$ ; b)  $K_{m,n}$ ; c)  $P_2 + P_3$ , si los vértices de  $P_2$  son los números 3 y 5 y de  $P_3$ , 1, 2 y 4; d)  $\bar{K}_2 + C_4$ , si los vértices de  $\bar{K}_2$  son los números 3 y 4, y de  $C_4$ , 1, 2, 4 y 5.

5.39. Hállense todos los grafos, con el número de vértices inferior o igual a 6, tales que su grupo de automorfismos sea trivial.

5.40. Sea  $G$  un grafo que consta de dos componentes conexos, uno de los cuales es  $K_n$ , y otro,  $K_m$ . Hállese el grupo de automorfismos del grafo  $H$ , si: a)  $H = G$  y  $m \neq n$ ; b)  $H = G$  y  $m = n$ ; c)  $m = n$  y  $H$  es un grafo conexo, obtenido de  $G$  por adición de aristas de tal manera, que cada vértice del primer componente está unido con el único vértice del segundo componente y viceversa.

5.41. Se denomina *epimorfismo* de un grafo sobre otro grafo a una aplicación sobreyectiva del conjunto de vértices del primer grafo sobre el conjunto de vértices del segundo, con la particularidad de que dicha aplicación conserva la relación de adyacencia. Muéstrase que existe el epimorfismo del grafo  $\bar{K}_2 + C_4$  sobre  $C_3$ .

5.42. Se da cierto BIB-esquema. A todo elemento del conjunto pongámosle en correspondencia un vértice del grafo. Unamos dos vértices mediante una arista cuando y sólo cuando el par correspondiente pertenece no a cada bloque del BIB-esquema. Dese la interpretación del BIB-esquema en términos de la teoría de los grafos.

5.43. ¿Cuáles son los parámetros del BIB-esquema, correspondiente al grafo  $\bar{K}_2 + C_4$ ? ¿Existirá el epimorfismo del BIB-esquema sobre el bloque-esquema para  $v = 3$ ,  $b = r = \lambda = 1$ ,  $k = 3$ ?

5.44. Demuéstrase que existen los epimorfismos del grafo  $C_4 + C_4$  sobre los grafos  $P_2$ ,  $K_4$  y  $C_4$ .

5.45. ¿Corresponderá el conjunto de subgrafos del tipo del grafo  $C_4 + C_4$  del BIB-esquema? Dese la generalización del BIB-esquema para este caso (véase problema 5.42).

5.46. ¿Formarán los subgrafos del tipo  $P_2 \times P_4$  del grafo  $C_4 + C_4$  un BIB-esquema generalizado.

5.47. Constrúyase la tabla rectangular a partir de elementos de cinco tipos de una manera tal que los segmentos que unen los elementos iguales formen un retículo cuadrado.

5.48. Un plano está cubierto con unos hexágonos de  $n$  colores de un modo tal que los centros de los hexágonos de un mismo color forman los vértices de un retículo formado por triángulos regulares iguales. ¿Para qué número  $n$  de colores será posible tal construcción?

5.49. Un grafo, de cuyos vértices sirven todos los  $k$ -subconjuntos de cierto  $n$ -conjunto, y dos  $k$ -subconjuntos están unidos por una arista cuando y sólo cuando su intersección contiene exactamente  $l$  elementos, lleva el nombre de  $(n, k, l)$ -grafo. Determinense el orden y la dimensión del  $(n, k, l)$ -grafo. ¿Será este grafo regular?

5.50. Hállese el número cromático de los siguientes grafos: a)  $K_n$ ; b)  $K_{m,n}$ ; c) árbol  $T$ ; d) grafo de  $n$ -permutaciones; e) cubo booleano  $Q_m$ ; f) ciclo  $C_n$ .

5.51. Hállese el número cromático de un grafo obtenido de  $K_n$  por supresión de: a) una arista; b) dos aristas; c) tres aristas que forman un triángulo.

5.52. Hállese  $\chi(Q_m + e)$  para  $m > 1$ .

5.53. Demuéstrase que  $\chi(G \times P_n) = \chi(G)$ , para un grafo arbitrario  $G$  con aristas.

5.54. Indíquese un grafo cúbico de 1004 vértices cuyo número cromático sea igual a 4.

Se llama  $\alpha$ -transformación del grafo  $G$  la sustitución de cualesquiera dos de sus aristas  $(a, b)$  y  $(c, d)$  no adyacentes por dos nuevas aristas  $(a, c)$ ,  $(b, d)$  ó  $(a, d)$ ,  $(b, c)$ .

5.55. ¿Varían los grados de los vértices del grafo  $G$  cuando tienen lugar las  $\alpha$ -transformaciones? Constrúyase en la fig. 5.7 con ayuda de las  $\alpha$ -transformaciones, el grafo  $H$  sin triángulos a partir del grafo  $G$ . Hállese  $\chi(G)$  y  $\chi(H)$ .

5.56. ¿Se podrá obtener mediante las  $\alpha$ -transformaciones, a partir de un árbol, un grafo conexo que no sea árbol?

5.57. Constrúyanse todos los grafos que se obtienen a partir de un grafo cúbico expuesto en la fig. 5.8, empleando las  $\alpha$ -transformaciones.

Se denomina *distancia* entre los vértices  $a$  y  $b$  del grafo  $G$  la mínima longitud de una cadena simple que une  $a$  y  $b$  en el grafo  $G$ . Se

llama *matriz de distancia* del grafo  $G$  sobre  $n$  vértices la  $(n \times n)$ -matriz  $D = (d_{ij})$ , en la cual  $d_{ij}$  son iguales a la distancia de  $a_i$  a  $a_j$ ; si los vértices  $a_i$  y  $a_j$  yacen en distintos componentes conexos del grafo  $G$ , entonces  $d_{ij} = \infty$ .

5.58. Hállese el número de diferentes cadenas más cortas entre dos vértices del grafo  $Q_m$  que sean distintas en  $l$  componentes.

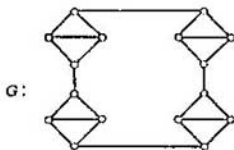


Fig. 5.7.

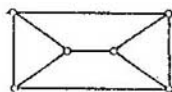


Fig. 5.8.

5.59. Escribese la matriz de distancias para los siguientes grafos: a)  $K_3$ ; b)  $C_4$ ; c)  $C_4 \times K_3$ .

5.60. Sea  $P(G; \lambda)$  un número de diferentes  $\lambda$ -coloraciones del grafo  $G$ . ¿Será cierto que  $P(G; \chi(G)) > 0$  y  $P(G; \lambda) = 0$  para todo  $\lambda < \chi(G)$ ?

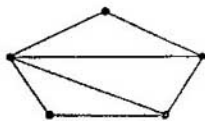


Fig. 5.9.

5.61. Demuéstrase que si  $G$  es un grafo simple y  $e$ , su arista arbitraria, entonces  $P(G; \lambda) = P(G - e; \lambda) - P(G/e; \lambda)$ , donde  $G - e$  y  $G/e$  son los grafos obtenidos de  $G$  por eliminación y contracción de la arista  $e$ , respectivamente.

5.62. Sea  $G$  un grafo simple arbitrario sobre  $n$  vértices obtenido del grafo  $K_n$  por eliminación de las aristas  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Supongamos que  $G_0 = K_n$ ,  $G_i = G_{i-1} - e_i$ , y  $G^i = G_{i-1}/e_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, k$ . Es evidente que  $G = G_k$ . Demuéstrase que

$$P(G; \lambda) = P(K_n; \lambda) + \sum_{i=1}^k P(G^i; \lambda).$$

Hállense  $P(K_n; \lambda)$  y  $P(G; \lambda)$  para el grafo  $G$  representado en la fig. 5.9. ¿Se podrá pintar de un modo regular en dos o tres colores los vértices del grafo  $G$ ?

$P(G; \lambda)$  se denomina, según consideraciones evidentes, polinomio cromático del grafo  $G$ .

5.63. Sea  $P(G; \lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$  un polinomio cromático del grafo

$G$  con el conjunto de vértices  $V(G)$  y el conjunto de aristas  $E(G)$ , y supóngase que  $G_1, \dots, G_h$  son sus componentes conexos. Demuéstrase que:

a)  $n = |V(G)|$  y  $a_n = 1$ :



$$b) a_{n-1} = -|E(G)|;$$

$$c) a_0 = 0;$$

$$d) P(G; \lambda) = \prod_{i=1}^h P(G_i; \lambda);$$

$$e) a_i = 0 \text{ para todo } i < k.$$

¿Es cierto que si un polinomio satisface las condiciones a) ... e), entonces es cromático?

5.64. Sea  $P(G; \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda^i$  un polinomio cromático grafo  $G$  y sea  $n = |V(G)|$ . Demuéstrase que

a) la sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = 1$  es de signos alternados;

b) si  $G$  es un grafo conexo, entonces  $|a_i| \geq \binom{n-1}{i-1}$ ;

c)  $a_k \sum_{j=0}^{|E(G)|} (-1)^j m_{k,j}$  es el número de subgrafos engendrados del grafo  $G$  con  $k$  componentes conexos y  $j$  aristas.

5.65. Demuéstrase que el grafo  $G$  con  $n$  vértices es un árbol cuando y sólo cuando  $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ .

## § 2. Problemas enumerativos en los grafos

5.66. Analicemos 8 clases de grafos con vértices marcados. Cada una de estas clases se define prefijando los parámetros  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  toman los valores 0 ó 1; llamemos  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -grafos a sus elementos. En este caso, si  $\alpha = 0$ , se analizan los grafos sin bucles; si, en cambio,  $\alpha = 1$ , los bucles se admiten; si  $\beta = 0$ , se analizan los grafos sin aristas paralelas, y éstas se admiten, si  $\beta = 1$ ; si  $\gamma = 0$ , se analizan los grafos no orientados, en cambio, si  $\gamma = 1$ , se introduce la orientación de las aristas.

Denotemos con  $g_{\alpha, \beta, \gamma}(n, k)$  el número de  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -grafos con  $n$  vértices y  $k$  aristas. Demuéstranse las siguientes fórmulas:

$$g_{0,0,0}(n, k) = \binom{n(n-1)/2}{k}, \quad g_{1,0,0}(n, k) = \binom{n(n+1)/2}{k},$$

$$g_{0,1,0}(n, k) = \binom{n(n-1)/2 + k - 1}{k},$$

$$g_{1,1,0}(n, k) = \binom{n(n+1)/2 + k - 1}{k},$$

$$g_{0,0,1}(n, k) = \binom{n(n-1)}{k},$$

$$g_{1,0,1}(n, k) = \binom{n^2}{k},$$

$$g_{0,1,1}(n, k) = \binom{n(n-1) + k - 1}{k},$$

$$g_{1,1,1}(n, k) = \binom{n^2 + k - 1}{k}.$$

¿Cuál es el número máximo de aristas que puede tener un  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -grafo?

$$5.67. \text{ Sea } G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(y) = \sum_{k \geq 0} g_{\alpha, \beta, \gamma}(n, k) y^k,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$  Aquí, el límite superior de sumación (véase el problema 5.66) es finito, si  $\beta = 0$ , y es igual a  $n(n-1)/2$  cuando  $\alpha = 0, \gamma = 0$ ; a  $n(n+1)/2$  cuando  $\alpha = 1, \gamma = 0$ ; a  $n(n-1)$  cuando  $\alpha = 0, \gamma = 1$ ; a  $n^2$  cuando  $\alpha = 1, \gamma = 1$ , y, por fin, es igual a  $\infty$ , siempre que  $\beta = 1$ . Por definición (y por el sentido) pongamos  $g_{\alpha, \beta, \gamma}(n, k) = 0$ , si  $k$  es mayor que la frontera superior (determinada en el problema 5.66) para el número de aristas en el  $(\alpha, 0, \gamma)$ -grafo. Por eso el límite superior de sumación respecto de  $k$  puede considerarse en todo caso igual a  $\infty$ .

Demuéstrase que

$$\begin{aligned} G_{0,0,0}^{(n)}(y) &= (1+y)^{n(n-1)/2}, & G_{0,0,1}^{(n)}(y) &= (1+y)^{n(n-1)}, \\ G_{1,0,0}^{(n)}(y) &= (1+y)^{n(n+1)/2}, & G_{1,0,1}^{(n)}(y) &= (1+y)^{n^2}, \\ G_{0,1,0}^{(n)}(y) &= (1-y)^{-n(n-1)/2}, & G_{0,1,1}^{(n)}(y) &= (1-y)^{-n(n-1)}, \\ G_{1,1,0}^{(n)}(y) &= (1-y)^{-n(n+1)/2}, & G_{1,1,1}^{(n)}(y) &= (1-y)^{-n^2}. \end{aligned}$$

5.68. Sea  $c_{\alpha, \beta, \gamma}(n, k)$  el número de  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -grafos conexos con  $n$  vértices marcados y  $k$  aristas. Suponemos  $c_{\alpha, \beta, \gamma} = 0$ , si  $k$  es mayor que la frontera superior determinada en el problema 5.66.

Demuéstrase la relación recurrente

$$g(n+1, k) = \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{l} c(l+1, m) g(n-l, k-m) \quad (5.1)$$

(fórmula de Hilbert). Con el fin de simplificar la notación en (5.1) están omitidos los índices  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ .

Las condiciones iniciales son las siguientes:  $g(0, 0) = 1$  y  $g(0, k) = 0$ , si  $k > 0$  (por acuerdo);  $c(1, 0) = 1$  y  $c(n, 0) = 0$ , si  $n > 1$  (según el sentido).

5.69. Introduzcamos las funciones generatrices

$$C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(y) = \sum_{k \geq 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}(n, k) y^k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde el límite superior de sumación respecto de  $k$  es el mismo que figura en la definición de la función generatriz  $G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(y)$ . Dedúzcase de la relación recurrente (5.1), que se refiere a los números  $g_{\alpha, \beta, \gamma}(n, k)$  y  $c_{\alpha, \beta, \gamma}(n, k)$ , la siguiente relación recurrente para las funciones generatrices  $G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(y)$  y  $C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(y)$ :

$$G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n+1)}(y) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.2)$$

donde, de conformidad con las condiciones iniciales del problema 5.68,  $G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)}(y) = 1$ .

5.70. Introduzcamos las funciones generatrices

$$G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(y) \frac{z^n}{n!},$$

$$C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(y) \frac{z^n}{n!},$$

Demuéstrese que para las funciones generatrices  $G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y)$  y  $C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y)$  se verifica la correlación

$$G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = \exp \{C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y)\}. \quad (5.3)$$

5.71. ¿Cuántos son los grafos  $(0, 0, 0)$  con  $2n$  vértices y  $n$  aristas, cuyos componentes conexos son aristas aisladas?

5.72. Hállese la función generatriz exponencial de los números  $\mu_n$ , donde  $\mu_0 = 1$ ,  $\mu_n = 0$ , si  $n$  es impar y  $\mu_{2n}$  es igual al número de grafos del problema antecedente.

5.73. Supongamos que  $c(n, k) = c_{n, 0, 0}(n, k)$  es el número de  $(0, 0, 0)$ -grafos conexos con  $n$  vértices marcados y  $k$  aristas y que  $F(n, k)$  es el número de tales grafos que no tienen vértices terminales, es decir, incidentes respecto de una sola arista. Muéstrese que para  $n > 2$  los números  $c(n, k)$  y  $F(n, k)$  están ligados entre sí por la relación

$$F(n, k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} c(n-i, k-i) (n-i)^i, \quad n > 2,$$

$$c(0, 0) = 1, \quad c(0, k) = 0 \quad \text{para } k > 0.$$

5.74. El  $(0, 0, 0)$ -grafo conexo sin ciclos es un árbol. El número de aristas en el árbol con  $n$  vértices es igual a  $n - 1$ . Haciendo uso del problema 5.73, demuéstrese que el número  $T(n)$  de árboles con  $n$  vértices marcados es igual a

$$T(n) = n^{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

(primera fórmula de Cayley).

5.75. ¿A qué es igual el número

$T_n(P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$ ,  $r = 1, 2, \dots$ ;  $n = r, r + 1, \dots$ , de árboles con  $n$  vértices marcados  $P_1, \dots, P_n$ , en los cuales los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$  son terminales?

5.76. Demuéstrese que el número  $T(n, r)$  de árboles con  $n$  vértices marcados, de los cuales  $r$  son terminales, se define por la fórmula

$$T(n, r) = \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r), \quad n = 1, 2, \dots; \quad r = 0, \dots, n \quad (5.5)$$

(segunda fórmula de Renyi), donde  $S(n-2, n-r)$  es el número de Stirling de 2° género.

5.77. Demuéstrase la fórmula (5.4), haciendo uso de la segunda fórmula de Rényi (véase el problema 5.76).

5.78. Demuéstrase para los números  $T(n, r)$  del problema 5.76 la fórmula recurrente

$$\frac{r}{n} T(n, r) = rT(n-1, r) + (n-r)T(n-1, r-1)$$

( $n = 3, 4, \dots$ ;  $r = 1, \dots, n$ ), haciendo uso de la fórmula explícita (5.5).

5.79. Hállese el número

$$T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}), \quad r = 1, \dots; \quad n = r, r+1, \dots,$$

de árboles con  $n$  vértices marcados  $P_1, \dots, P_n$ , de los cuales exactamente  $r$  (a saber, los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$ ) son terminales.

5.80. Obténgase la demostración combinatoria de la fórmula recurrente del problema 5.78.

5.81. Demuéstrase, para los números  $T(n)$  del problema 5.74, la relación recurrente

$$2(n-1)T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (n-i)T(i)T(n-i), \quad n=2, 3, \dots$$

La condición inicial es:  $T(1) = 1$ .

5.82. Demuéstrase la identidad

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{i-1}(n-i)^{n-i-1}, \quad n=2, 3, \dots$$

5.83. Designemos con  $\tau(n)$  el número de árboles radicales con  $n \geq 1$  vértices marcados e introduzcamos una función generatriz

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \frac{z^n}{n!}.$$

Demuéstrase que  $\theta(z)$  satisface la ecuación

$$z = \theta(z) e^{-\theta(z)}$$

(ecuación de Polya) y en la forma explícita  $\theta(z)$  es

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{z^n}{n!}.$$

5.84. Sea

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-2} \frac{z^n}{n!}.$$

Muéstrase que  $T(z)$  y la función generatriz  $O(z)$  del problema 5.83 están ligados entre sí por la correlación

$$T(z) = O(z) - O^2(z)/2$$

(primera fórmula de Renyi).

5.85. Demuéstrase la primera fórmula de Cayley (5.4) para un número de árboles con  $n$  vértices marcados, haciendo uso de los resultados del problema 5.83 (ecuación de Polya).

5.86. Supongamos que para  $n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n$

$$A_{nh} = \sum \frac{n!}{j_1! \dots j_h!} j_1^{j_1-1} j_2^{j_2-1} \dots j_h^{j_h-1};$$

la sumación aquí se realiza respecto de los juegos  $j_1, \dots, j_h$  tales que  $j_1 + \dots + j_h = n$ . Demuéstrase la identidad

$$A_{nh} = kn^{n-h} (n-1)! / (n-k)!$$

5.87. Designemos, para  $n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, n$ , mediante  $l_k(n)$  el número de bosques con  $n+k-1$  vértices marcados  $P_1, \dots, P_{n+k-1}$  y  $k$  componentes tales que los vértices  $P_1, P_2, \dots, P_k$  pertenezcan a los componentes diferentes. Demuéstrase que

$$l_k(n) = k(n+k-1)^{n-2}$$

(segunda fórmula de Cayley).

5.88. Demuéstrase que el número de bosques radicales  $l_k(n)$  con  $n$  vértices marcados y  $k$  componentes es

$$l_k(n) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n.$$

5.89. Supongamos que  $T_k(n)$  denota el número de árboles con  $n$  vértices marcados  $P_1, \dots, P_n$ , en los cuales el vértice  $P_1$  es de grado  $k$ . Muéstrase que

$$T_k(n) = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}, \quad n = 2, 3, \dots; k = 1, \dots, n-1$$

(fórmula de Clark).

5.90. Dése una nueva demostración de la primera fórmula de Cayley (5.4), haciendo uso de la fórmula de Clark del problema 5.89.

5.91. Demuéstrase la validez de la identidad

$$\sum_{p=h}^{n-1} \binom{n}{p} \binom{p-1}{k-1} p^{p-h} (n-p)^{n-p-1} = (k+1) \binom{n-1}{k} n^{n-h-1},$$

donde  $n = k+1, k+2, \dots; k = 1, 2, \dots$  (Para  $k=1$  esta identidad se reduce a la identidad del problema 5.82).

5.92. Denotemos por  $L_k(n)$  el número de bosques con  $n$  vértices marcados y  $k$  componentes. Demuéstrase que

$$L_k(n) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\min(k, n-k)} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \binom{k}{j} \binom{n-1}{k+j-1} (k+j)! n^{n-k-j},$$

$$n = 1, \dots; k = 1, \dots, n$$

(tercera fórmula de Rényi).

5.93. En un árbol con  $n \geq 2$  vértices marcados  $P_1, \dots, P_n$  existe un único camino que une dos vértices arbitrarios. Supongamos que para  $k \geq 2$ ,  $\gamma_k(n)$  es el número de árboles con  $n$  vértices marcados, en los cuales los vértices  $P_1$  y  $P_2$  están unidos mediante un camino de longitud  $k-1$  (es decir, mediante un camino que pasa por  $k$  vértices sucesivos, incluidos  $P_1$  y  $P_2$ ). Demuéstrase que

$$\gamma_k(n) = kn^{n-k-1} (n-2)(n-3) \dots (n-k), \quad n = 2, 3, \dots;$$

$$k = 2, \dots, n$$

(fórmula de Meir — Moon).

5.94. Demuéstrase que el número  $t(n; v_1 \dots v_n)$  de árboles con  $n \geq 2$  vértices marcados  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , en los cuales el vértice  $P_i$  es de grado  $v_i \geq 1$ , se determina por la fórmula

$$t(n; v_1, \dots, v_n) = (n-2)! / (v_1 - 1)! \dots (v_n - 1)!$$

(fórmula de Moon), con la particularidad de que los grados  $v_1, \dots, v_n$  satisfacen la correlación

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2(n-1).$$

5.95. Demuéstrase la primera fórmula de Cayley (5.4), la segunda fórmula de Rényi y la fórmula de Clark (problema 5.89), haciendo uso del resultado del problema 5.94.

5.96. Se denominará *altura del vértice*  $Q$  de un árbol respecto de cierto vértice fijo  $P$  la longitud del único camino que une el vértice  $Q$  con el  $P$ . La altura del propio vértice  $P$  en este caso se considerará igual a cero. La altura del árbol por encima del vértice  $P$  se definirá como altura máxima de sus vértices con relación a  $P$ . Denotemos por  $d_k(n)$  el número de árboles con  $n$  vértices marcados  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , cuya altura por encima del vértice  $P_1$  no sobrepasa de  $k$ .

Demuéstrase que

$$d_k(n) = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n-1}{r} \sum \frac{(n-1-r)!}{(m_1-1)! \dots (m_p-1)!} d_{k-r}(m_1) \dots d_{k-r}(m_p),$$

donde  $d_0(1) = 1$  y  $d_0(m) = 0$ , si  $m > 1$ ; la sumación se realiza respecto de los juegos  $m_1, \dots, m_p$  tales que  $m_1 + \dots + m_p = n-1$ ,  $m_i \geq 1$ .

5.97. Sea

$$D_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{(n-1)!} z^n, \quad k=0, 1, \dots,$$

donde  $D_0(z) = z$ . Demuéstrese que

$$D_{k+1}(z) = z \exp\{D_k(z)\}, \quad k=0, 1, \dots$$

5.98. Muéstrese que para los números  $d_k(n)$  (véase el problema 5.96) se verifica

$$d_k(n) = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_h = n-1 \\ m_i \geq 0}} \frac{(n-1)!}{m_1! \dots m_h!} m_1^{m_1} m_2^{m_2} \dots m_h^{m_h}, \quad n=2, 3, \dots;$$

$$k=1, 2, \dots, n-1;$$

la sumación se realiza respecto de los juegos  $m_1, \dots, m_h$  tales que  $m_1 + \dots + m_h = n-1$ ,  $m_i \geq 0$ .

5.99. Sea  $\bar{d}_k(n)$  el número de árboles con  $n$  vértices marcados, cuya altura por encima del vértice  $P_1$  es igual exactamente a  $k$ . Muéstrese que

$$\begin{aligned} \bar{d}_k(n) &= d_k(n) - d_{k-1}(n), \\ \bar{d}_k(n) &= \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_h = n-1 \\ m_i \geq 0}} \frac{(n-1)!}{m_1! \dots m_h!} m_1^{m_1} \dots m_h^{m_h}, \\ n &= 2, 3, \dots; \quad k=1, \dots, n-1; \end{aligned}$$

la sumación se realiza respecto de tales juegos  $m_1, \dots, m_h$  que  $m_1 + \dots + m_h = n-1$ ,  $m_i \geq 0$ .

5.100. Sea  $S_k(n)$  el número de  $(0, 0, 0)$ -grafos con  $n \geq 3$  vértices marcados y  $k$  aristas que tienen un único ciclo de longitud  $k$  ( $3 \leq k \leq n$ ) y  $n-k$  vértices aislados. Muéstrese que

$$S_k(n) = \frac{1}{2k} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1}{2k} n(n-1) \dots (n-k+1).$$

5.101. Designemos por  $P_k(n)$  el número de grafos conexos con  $n \geq 3$  vértices marcados que tienen un único ciclo de longitud  $k$  ( $3 \leq k \leq n$ ). Muéstrese que

$$P_k(n) = \frac{n!}{2k} \sum \prod_{j=1}^h \frac{(n_j+1)^{n_j-1}}{(n_j)!},$$

donde la sumación se realiza respecto de tales juegos  $n_1, \dots, n_h$  que  $n_1 + \dots + n_h = n-k$ ,  $n_i \geq 0$ .

5.102. Introduzcamos una función generatriz

$$P(z, y) = \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=3}^{\infty} P_k(n) y^k \frac{z^n}{n!}.$$

Demuéstrese que

$$P(z, y) = -\frac{1}{2} \left[ \ln(1 - y\theta(z)) + \frac{y\theta'(z)}{1!} + \frac{y^2\theta''(z)}{2!} \right],$$

donde  $\theta(z)$  es la función generatriz de los números de árboles radicales (véase el problema 5.83).

5.103. Demuéstrese la fórmula para los números de grafos conexos con  $n$  vértices marcados y un único ciclo de longitud  $k$ :

$$P_k(n) = \frac{(n-1)! n^{n-k}}{2(n-k)!}, \quad n \geq k \geq 3.$$

### § 3. Planos finitos

Un plano se llama *finito*, si contiene un número finito de puntos y rectas. En un plano proyectivo finito en cada recta yacen  $n + 1$  puntos; por cada punto pasan  $n + 1$  rectas;  $n$  recibe el nombre de *orden* del plano.

Un sistema que se obtiene de un plano proyectivo finito por supresión de una recta y de todos los puntos situados en ésta, lleva el nombre de plano *afín* del mismo orden que el plano proyectivo dado. Un plano afín de orden  $n$  tiene  $n^2$  puntos,  $n^2 + n$  rectas; en cada recta yacen  $n$  puntos y por cada punto pasan  $n + 1$  rectas. El plano afín se interpreta por intermedio de un bloque-esquema equilibrado incompleto con los parámetros

$$v = n^2, \quad b = n^2 + n, \quad k = n, \quad r = n + 1, \quad \lambda = 1.$$

Un plano proyectivo lleva el nombre de Desargue, si en él se cumple el

TEOREMA DE DESARGUE. *Si las rectas que unen los correspondientes vértices de dos triángulos se intersecan en un punto, los puntos de intersección de los lados correspondientes yacen en una misma recta.*

Cualquier plano finito de Desargue es isomorfo a un plano de cierto orden  $n$ , construido sobre el campo de Galois  $GF(n)$ , donde  $n = p^\alpha$  ( $p$  es un número primo y  $\alpha$ , un número natural).

Se denomina *curva de segundo orden (cónica)* a un conjunto de puntos de un plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

donde mediante  $x, y, z$  vienen designadas las coordenadas homogéneas. La regularidad de la cónica se determina por la condición de regularidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Una curva de segundo orden se define por cinco elementos: o bien por cinco puntos, o bien por cuatro puntos y una tangente en



uno de los puntos mencionados, o bien por tres puntos y las tangentes en dos de ellos, etc.

Se denominará *arco* de un plano proyectivo a cualquier conjunto de puntos, de los cuales cualesquiera tres no yacen en una misma recta (no colineares tres a tres); un arco, en el que están contenidos  $k$  puntos, se llama *k-arco*. Un arco que no puede ser ensanchado se denomina *completo*, y si el citado arco contiene un número máximo posible de puntos para el orden dado  $n$  del plano, se denominará *óvalo*.

Una recta que pasa por dos puntos de un arco se llama *secante* de dicho arco; los  $k$ -arcos con sus secantes llevan el nombre de *polígonos de  $k$  lados* (vértices) completos.

Si algún punto del plano no yace en ninguno de los secantes del arco dado, entonces este punto puede ser añadido al arco; en este caso se obtiene un arco nuevo que contiene el arco dado, por lo cual este último resulta ser incompleto. Viceversa, si todos los puntos del plano yacen en los secantes del arco dado, tal arco no podrá ser ensanchado.

Una recta que tiene con el arco sólo un punto común, se denomina *tangente*. Una recta que no tiene puntos comunes con el arco, se denomina *recta externa* de este arco.

Un óvalo en el plano de Desargue de orden impar representa una curva de segundo orden, mientras que en el plano de orden par consta de una curva de segundo orden y del núcleo de la misma, es decir, de un punto por el cual pasa toda tangente a la curva.

5.104. Trácese, valiéndose de una regla corta, una recta entre dos puntos alejados.

5.105. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden que pasan por un punto prefijado en un plano proyectivo finito de Desargue en orden  $n$ .

5.106. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden, que pasan por un par prefijado de puntos, en el plano proyectivo finito de Desargue de orden  $n$ .

5.107. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden, que son tangentes a las dos rectas dadas en dos puntos prefijados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden  $n$ .

5.108. En un plano proyectivo finito de orden  $n$  se tienen  $n^2 + n + 1$  rectas, de las cuales una es *impropia* y las restantes, *ordinarios*. La recta impropia es incidente con relación a los puntos impropios y sólo impropios. Por cuanto en cada recta de este plano yacen  $n + 1$  puntos, en el plano hay  $n + 1$  puntos impropios.

Una curva se llama *hiperbólica*, si corta la recta impropia, es decir, tiene con la misma dos puntos impropios comunes. Hállese el número de todas las curvas hiperbólicas de segundo orden, que pasan por dos puntos ordinarios dados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden  $n$ .

5.109. Una curva se denomina *parabólica*, si entra en contacto con la recta impropia (véase problema 5.108), es decir, tiene con

esta última un punto común. Hállese el número de todas las curvas parabólicas de segundo orden, que pasan por el par dado de puntos ordinarios, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden  $n$ .

5.110. Una curva se denomina *elíptica*, si no tiene puntos comunes con la recta impropia. Hállese el número de todas las curvas elípticas de segundo orden, que pasan por el par de puntos ordinarios dados, en un plano proyectivo finito de Desargue de orden  $n$ .

5.111. Hállese el número de todas las curvas de segundo orden en un plano proyectivo finito de orden  $n$ .

5.112. Determinése el número máximo  $k$  de puntos del arco de un plano proyectivo finito de orden  $n$ .

Indicaciones. Analícense los casos de los planos proyectivos de órdenes par e impar.

5.113. Demuéstrese que en un plano proyectivo de orden impar  $n$  por un punto no perteneciente a un óvalo pasan no más de dos tangentes de dicho óvalo; hállese el número de tales puntos (externos), por los cuales pasan dos tangentes al óvalo dado.

5.114. Hállese todos los valores de  $n$  tales que en un plano proyectivo de orden  $n$  existan los 4-arcos completos.

5.115. Determinése cómo depende de  $n$  el número de puntos tanto dispuestos en las secantes del 5-arco, como los que no yacen en él.

5.116. Demuéstrese que en cualquier plano proyectivo no existen 5-arcos completos.

5.117. Demuéstrese que en un plano de orden 4 existe al menos un 6-arco completo (óvalo). Hállese el número de ellos.

5.118. Demuéstrese que el  $(n + 1)$ -arco en un plano proyectivo de orden par  $n$  no puede ser completo.

5.119. Demuéstrese que todas las tangentes del  $(n + 1)$ -arco en un plano proyectivo de orden par  $n$  se intersecan en un punto.

5.120. Dése la explicación combinatoria del problema en el que una secante del óvalo en un plano proyectivo de orden  $n$ , se interseca en los puntos dispuestos fuera del óvalo con las secantes restantes.

5.121. Hállese el número  $K_i$  de puntos de tipos diferentes, admisibles para el  $k$ -arco de un plano proyectivo de orden  $n$ , donde  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $i$  es el número de secantes del  $k$ -arco que pasan por un punto del plano.

5.122. Hállese los números máximo y mínimo de puntos  $K_i$  ( $i = 0, 1$ ) para el 6-arco en un plano proyectivo de orden  $n$ , donde  $i$  es el número de secantes del 6 arco que pasan por estos puntos.

5.123. Demuéstrese que el  $n$ -arco en un plano proyectivo de orden impar  $n$  no es completo.

5.124. Hállese el número de puntos de un plano proyectivo de orden  $n$  que no están dispuestos en tres lados y tres diagonales de un cuadrilátero (polígono de 4 vértices) completo.

5.125. Demuéstrese que todos los puntos de un plano de orden 3 ó 5 se disponen en los lados y en las diagonales de un cuadrilátero completo.

5.126. Demuéstrase que en un plano proyectivo de orden 4 los puntos diagonales de cualquier cuadrilátero completo son colineares.

5.127. El subplano proyectivo de un plano proyectivo, distinto del último, se denomina *baeriano*, si por cada punto del plano pasa por lo menos una recta del subplano mencionado.

Hállese la relación existente entre el orden  $n$  del plano y el orden  $m$  de su subplano baeriano.

5.128. Muéstrase que el orden  $n$  de un plano y el orden  $m$  de su subplano no baeriano están ligados entre sí por la relación  $n \geq m^2 + m$ .

5.129. Muéstrase que un plano de orden 13 tiene un subplano de orden 3, y no tiene subplanos baerianos.

5.130. Demuéstrase que un plano afín finito es equivalente al conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de dos en dos.

5.131. Demuéstrase que la existencia de un plano afín finito es equivalente a la existencia de un plano proyectivo.

5.132. Demuéstrase que no existe un plano afín de orden 6.

5.133. Constrúyase un plano proyectivo finito de orden 2.

5.134. Se denomina *plano de Galois*  $P(2, q)$ , construido sobre el campo de Galois  $GF(q)$ , a un conjunto de elementos de los puntos y de sus subconjuntos determinados, los cuales se definen del modo siguiente: se llama punto a una clase de ternas ordenadas

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z),$$

donde  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  es una terna fija de elementos de  $GF(q)$ ,  $\lambda \in GF(q)$ ,  $\lambda \neq 0$ , y la recta es un subconjunto de puntos  $(x, y, z)$  que satisfacen la condición

$$ux + y + wz = 0,$$

donde, además,  $[u, v, w] \sim [\mu u, \mu v, \mu w]$ . Demuéstrase que el plano  $P(2, q)$  forma un plano proyectivo finito.

5.135. Demuéstrase que una recta en el plano de Galois  $P(2, q)$  puede ser definida también como un conjunto de puntos del tipo

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2),$$

donde  $A \sim (x_1, y_1, z_1)$  y  $B \sim (x_2, y_2, z_2)$  son dos puntos de la recta,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ ,  $\lambda, \mu \in GF(q)$ .

5.136. Demuéstrase que el plano de Galois  $P(2, q)$  definido en el problema 5.134 tiene un orden igual a  $q$ .

5.137. Hállese todos los puntos y las ecuaciones de todos los tipos de rectas del plano  $P(2, 2)$ , tomando por elementos de  $GF(2)$  los residuos 0, 1 según el módulo 2. Compárense los resultados con el problema 5.133.

5.138. Se denomina *transformación proyectiva (colineación)* del plano de Galois  $P(2, p^h)$  la transformación de sus puntos definida

por el sistema de ecuaciones

$$sx^i = a_{11}x^{p^r} + a_{12}y^{p^r} + a_{13}z^{p^r},$$

$$sy^i = a_{21}x^{p^r} + a_{22}y^{p^r} + a_{23}z^{p^r},$$

$$sz^i = a_{31}x^{p^r} + a_{32}y^{p^r} + a_{33}z^{p^r},$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad a_{ij}, s \in GF(p^h), \quad s \neq 0,$$

donde  $r$  es un número entero no negativo cualquiera.

a) Compruébese lo correcto de esta definición: conservación de la incidencia del punto y de la recta en esta transformación.

b) Demuéstrese que en el sistema de ecuaciones podemos limitarnos a los valores siguientes:  $r = 0, 1, 2, \dots, h - 1$  (para cualquier  $m \geq h$  llegamos a uno de los tipos de transformaciones proyectivas que corresponden a estos valores).

5.139. Demuéstrese que el número de diferentes triángulos en el plano  $P(2, q)$  es igual a

$$(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2.$$

5.140. Demuéstrese que el número de diferentes cuadriláteros (sistemas de cuatro puntos no conexos) del plano  $P(2, q)$  es igual a

$$(q^3 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q - 1)^2.$$

5.141. Demuéstrese que el conjunto de todas las colineaciones del plano de Galois de orden  $q = p^h$  forma un grupo finito con un orden de

$$h(p^{2h} + p^h + 1)(p^{2h} + p^h)p^{2h}(p^h - 1)^2.$$

Si en el plano  $P(2, q)$  la colineación  $\alpha$ , distinta de la idéntica  $\varepsilon$ , se repite  $m$  veces y  $\alpha^m = \varepsilon$ , entonces el valor mínimo del número natural  $k$ , para el cual tiene lugar tal igualdad, recibe el nombre de *período*.

**Teorema de Singér.** En el plano  $P(2, q)$  existe por lo menos una colineación cíclica del período  $q^2 + q + 1$ .

5.142. Demuéstrese el teorema de Singer para  $q = 3$ .

5.143. Hállese la ecuación de la colineación en el plano  $P(2, 5)$  definida por un par de cuaternas de puntos no conexos

$$(1, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1), \quad (0, 1, 0) \mapsto (1, 0, 0),$$

$$(0, 0, 1) \mapsto (0, 1, 0), \quad (1, 1, 1) \mapsto (1, 0, 1).$$

5.144. Constrúyase un plano proyectivo de orden  $n$  a partir de un conjunto completo de cuadrados latinos recíprocamente ortogonales de orden  $n$ , donde  $n = 2, 3$  y  $4$ .

5.145. Un plano proyectivo sobre el campo de residuos según el módulo 2 contiene siete puntos:  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  y siete rectas, con la particularidad de que en cada recta se disponen exactamente tres puntos y por cada punto pasan exactamente tres rectas. ¿Cuántas matrices de todo género de tercer orden pueden formarse a partir de las coordenadas de dichos puntos, si cada fila se compone de las coordenadas de un punto? ¿Cuántas matrices de las mencionadas serán regulares?

5.146. En el plano  $P(2, p^h)$ ,  $p \neq 2$ , se llamará *curva de segundo orden (cónica)* a un conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0, \quad a_{ij} \in GF(p).$$

El carácter regular de la cónica se determina por la condición de regularidad de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Demuéstrese que cualquier cónica regular en  $P(2, q)$  contiene exactamente  $q + 1$  puntos.

## SISTEMAS DE CONJUNTOS

Los problemas de este capítulo están seleccionados y agrupados de tal manera que en el transcurso de su resolución se explique sucesivamente el contenido de algunas cuestiones del análisis combinatorio y se adquieran los hábitos correspondientes.

§ 1. Problemas extremales  
en los grafos e hipergrafos

En la preparación de este párrafo prestaron gran ayuda O. Borodín, D. Katona, A. Kóstochka, L. Méinikov y A. Sidorenko. Su cooperación incluía tanto observaciones valiosas, como material concreto: hay problemas que fueron enunciados y resueltos especialmente para este párrafo; tales son, por ejemplo, los resultados obtenidos por Katona, Kóstochka y Sidorenko. A la exposición de algunos resultados cardinales, como son, por ejemplo, el teorema de Erdős — Ko-Rado y el teorema de Kruskal — Katona, contribuyó la preparación de textos para la demostración de éstos, realizada por D. Katona. Hay también problemas que por ahora no tienen resolución completa (estos últimos están marcados por el signo?).

Sea  $S_n = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto no ordenado de vértices de  $n$  elementos y sea  $C^l(S_n) = \{S \subset S_n: |S| = l\}$  el conjunto de  $l$ -subconjuntos del conjunto  $S_n$ , de suerte que  $|C^l(S_n)| = C_n^l = \binom{n}{l}$ .

$C(S) = C|S|(S)$ ;  $\mathcal{P}(S_n) = \sum_{i=0}^n x C^i(S_n)$ ,  $|\mathcal{P}(S_n)| = 2^n$ . Se denomina

*hipergrafo* en el conjunto de vértices  $S$  todo subconjunto  $G$  del conjunto  $\mathcal{P}(S)$ . Los elementos del conjunto  $G$  representan los subconjuntos  $e \subseteq S$  y llevan el nombre de *hiperaristas*, así que todo hipergrafo  $G$  es cierto conjunto  $\{e_i\}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , de  $m = |G|$  hiperaristas  $e_i \subset S$  sobre los vértices de  $S$ ; un  $l$ -grafo es  $G' \subset C^l(S)$ , y un grafo ordinario es el 2-grafo; sus elementos son simplemente las aristas.

A veces resulta cómodo no indicar los conjuntos de vértice; así,

por ejemplo, un hipergrafo  $F$  puede ser definido mediante sus hiperaristas  $\{A_1, \dots, A_m\}$ , cuya numeración, hablando en general, es de poca importancia.

6.1. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de  $n$  vértices sin triángulos?

6.2. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de  $n$  vértices sin hiperaristas encajadas una en otra?

6.3. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de  $n$  vértices en el que cualesquiera dos hiperaristas tienen una intersección no vacía?

6.4. ¿Cuál es el número mínimo de vértices que puede tener un  $k$ -grafo de  $m$  aristas?

6.5. Si un  $k$ -grafo  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  y un  $l$ -grafo  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$  son tales que  $A_i \cap B_j = \emptyset \iff i = j$ , entonces ¿Cuán grande puede ser  $m$ ?

6.6. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de  $n$  vértices, en el cual cualesquiera dos hiperaristas tienen una intersección no vacía y cualesquiera tres, una intersección vacía?

Se denomina *grado de un vértice* el número de aristas que lo contienen. Las aristas se llaman *independientes*, si no son adyacentes, es decir, no tienen vértices comunes. Un sistema de aristas independientes recibe el nombre de *combinación de pares*.

6.7. ¿Cuál es el número mínimo de colores que pueden aplicarse para colorar las aristas de un grafo (cada arista en un solo color) de tal modo que en cada vértice converjan las aristas de diferentes colores?

6.8. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de  $n$  vértices, en el que el grado de cualesquiera de ellos no sobrepasa de  $d$ ?

6.9. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de  $n$  vértices, el cual posee no más de  $t$  aristas independientes?

6.10. ¿Cuán grande es el número máximo de aristas que puede tener un grafo, en el cual el grado de cada vértice no sobrepasa de  $d$  y el cual tiene no más de  $t$  aristas independientes?

6.11. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo de  $n$  vértices, en el cual el grado de cada vértice no sobrepasa de  $y$  y el cual tiene no más de  $t$  aristas independientes?

6.12. ¿Cuán grande es el número de  $k$ -aristas que puede tener un  $k$ -grafo de  $n$  vértices, el cual posee  $t$   $k$ -aristas independientes?

Para  $X \cap S = \emptyset$  la notación  $C^h(X) C^l(S)$  significa un  $(k+l)$ -grafo sobre el conjunto de vértices  $X+S$  de la forma  $\{e \subseteq X+S : |e \cap X| = k, |e \cap S| = l\}$ . Sea  $\mathcal{F}_k$  un grafo de  $k$  vértices con  $\lfloor k/2 \rfloor$  aristas independientes, y sea  $\mathcal{F}_k^*$  un grafo de  $k$  vértices con  $\lfloor k/2 \rfloor$  aristas independientes en la medida posible. Como siempre,

$$K_n + C^2(S_n), \quad K_{n,m} = C^1(S_n) C^1(S_m), \quad S_n \cap S_m = \emptyset.$$

6.13. ¿Cuál es el número mínimo de aristas  $m = m(n; H_k)$  que puede tener un grafo  $G_n \subset C^2(S_n)$  tal que sea

$$\forall S_k \subset S_n \quad (G_n \cap C^2(S_k)) \supset H_k,$$

donde  $H_k \subset C^2(S_k)$  es un grafo de  $k$  vértices prefijado de antemano? Examinéese este problema para los siguientes grafos  $H_k$ :

- 1)  $H_k$  es un grafo de  $k$  vértices con una arista:  $|H_k| = 1$ ;
- 2)  $H_k = C^2(S_q) C^0(S_k \setminus S_q)$ ,  $S_q \subset S_k$ ;
- 3)  $H_k = C^1(a) C^1(S_k \setminus a) = K_{1, k-1}$ ,  $a \in S_k$  es una estrella;
- 4)  $H_k$  una «rueda», es decir, una estrella  $C^1(a) C^1(S_k \setminus a)$  y un  $(k-1)$ -ciclo  $C_{k-1} = C_{k-1}(S_k \setminus a)$  sobre los vértices  $(S_k \setminus a)$ ;
- 5)  $H_k$  es un grafo de  $k$  vértices arbitrariamente prefijado que tiene un vértice de grado  $k-1$ ;
- 6)  $H_k = C_k$  es un ciclo simple sobre  $k$  vértices;
- 7)  $H_k = P_k$  es un simple camino en  $k$  vértices;
- 8)  $H_k = \mathcal{F}_k^*$  es un grafo de  $k$  vértices con  $\lfloor k/2 \rfloor$  aristas independientes en la medida posible;
- 9)  $H_k = \overline{C}_k = K_k - C_k$  es un grafo completo sin  $k$ -ciclo;
- 10)  $H_k = \overline{P}_k = K_k - P_k$  es un grafo completo sin  $k$ -camino;
- 11)  $H_k = \overline{\mathcal{F}}_k^* = K_k - \mathcal{F}_k^*$ ;
- 12)  $H_k = C^2(S_l) + C^2(S_k \setminus S_l)$ ,  $S_l \subset S_k$ ,  $k \geq 3l + 1 \geq 7$ ;
- 13)  $H_k = \underbrace{d+1, \dots, d+1}_{2t/d}$   $2 \leq d < 2t$ ,  $d \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $d \mid 2t$ ,  $k = 2t + 2t/d$ ;
- 14) (?)  $H_k$  se compone de  $t$  aristas independientes y  $k - 2t$  vértices aislados ( $2t \leq k$ );
- 15) (?)  $H_k$  se compone de un grafo  $H_q$  de  $q$  vértices y  $(p - q)$  vértices aislados ( $k = p$ ).

6.14. ¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener un grafo  $G_n \subset C^2(S_n)$ , si

$$\forall S_k \subset S_n \quad \exists a \in S_n \setminus S_k : C^1(a) C^1(S_k) \subset G_n?$$

6.15. ¿Cuán grande es el número de aristas que puede tener un grafo plano de  $n$  vértices, es decir, un grafo que puede ser expresado en el plano sin que haya autointersecciones?

6.16. ¿Cuán grande es el número máximo de aristas que puede tener un grafo de  $n$  vértices, en el cual todo subgrafo engendrado de  $k$  vértices es plano?

6.17. HIPÓTESIS DE DIRAC. Si un grafo de  $n$  vértices tiene  $3n - 5$  aristas, él tiene un subgrafo que es homeomorfo a  $K_5$ .

6.18. Problema de los subgrafos prohibidos. ¿Cuán grande puede ser el número  $f = f(n; G^{(1)}, \dots, G^{(2)}, \dots)$  de aristas de un grafo



de  $n$  vértices que no contiene en calidad de subgrafos. los grafos  $G^{(1)}, \dots, G^{(2)}, \dots = \{G^{(i)}\}$ ?

1) Teorema de Erdős — Shimanóvich

$$f(n; \{G^{(i)}\}) = \left(1 + \frac{1}{1 - \min \chi(G^{(i)})} \binom{n}{2}\right) + o(n^2).$$

2) Si el número de subgrafos prohibidos es finito, entonces la igualdad  $f(n; \{G^{(i)}\}) = O(n)$  se verifica cuando y sólo cuando entre los subgrafos prohibidos  $\{G^{(i)}\}$  se tiene o bien un árbol o bien un bosque.

3) La igualdad  $f(n; \{G^{(i)}\}) = O(1)$  se verifica cuando y sólo cuando entre los subgrafos prohibidos  $\{G^{(i)}\}$  se tienen una combinación de pares y una estrella.

4)  $\{G^{(i)}\} = K_{1, k-1}$ .

5)  $\{G^{(i)}\} = \mathcal{F}_k$ .

6)  $\{G^{(i)}\} = P_k$ .

7) Hipótesis de Erdős-Sos. Para todo árbol de  $k$  vértices  $T_k$  se verifica la desigualdad

$$f(n; T_k) \leq (k-2)n/2.$$

8)  $\{G^{(i)}\} = C_n$ .

9)  $\{G^{(i)}\} = C_k$ .

10)  $\{G^{(i)}\} = \{C_3, C_4, \dots\}$  es un conjunto de todos los ciclos.

11)  $\{G^{(i)}\} = \{C_3, C_5, \dots\}$  es un conjunto de todos los ciclos no pares.

12)  $\{G^{(i)}\} = \{C_4, C_6, \dots\}$  es un conjunto de todos los ciclos pares.

13)  $\{G^{(i)}\} = \{C_l, C_{l+1}, \dots\}$  es un conjunto de todos los ciclos "largos".

14)  $\{G^{(i)}\} = \{C_3, \dots, C_l\}$  es un conjunto de todos los ciclos "cortos".

Un hipergrafo  $G^T$  se llama *dual* con relación al hipergrafo  $G$ , si la matriz de incidencia de  $G^T$  es matriz de incidencia transpuesta de  $G$ . La *cadena* es una sucesión de conjuntos encajados uno en el otro; la *longitud de una cadena* es el número de términos en tal sucesión. La *anticadena* es un sistema de conjuntos no encajados recíprocamente uno en el otro.

6.19. ¿Cuál es el número mínimo de hiperaristas que puede tener un hipergrafo  $G(S_n)$  en el cual

$$\forall a_1, a_2 \in S_n \exists e_1, e_2 \in G(S_n): a_i \in e_1, a_i \notin e_2, \\ i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j?$$

6.20. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener un hipergrafo de  $n$  vértices sin cadenas de longitud  $k+1$ ?

6.21. Si  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  son anticadenas disjuntas de  $\mathcal{P}(S_n)$ , entonces ¿cómo puede ser de grande el número  $\sum_{i=1}^k |\mathcal{A}_i|$ ?

6.22. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\neg \exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| \geq h?$$

6.23. ¿Cuán grande es el número de hiperaristas que puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\neg \exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| = 1?$$

6.24. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\neg \exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| < h \quad (i \neq j)?$$

6.25. (?) ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\neg \exists A_i, A_j \in F: A_i \subset A_j, |A_j - A_i| = h?$$

6.26. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\neg \exists A_i, A_j \in F: |A_i \Delta A_j| \leq h?$$

6.27. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\forall A_1, \dots, A_t \in F: \left| \bigcap_{i=1}^t A_i \right| \geq r?$$

Analícese los siguientes casos:

a)  $r = 1$ ,  $t$  es arbitrario;

b)  $t = 2$ ,  $r$  es arbitrario;

c)  $t = 3$ ,  $r = 2$ .

6.28. SUPOSICIÓN DE ERDOS - FRANKL. La construcción extremal para el problema 6.27 tiene la siguiente forma. Sea  $S_n = S_{r+th} + S_{n-r-th}$ ,  $S_{r+th} \cap S_{n-r-th} = \emptyset$ . Pongamos

$$\mathcal{A}(n, t, r, h) = \sum_{i=r+(t-1)h}^{r+th} C^i(S_{r+th}) \mathcal{P}(S_{n-r-th})$$

y escojamos  $h$  tal que maximice  $|\mathcal{A}(n, t, r, h)|$ .

6.29. ¿Cuál es el número máximo de  $k$ -aristas que puede tener  $G_n^h \subset C^h(S_n)$ , si  $\forall e_1, e_2 \in G_n^h, e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ ? ¿Cómo variará la respuesta, si suponemos la ausencia de los vértices pertenecientes a todas las aristas?

6.30. ¿Cuál es el número máximo de  $k$ -aristas que puede tener  $G_n^h \subset C^h(S_n)$ , si  $\forall e_1, \dots, e_t \in G_n^h, \bigcap_{i=1}^t e_i \neq \emptyset$ ?

6.31. ¿Cuál es el número máximo de  $k$ -aristas que puede tener  $G_n^h \subset C^k(S_n)$ , si  $\forall e_1, e_2 \in G_n^h \mid e_1 \cap e_2 \mid \geq l$ ? Muéstrase que para  $n$  pequeños este número puede ser superior a  $\binom{n-l}{k-l}$ .

Se llama *sombra* ( $l$ -sombra) del  $k$ -grafo  $F \subset C^k(S)$  al  $l$ -grafo  $C_l(F) = \bigcup_{S_h \in F} C^l(S_h)$ .

6.32. Demuéstrase que para cualesquiera  $m, k$  naturales existen y son únicos tales  $l$  naturales,  $a_k > a_{k-1} > \dots > a_l \geq l$ , para los cuales se verifica la llamada representación binomial canónica

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_l}{l}.$$

6.33. Demuéstrase que si un  $k$ -grafo  $F \subset C^k(S_n)$  es anticadena, entonces

$$\mid C_{k-1}(F) \mid \geq k \mid F \mid / (n - k + 1).$$

6.34. Sea

$$f_k(0) = 0, \quad f_k(m) = \binom{a_k}{k-1} + \dots + \binom{a_l}{l-1},$$

donde  $l, a_k, \dots, a_l$  son componentes de la representación binomial canónica  $m$ . Constrúyase un  $k$ -grafo con  $m$  aristas tal que se verifique  $\mid C_{k-1}(F) \mid = f_k(m)$ .

6.35. Demuéstrase la desigualdad

$$f_k(m_1 + m_2) \leq \max \{f_k(m_1), m_2\} + f_{k-1}(m_2).$$

6.36. ¿Cuán pequeña será la potencia de la sombra  $C_{k-1}(F)$  que puede tener un  $k$ -grafo  $F$  de  $m$  aristas? ¿Cómo variará la respuesta, si minimizamos la  $l$ -sombra?

6.37. Demuéstrase la desigualdad  $f_k(m_1 + m_2) \leq f_k(m_1) + f_k(m_2)$ .

6.38. ¿Cuán grande puede ser el número  $m$ , con el cual para todo  $k$ -grafo de  $m$  aristas  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  existe un  $(k-1)$ -grafo de  $m$  aristas  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ , para el cual  $B_i \subset A_i, B_i \neq \emptyset, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ ? ¿Cómo variará la respuesta, si  $\mathcal{B}$  es un  $l$ -grafo?

6.39. ¿Cuán grande puede ser el número de pares de hiperaristas en  $F = \{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{P}(S_n)$ , para las cuales  $\mid A_i \Delta A_j \mid = 1$ ?

6.40. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes de existencia de las anticadenas  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$  con parámetros fijos  $p_i = \mid F \cap C^i(S_n) \mid, i = 0, 1, \dots, n$ ?

6.41. HIPÓTESIS (B. S. Stechkin, P. Frankl). Si un  $k$ -grafo  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  y un  $l$ -grafo  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$  son tales que  $\mid A_i \cap B_i \mid \leq \lambda \Leftrightarrow i = j$ , entonces  $m$  máximo es igual a  $\binom{k+l-2\lambda}{l-\lambda}$ .

6.42. Si los hipergrafos  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ ,  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$  son tales que  $A_i \cap B_j = \emptyset$ ,  $i = j$ , entonces

$$\sum_{i=1}^m \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1} \leq 1.$$

6.43. ¿Cómo variará la respuesta del problema 6.41, si la condición  $|A_i \cap B_j| \leq \lambda \Leftrightarrow i = j$  la sustituimos por la condición  $|A_i \cap B_i| = \lambda$ ,  $|A_i \cap B_j| > \lambda \Leftrightarrow i \neq j$ , o bien por la condición  $A_i \cap B_i = \emptyset$ ,  $|A_i \cap B_j| > \lambda$ ,  $i \neq j$ ?

6.44. Si un  $k$ -grafo  $\mathcal{A} \subset C^k(S_n)$  y un  $l$ -grafo  $\mathcal{B} \subset C^l(S_n)$  son tales que  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ,  $k + l \leq n$ , entonces o  $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ , o bien  $|\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{l-1} = \binom{n-1-k}{l-1}$ .

6.45. Si los hipergrafos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son tales que  $A \in \mathcal{A}$ ,  $C \subset A \Rightarrow C \in \mathcal{A}$ ;  $B \in \mathcal{B}$ ,  $D \supset B \Rightarrow D \in \mathcal{B}$ , resulta válida la desigualdad  $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}| |\mathcal{B}| 2^{-n}$ .

6.46. PROBLEMA DE TURÁN. ¿Cuál es el número mínimo de  $l$ -aristas  $T(n, k, l)$  que puede tener un  $l$ -grafo  $G_n^l \subset C^l(S_n)$ , si  $\forall S_k \subset S_n \exists \exists S_l \in G_n^l: S_l \subset S_k$ ?

Analícense los casos:

- $l = 2$  (véase el problema 6.7, a));
- $T(n, k, l) = n - k + 1 \Leftrightarrow n \leq (k - 1)l / (l - 1)$ ;
- $k = n - 1$ .

Al problema de Turán es similar el

Problema de empaques. ¿Cuál es el número máximo de  $l$ -aristas que puede tener un  $l$ -grafo de  $n$  vértices, en el cual entre cualesquiera  $k$  vértices hay no más de una  $l$ -arista?

6.47. Supongamos que un  $l$ -grafo  $G_n^l$  posee dos propiedades:

$$\forall S_k \subset S_n \quad \exists S_l \in G_n^l: S_l \subset S_k; \quad (T)$$

$$\forall e_1, e_2 \in G_n^l \quad |e_1 \cap e_2| \geq r. \quad (D)$$

¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener  $G_n^l$ ? ¿Cuál es el número máximo de vértices que puede tener  $G_n^l$ ?

6.48. ¿Cuál es el número mínimo de  $k$ -aristas que puede tener  $G_n^k \subset C^k(S_n)$ , si

$$\forall S_p \subset S_n \quad \exists S_q \subset S_p: C^k(S_q) \subset G_n^k?$$

6.49. Muéstrase que si  $p \leq 2(q - 1)$ , entonces el grafo  $G_n^2 \subset C^2(S_n)$  posee la propiedad

$$\forall S_p \subset S_{n-p+q} \quad \exists S_q \subset S_p: C^2(S_q) \subset G_n^2,$$

si y sólo si

$$S_{n-p+q} \subset S_n: C^2(S_{n-p+q}) \subset G_n^2.$$

6.50. PROBLEMA DE ERDŐS-KATONA. ¿Cuál es la cantidad máxima de hiperaristas que puede tener  $G_i \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si todos los números  $\{|e_i \cap e_j|\}$ ,  $e_i, e_j \in G_i, i \neq j$ , son diferentes?

6.51. ¿Cuál es el número máximo de  $l$ -aristas que puede tener  $G_n^l \subset C^l(S_n)$ , si todos los números  $\{|e_i \cap e_j|\}$ ,  $e_i, e_j \in G_n^l, i \neq j$ , son diferentes?

6.52. ¿Qué cantidad máxima de  $k$ -aristas puede tener  $G_n^k \subset C^k(S_n)$ , si  $\forall e_i, e_j \in G_n^k |e_i \cap e_j| = 1$ ?

Un sistema de subconjuntos  $F = \{e_i\}, 1 \leq i \leq m$ , del conjunto,  $S_n$  se llama *determinante* (o de reconstrucción) en  $S_n$ , si todo subconjunto se restablece unívocamente según un sistema no ordenado de números  $\{|T \cap e_i|\}, 1 \leq i \leq m$ .

6.53. ¿Cuán pequeño por su potencia puede ser un sistema determinante de conjuntos en  $S_n$ ?

6.54. Demuéstrese la unicidad del sistema de conjuntos mínimo, determinativo en  $S_n$ .

6.55. Constrúyase un ejemplo de hipergrafo de  $n$  vértices con  $n$  hiperaristas, en el cual todos los grados son los números  $1, 2, \dots, n$  y el cual es distinto de cero.

La *valencia* del conjunto de vértices  $S$ , de  $q$  entero y del hipergrafo  $G$  es el número  $v(S, q; G) = |\{e \in G: |e \cap S| = q\}|$ , de suerte que si  $a$  es un vértice de  $G$ , entonces  $v(a, 1; G) = \deg_G(a)$  es el grado más corriente de dicho vértice en  $G$ .

6.56. Muéstrese que

$$\forall G \subset C^2(S) \sum_{a \in S} \deg_G(a) = 2 |G|.$$

6.57. Demuéstrese las siguientes identidades de valencia:

a) Si  $G$  y  $F$  son dos hipergrafos, entonces

$$\sum_{s \in F} v(S, q; G) = \sum_{e \in G} v(e, q; F).$$

b) Si  $G \subset \mathcal{P}(S_n)$  entonces

$$\sum_{S_p \subset S_n} v(S_p, q; G) = \sum_{i \geq q} \binom{i}{q} \binom{n-i}{p-q} v(S_n, i; G).$$

c) Si  $G^l \subset C^l(S_n)$ , entonces

$$\sum_{S_p \subset S_n} v(S_p, q; G^l) = \binom{l}{q} \binom{n-l}{p-q} |G^l|,$$

$$\sum_{S_r \subset S_p \subset S_n} v(S_p, q; G^l) = \sum_{i \leq q} \binom{l-i}{q-i} \binom{n-r-l+i}{p-r-q+i} v(S_r, i; G^l).$$

d) Si  $G$  es un hipergrafo, entonces

$$\sum_{a \in S} \deg_G(a) = \sum_{e \in G} |e \cap S|,$$

$$\sum_{S_p \subset S} v(S_p, q; G) = \sum_{e \in G} \binom{|e \cap S|}{q} \binom{|S| - |e \cap S|}{p-q},$$

$$\sum_{a \in S} \binom{\deg_G(a)}{k} = \sum_{\substack{e_{i_1}, \dots, e_{i_h} \in G \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq |G|}} \left| S \cap \bigcap_{j=1}^h e_{i_j} \right|,$$

$$\sum_{S_p \subset S} \binom{v(S_p, p; G)}{k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq |G|} \binom{\left| S \cap \bigcap_{j=1}^h e_{i_j} \right|}{p}.$$

6.58. Haciendo uso de las valencias, demuéstranse las identidades

$$\sum_{j_1 \leq q} \sum_{j_2 \geq q} \binom{l_2 - j_1}{q - j_1} \binom{r_2 - r_1 - j_2 + j_1}{p - r_1 - q + j_1} \binom{r_1}{j_1} \binom{r_2 - r_1}{l_2 - j_2} \binom{n - r_2}{l - j_2} =$$

$$= \binom{p}{q} \binom{n - p}{l - q} \binom{r_2 - r_1}{p - r_1},$$

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{q + i - r_1}{q - r_1} \binom{r_2 - r_1}{q + i - r_1} \binom{n - q - i}{l - q - i} = \binom{n - r_2}{l - q} \binom{r_2 - r_1}{q - r_1}.$$

6.59. Hállese la esperanza matemática  $M(v(S_p, q; G_n))$  bajo el supuesto de que los subconjuntos  $S_p$  de  $S_n$  se eligen casualmente con probabilidades iguales.

6.60. ¿Cuál es el número mínimo de  $k$ -aristas que puede tener  $G_n^k \subset C^k(S_n)$ , si  $S_n = S_p + S_{n-p}$  y

$$\forall S_q \subset S_p \quad \exists S_r \subset S_{n-p}: C^{h-l}(S_q) C^l(S_r) \subset G_n^h?$$

6.61. Supongamos que  $\mathcal{A}$  es una propiedad arbitraria de los hipergrafos y que  $m(n, l; \mathcal{A}) = \max_{G_n^l \sim \mathcal{A}} |G_n^l|$ . Demuéstrase que si

$\mathcal{A}$  es de tal género que

$$G^l(S_n) \sim \mathcal{A} \Rightarrow \forall S_{n-1} \subset S_n,$$

$$(G^l(S_n) \cap C^l(S_{n-1})) \sim \mathcal{A} \quad (6.1)$$

y si existe una función de valores numéricos enteros  $f(n)$  tal que

$$f(n_0) = m(n_0, l; \mathcal{A}), \quad n_0 \geq l, \quad (6.2)$$

$$0 \leq f(n) \leq m(n, l; \mathcal{A}), \quad n > n_0, \quad (6.3)$$

$$\frac{f(n-1)}{1+f(n)} \leq \frac{n-l}{n}, \quad n > n_0, \quad (6.4)$$

entonces para todo  $n \geq n_0$  necesariamente se verifica  $m(n, l; \mathcal{A}) = f(n)$ .

6.62. Si el hipergrafo  $F$  y el sistema de hipergrafos  $\mathcal{G} = \{G_1, \dots\}$  son tales que  $\forall G \in \mathcal{G}, |G \cap F| \leq 1$ , entonces

$$\sum \frac{\deg_{\mathcal{G}}(S)}{|S|} \leq 1, \text{ donde } \deg_{\mathcal{G}}(S) = |\{G \in \mathcal{G} : G \ni S\}|.$$

6.63. Sea  $f(n)$  una función fija de valores reales; calcúlese  $\max_{A \in \mathcal{A}} f(|A|)$ , donde el máximo se toma respecto de todas las anticadenas  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S_n)$ .

6.64. ¿Qué cantidad máxima de hiperaristas puede tener un hipergrafo  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\forall A \in F, |A| \leq n/2, \quad \forall A_1, A_2 \in F, \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, \quad A_1 \not\subset A_2?$$

6.65. Si un hipergrafo  $F = \{A_1, \dots, A_m\}$  es el mismo que figura en el problema 6.64, entonces

$$\sum_{i=1}^m \binom{n-1}{|A_i|-1}^{-1} \leq 1.$$

6.66. ¿Cuál es el número máximo de  $l$ -aristas que puede tener un  $l$ -grafo de  $n$  vértices  $F = \{A_1, \dots, A_m\} \subset C^l(S_n)$ , si

$$\forall A_i, A_j, A_k \in F, \quad A_k \not\supset A_i \Delta A_j, \\ i \neq j \neq k \neq i?$$

6.67. ¿Cuál es el número máximo de hiperaristas que puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\forall A_1, A_2 \in F \quad A_1 \not\subset A_2, \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, \\ A_1 \cup A_2 \neq S_n?$$

6.68. ¿Qué cantidad máxima de hiperaristas puede tener  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , si

$$\forall A_1, A_2 \in F \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 \neq S_n?$$

6.69. ¿Cuál es el número máximo de  $l$ -aristas que puede tener un  $l$ -grafo crítico máximo de Turán, es decir, el  $l$ -grafo  $C_n^l \subset C^l(S_n)$  que posee las dos propiedades siguientes:

$$\forall S_h \subset S_n \quad \exists S_l \in C_n^l : S_l \subset S_h; \quad (T)$$

$$\forall S_l \in C_n^l \quad (C(S_l) - C(S_l)) \not\subset T. \quad (K)$$

6.70. ¿Cuán pequeño es el número de aristas comunes que pueden tener dos grafos de  $n$  vértices de Turán  $G_i \subset C^2(S_n)$ ,  $i = 1, 2$ , tales que

$$\forall S_3 \subset S_n \quad \exists S_2 \in G_i : S_2 \subset S_3, \quad i = 1, 2?$$

6.71. Sea  $n \equiv 0 \pmod{k}$ . Demuéstrase que  $C^h(S_n)$  puede ser representado en forma de una suma  $C^h(S_n) = \sum G_i$ , donde  $G_i \cap G_j = \emptyset$ , y cada  $G_i$  representa un  $k$ -grafo de  $n/k$   $k$ -aristas independientes sobre los vértices de  $S_n$ .

6.72. ¿Es cierto que si un grafo  $G_n^2$  tiene más de  $k(n - k) + \binom{k}{2}$  aristas, se encontrará en él un subgrafo en el cual el grado de cada vértice será superior a  $k$ ?

6.73. HIPÓTESIS DE BERGE. En todo grafo, cuyos grados de los vértices son todos iguales a cuatro, se encontrará un subgrafo, en el cual todos los grados de los vértices son iguales a tres.

## § 2. Problemas extremales sobre la partición de los números

Demos a conocer, ante todo, algunas situaciones prácticas relacionadas con los problemas extremales y la partición de números.

6.74. ¿Cuál es la cantidad mínima de pesas que se necesitan para poder pesar cualquier número entero de libras desde 1 hasta  $n$ ?

6.75. ¿Cuál es el número mínimo de billetes de 1, 3, 5, 10 y 25 rublos que se necesitan para saldar las cuentas con una lechera, verdulera, lavandera y un carnicero, si en total hay que pagarles a todos 37 rublos? ¿Y si en este caso se conoce que las mujeres van a pedir un precio máximo de 3, 5 y 5 rublos, respectivamente?

6.76. En cierto lugar se inaugura un bar con un mostrador largo. Se sabe que los habitantes visitan el bar en familias ( $k_i$  personas en la  $i$ -ésima familia), y hay en total  $t$  familias. Cada familia se sienta al mostrador ocupando lugares seguidos sin que se queden por ambos lados de ella lugares desocupados. Habiendo permanecido sentada cierto tiempo, una de las familias se va, pero puede volver de nuevo cuando lo desee. ¿Qué capacidad debe tener el mostrador para que se garantice la ausencia de colas?

Si el bar tiene además un administrador que acomoda los visitantes en los asientos a su modo (sin separar las familias), entonces ¿qué parte del mostrador podrá economizar?

6.77. Veamos un esquema de alojamiento de  $n$  partículas indistinguibles en  $r$  células indistinguibles. ¿Podrán realizarse todos los resultados de este esquema alojando un número inferior a  $n$  de cualesquiera objetos?

6.78. Durante el funcionamiento de los sistemas de cómputo se observa un fenómeno de fragmentación de la memoria del ordenador, es decir, una situación en que toda la memoria está partida en pedazos (fragmentos) ocupados y libres; al mismo tiempo se necesita colocar la siguiente porción informativa en dichos fragmentos, con la particularidad de que la mencionada información puede ser dividida en una cantidad de bloques, no mayor que la determinada, de definido volumen (por ejemplo, por razón de una sola dirección de las tablas o ficheros). Resulta natural la cuestión sobre la determinación de la posibilidad de alojar la información requerida en el sistema de fragmentos dado, es decir, ¿si es alojable el sistema dado de interrogaciones dentro del sistema de fragmentos dado?



La partición de  $n$  natural se reduce a su representación en forma de una suma no ordenada de sumandos naturales:  $n = n_1 + \dots + n_r$ ; estos sumandos  $n_i$  llevan el nombre de partes de la partición y su número  $r$ , de rango de la partición. El concepto de partición de un número surgió por primera vez en la correspondencia entre J. Bernoulli y G. Leibniz. Las particiones se escriben comúnmente en la forma vectorial:  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq t} = (x_1, \dots, x_t) \mid -n$ , es decir,  $n = \sum_{i=1}^t x_i$ ; la notación  $(n_1^a, \dots, n_r^a) \mid -n$  denota una partición de  $n$ , en la cual la parte  $n_i$  interviene exactamente  $a_i$  veces, de modo que  $\sum_{i=1}^r a_i n_i = n$ , y el rango de esta partición es igual a  $\sum_{i=1}^r a_i$ . Para los números naturales que se designan por letras minúsculas, la notación  $[r]$  significará un conjunto de los primeros  $r$  números naturales, es decir,  $[r] = \{1, 2, \dots, r\}$ .

La composición es una representación de un número natural  $n$  por la suma ordenada de sumandos naturales. Así, pues, las composiciones pueden considerarse como "particiones ordenadas".

6.79. Escribanse todas las particiones y composiciones del número 6.

6.80. Cerciórese de que el número de composiciones de un número natural  $n$  de rango  $r$  es igual a  $C_{n-1}^{r-1}$ , y el número total de composiciones del número  $n$  es igual a  $2^{n-1}$ .

Los problemas de particiones son mucho más complejos que las cuestiones correspondientes referentes a las composiciones. Así, por ejemplo, incluso el cálculo de  $p(n, r)$ , esto es, del número de todas las particiones de  $n$  de rango  $r$ , es decir, el cálculo del número de soluciones de la ecuación  $n = x_1 + \dots + x_r$ ,  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_r$  en  $x_i$  naturales constituye uno de los aspectos fundamentales de la teoría enumerativa de particiones, la cual se da a conocer en los manuales clásicos de Mac-Mahon y Andrews. El problema extremal sobre las particiones se enuncia por lo general, en forma de pregunta: ¿son muchas o pocas las particiones existentes que se encuentran en la correspondencia dada? La elección de una correspondencia concreta entre las particiones se determina por las condiciones del problema práctico, precisamente de aquel, para el cual las particiones con la citada correspondencia sirven de esquema combinatorio.

Uno de los resultados extremales teórico-numéricos más tempranos pertenece, al parecer, a Sylvester, cuyo teorema afirma: sean  $r_1, \dots, r_t$  unos números naturales recíprocamente primos y sea  $s(r_1, \dots, r_t)$  un número entero máximo  $s$  que no puede ser representado en la forma  $s = \sum_{i=1}^t a_i r_i$ , donde  $a_i \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ . Entonces  $s(r_1, r_2) = r_1 r_2 - r_1 - r_2$ .

Cuando  $t \geq 3$ , el problema de cálculo de los valores exactos de  $s(r_1, \dots, r_t)$  queda hasta ahora abierto y lleva el nombre del problema de Frobenius.

En términos de las particiones puede enunciarse también el principio ampliamente conocido de Dirichlet.

Principio de Dirichlet. Si  $n(k, r)$  es  $n$  entero mínimo, para el

cual en cada partición de este  $n$  en  $r$  partes existe una que no es inferior a  $k$ , entonces  $n(k, r) = rk - r + 1$ .

Este principio se enuncia con frecuencia en términos de alojamientos y se conoce como **principio de los cajones**. Cualquiera que sea el alojamiento de  $(r + 1)$  objetos en  $r$  cajones, existe un cajón que contiene al menos dos objetos.

6.81. Definamos entre las particiones la correspondencia  $\succsim$ , rigiéndonos por la regla: la partición  $(n_1, \dots, n_r)$  se encuentra en correspondencia  $\succsim$  respecto de la partición  $(k_1, \dots, k_r)$ , si existe un  $i: 1 \leq i \leq r$ , para el cual  $k_i \leq n_i$ , es decir, si en la segunda partición existe una parte que no sobrepasa la parte correspondiente de la primera partición. Entonces surge la pregunta ¿cuál es, para la partición dada  $(k_1, \dots, k_r)$ , el  $n = n(k_1, \dots, k_r)$  mínimo, con el cual para cada partición de este  $n$  en  $r$  partes se cumplirá la correspondencia  $(n_1, \dots, n_r) \succsim (k_1, \dots, k_r)$ ? No es difícil comprobar que el  $n(k_1, \dots, k_r)$  mínimo que se busca existe y se calcula por la fórmula  $n(k_1, \dots, k_r) = \sum_{i=1}^r k_i - r + 1$ .

Puede calcularse también la característica inversa: calcular para una partición dada  $(n_1, \dots, n_r)$  el  $k = k(n_1, \dots, n_r)$  máximo, cada partición del cual en  $r$  partes poseerá la propiedad de que  $(n_1, \dots, n_r) \succsim (k_1, \dots, k_r)$ . Dicha característica se determina según la fórmula  $k(n_1, \dots, n_r) = \sum_{i=1}^r n_i + r - 1$ .

6.82. Si  $n_a$  es el  $n$  mínimo, para el cual existen, cualquiera que sea la coloración en dos colores (2-coloración) de las aristas de un grafo completo  $K_n$  sobre  $n$  vértices, dos triángulos monocromáticos, quizás de diferentes colores, pero sin aristas comunes, entonces  $n_a = 7$ .

6.83. Si  $n_b$  es el  $n$  mínimo, para el cual existen, cualquiera que sea la 2-coloración de las aristas de  $K_n$ , dos triángulos monocromáticos de un mismo color y sin aristas comunes, entonces  $n_b = 8$ .

La correspondencia principal entre las particiones de los números en la que nos detendremos aquí, será su capacidad de encajarse: una partición  $(k_1, \dots, k_t)$  se encaja en la partición  $(n_1, \dots, n_r)$ , si existe una aplicación  $\varphi: \{1, \dots, t\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  en la cual se cumple el sistema de desigualdades

$$\sum_{j \in \varphi^{-1}(i)} k_j \leq n_i \quad i = 1, \dots, r,$$

donde  $\varphi^{-1}(i) = \{j: j \in \{1, \dots, t\}, \varphi(j) = i\}$  es la preimagen completa del elemento  $i$  en la aplicación  $\varphi$ .

Dicho de otro modo, la partición  $(k_1, \dots, k_t)$  se encaja en la partición  $(n_1, \dots, n_r)$ , si las partes  $k_i$  de la partición  $(k_1, \dots, k_t)$  pueden ser agrupadas en  $r$  grupos (cada parte  $k_i$  integra un solo grupo y los grupos vacíos se admiten) de un modo tal que, siendo sumadas todas las partes  $k_i$ , en cada grupo habrá  $r$  números  $p_i \leq n_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Si la partición  $(k_1, \dots, k_t)$  se encaja en la partición  $(n_1, \dots, n_r)$ , se escribirá este hecho empleando las designaciones para la inclusión de los conjuntos:  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$ .

Por ejemplo,  $(2,2,2) \subseteq (4,2)$ , puesto que  $(4,2) = (2+2, 2)$ , pero  $(2,2,2) \not\subseteq (3,3)$ .

6.84. Compruébese que la relación binaria de encajamiento es una relación de orden parcial.

Introduzcamos algunas designaciones.  $P$  es un conjunto de todas las particiones de todos los números naturales;  $P(n)$  es un conjunto de todas las particiones del número  $n$ ;  $P_r$  es un conjunto de todas las particiones de rango  $r$ ;  $P_r(n)$  es un conjunto de todas las particiones de rango  $r$  del número  $n$ , de modo que  $P_r(n) = P(n) \cap P_r$ .

6.85. Lema del cambio. Si  $k_i = n_j$ , entonces  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_r) \Leftrightarrow (k_1, \dots, k_i, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_j, \dots, n_r)$ , donde la virgulilla sobre el elemento de la sucesión quiere decir que éste está ausente en dicha sucesión.

6.86. Una partición  $(k^t)$  se encaja en la partición  $(n_1, \dots, n_r)$  cuando y sólo cuando se verifica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^t [n_i/k] \geq t.$$

Inténtese examinar una cuestión dual: ¿cuándo la partición  $(k_1, \dots, k_t)$  se encaja en la partición  $(n^r)$ ?

6.87. Sea  $n_a(k, t, r)$  el  $n$  máximo, para el cual ninguna partición del número  $k$  en  $t$  partes se encaja en ninguna partición del número  $n$  en  $r$  partes. Entonces

$$n_a(k, t, r) = \max\{k-1, k-1-t+r\}.$$

6.88. Si  $n_b(k, t, r)$  es el  $n$  mínimo, para el cual  $\forall p \in P_r(n) \forall q \in P_t(k) p \not\subseteq q$ , entonces  $n_b(k, t, r) = \max\{k+1, k+1-t+r\}$ .

6.89. Sea  $n_c(q_1, \dots, q_t; r)$  el  $n$  mínimo, para el cual ninguna partición de  $n$  en  $r$  partes se encaja en la partición  $(q_1, \dots, q_t)$ ,  $q_1 \geq \dots \geq q_t$ . Entonces

$$n_c(q_1, \dots, q_t; r) = 1 + \sum_{i=1}^{\min(r, t)} q_i.$$

6.90. Si  $q \in P_t(k)$  y  $n_d(q; r)$  es el  $n$  máximo, para el cual la partición del número  $q$  no se encaja en ninguna partición del número  $n$  en  $r$  partes, entonces  $n_d(q; r) = \max\{k-1, k-1-t+r\}$ .

6.91. Si  $n_e(k, t, r)$  es el  $n$  mínimo, para el cual  $\forall p \in P_r(n) \forall q \in P_t(k) q \subset p$ , entonces  $n_e(k, t, r) = \max\{k, r(k-t) + 1\}$ .

6.92. Si  $n_f(k, t, r)$  es el  $n$  máximo, para el cual  $\forall p \in P_r(n) \forall q \in P_t(k)$ ,  $p \subset q$ , entonces  $n_f(k, t, r) = \min\{k, \lfloor k/t \rfloor \times [t+r-1]\}$ .

6.93. Principio de alojamiento completo. Sean  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_t$ ,  $r$  unos números naturales y sea  $n(k_1, \dots, k_t; r)$  el  $n$  mínimo, para el cual la partición  $(k_1, \dots, k_t) \vdash k$  se encaja en cada partición de este  $n$  en un número de partes que no sea superior a  $r$ . Entonces

$$n(k_1, \dots, k_t; r) = \max_{1 \leq i \leq t} (\sum_{j=1}^i k_j + (k_i - 1)(r-1)).$$

El principio puede formularse también en la forma dual, a saber, como fórmula para  $r$  máximo con  $n$  fijo.

6.94. Si para los números naturales  $k_1 > 1, k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_t, (k_1, \dots, k_t) \mid -k \leq n$ , por  $r(k_1, \dots, k_t; n)$  está designado el  $r$  máximo, para el cual en cada partición  $n$  en  $r$  partes se encaja la partición  $(k_1, \dots, k_t)$ , entonces

$$r(k_1, \dots, k_t; n) = \min_{i: k_i > 1} \left[ \frac{n - \sum_{j=1}^i k_j}{k_i - 1} \right] + 1.$$

6.95. Hállese la magnitud  $m(n, H_h)$  (véase el problema 6.13) para un grafo no vacío  $H_h$ , que consta de  $t$  componentes conexos, respecto de  $k_i$  vértices en el  $i$ -ésimo componente conexo, con la particularidad de que  $k_1 \geq \dots \geq k_t \geq 1, k_1 + \dots + k_t = h$ .

6.96. Compruébese que

$$\begin{aligned} \max_{(h_1, \dots, h_t) \mid -h} n(k_1, \dots, k_t; r) &= \max(k, r(k-t) + 1) = \\ &= n((k-t+1, 1^{t-1}); r). \end{aligned}$$

6.97. (?) Calcúlese, para  $n_1, \dots, n_r, t$  dados,  $k(n_1, \dots, n_r; t)$ , esto es, el  $k$  máximo para el cual  $\forall (k_1, \dots, k_t) \mid -k$  se cumple la capacidad de encaje  $(k_1, \dots, k_t) \subset (n_1, \dots, n_r)$ .

La magnitud  $n(k_1, \dots, k_t, r)$  se denominará frontera, y la función  $\max_{1 \leq i \leq t} (\sum_{j=1}^i x_j + (x_i - 1) \cdot (r - 1))$ , función de alojamiento completo, designándola con  $f(x_1, \dots, x_t; r)$  o bien con  $f(X)$ , cuando el valor de  $r$  es evidente del contexto.

6.98. Compruébense las siguientes propiedades de la función de alojamiento completo:

Si  $X$  e  $Y$  son dos vectores reales de igual dimensión, entonces  $f(X + Y; r) \leq f(X; r) + f(Y; r) + r - 1$ .

Si  $l$  es un número natural, se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(lk_1, \dots, lk_t; r) &= lf(k_1, \dots, k_t; r) + (r-1)(l-1), \\ f((k_1^l, \dots, k_t^l); rl - l + 1) &= lf(k_1, \dots, k_t; r), \\ f((k_1^l, \dots, k_t^l); r) &= lf(k_1, \dots, k_t; 1 + (r-1)/l). \end{aligned}$$

Analícese la validez de estas mismas igualdades también para la frontera del alojamiento completo.

Sea  $X = (x_1, \dots, x_t) \in R^t$ , entonces

$$\text{si } \sum_{i=1}^t x_i = p \geq 0 \text{ y } f(X; r) = \sum_{j=1}^t x_j + (x_t - 1)(r - 1),$$

entonces  $x_t \geq 0$ ;

si  $x_t \geq \dots \geq x_l > 0 > x_i, i = l+1, \dots, t \geq l \geq i$  y si  $S_t$  es un grupo simétrico de todas las permutaciones del conjunto  $[t] = \{1, 2, \dots, t\}$ , entonces

$$\max_{s \in S_t} f(x_{s(1)}, \dots, x_{s(t)}; r) = \sum_{j=1}^t x_j + (x_1 - 1)(r - 1);$$

si, en este caso,  $\sum_{i=1}^l x_i \geq 0$ , entonces

$$\min_{s \in S_l} f(x_{s(1)}, \dots, x_{s(l)}; r) = \sum_{j=1}^l x_j + f(x_1, \dots, x_l; r).$$

Si  $\sum_{i=1}^l x_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^l |x_i| = d$ , entonces

$$\max_x f(X; r) = 1 - r + dr/2, \quad \min_x f(X; r) = \frac{d(r-1)^{l-1}}{r^{l-1} - (r-1)^{l-1}} - r + 1.$$

Si  $\sum_{i=1}^l x_i = p \in R^1$  y  $1 \leq r \in R^1$ , entonces

$$\min_x f(X; r) = \frac{pr^l}{r^l - (r-1)^l} - r + 1.$$

6.99. La partición  $(k_1, \dots, k_l)$  se encaja en cualquier partición de  $P_r(n)$  cuando y sólo cuando la partición  $(lk_1, \dots, lk_l)$  se encaja en cualquier partición de  $P_r(nl + (r-1)(l-1))$ .

6.100. La partición  $(k_1, \dots, k_l)$  se encaja en cualquier partición de  $P_r(n)$  cuando y sólo cuando la partición  $(k_1^l, \dots, k_l^l)$  se encaja en cualquier partición de  $P_{r-l+1}(nl)$ .

6.101. Si la partición  $(k_1, \dots, k_l)$  se encaja en cualquier partición de  $P_r(n)$ , entonces la partición  $(k_1^l, \dots, k_l^l)$  se encaja en cualquier partición de  $P_r(nl + (r-1)(l-1))$ .

6.102. Si para  $r, l, n_1, \dots, n_r, k_1 \geq \dots \geq k_l$  naturales se verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} \max_{l, k_i} \{ \sum_{i=1}^l l |n_i/l| + (r-1)(l-1) \} &\geq \\ &\geq \max_{l \leq i \leq r} \{ \sum_{j=1}^l k_j + (r-1)(k_i - 1) \}, \end{aligned}$$

entonces la partición  $(k_1, \dots, k_l)$  se encaja en la partición  $(n_1, \dots, n_r)$ .

6.103. Si  $p(k_1, \dots, k_l; r)$  es un  $p$  mínimo, para el cual  $(k_1, \dots, k_l, r) \subset (p^r)$ , entonces

$$p(k_1, \dots, k_l; r) \leq ]n(k_1, \dots, k_l; r)/r[.$$

6.104. Si  $M(k, t, r)$  es un  $M$  máximo, para el cual  $\forall q \in P_t(k) \exists \exists p \in P_r(M)$  es tal que  $p \supset q$ , entonces para  $r$  suficientemente grande

$$M(k, t, r) = ([k/[k/t]] + r - 1) ]k/t[ - r.$$

6.105. Si  $N(k, t, r)$  es un  $N$  mínimo, para el cual  $\forall p \in P_r(N) \exists \exists q \in P_t(k)$  es tal que  $p \subset q$ , entonces

$$N(k, t, r) = k + ([k/t] - 1) \max \{0, r - t\}.$$

6.106. Cualquiera que sea el alojamiento de  $n$  partículas indistinguibles en  $r$  células indistinguibles, existe  $t$  grupos de partículas  $[(n+r-1)/(t+r-1)]$  partículas en cada grupo) situadas íntegramente en las células.

6.107. Si  $k = n(k_1, \dots, k_t; r)$ , entonces cada alojamiento de  $k$  partículas en  $r$  células se realiza mediante el alojamiento de  $l$  grupos de partículas en  $k_j$  partículas en el  $j$ -ésimo grupo ( $j = 1, 2, \dots, l$ ), a condición de que cada grupo se dispone íntegramente en una célula.

6.108. Sean  $n_2, \dots, n_r, k_1 \geq \dots \geq k_t, r$  unos números naturales y supongamos que  $n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r)$  representa el  $n$  mínimo, para el cual cada partición  $(p_1, \dots, p_r)$  de este  $n$  en  $r$  partes es tal que  $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$ , posee la propiedad de que  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (p_1, \dots, p_r)$ . Entonces

$$\begin{aligned} n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r) &= \\ &= \max_{1 \leq i \leq t} \left( \sum_{j=1}^i k_j + \sum_{l=2}^r \min(n_l, k_i - 1) \right). \end{aligned}$$

6.109. Si  $\sum_{i=1}^r n_i \geq n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r)$ , entonces  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$ .

Si  $n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r) > \sum_{i=1}^r n_i \geq \max_{2 \leq j \leq r} n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_r)$ , entonces  $(k_1, \dots, k_t) \not\subseteq (n_1, \dots, n_r)$ .

6.110. La función  $n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r)$  no es sólo semejante a la función  $n(k_1, \dots, k_t; r)$ , sino que a veces se expresa en términos de la última. Demuéstrase la siguiente igualdad

$$n(k_1, \dots, k_t; (m^{r-t})) = \sum_{j=1}^t k_j + n(m+1, k_{t+1}, \dots, k_t; r) - m - 1, \text{ donde } k_{t+1} \leq m < k_t.$$

6.111. Estímese el valor mínimo posible de la frontera de encajamiento completo:

$$m(k, t, r) = \min_{(k_1, \dots, k_t) \vdash k} n(k_1, \dots, k_t; r).$$

Si  $k \equiv 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$ , entonces

$$m(k, t, r) = \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1,$$

y este valor se alcanza en la partición

$$\left( \frac{kr^{t-i}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t} \right) \quad 1 \leq i \leq t.$$

Si  $k \not\equiv 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$ , entonces

$$\frac{kr^t - r + 1}{r^t - (r-1)^t} \geq m(k, t, r) \geq \frac{kr^t + r - 1}{r^t - (r-1)^t} - r + 1.$$

6.112. La magnitud  $m(k, t, r)$  es el  $C$  entero mínimo, con el cual para un vector  $y_i = [(C + r - 1 - \sum_{j=1}^{i-1} y_j)/r], i = 1, 2, \dots, t$ , definido de un modo recurrente, se verifica la igualdad  $\sum_{j=1}^t y_j = k$ .

Sea  $t(k, r)$  un  $t$  mínimo, para el cual existe una partición del número  $k$  en  $t$  partes, que se encaja en todas las particiones de este  $k$  en  $r$  partes.

6.113. La magnitud  $t(k, r)$  es el  $t$  entero mínimo, con el cual para un vector  $y_i = [(k+r-1 - \sum_{j=1}^{i-1} y_j)/r]$ ,  $i=1, 2, \dots, t$ , definido de un modo recurrente, se verifica la igualdad  $\sum_{j=1}^t y_j = k$ .

6.114. Hay  $l$  balanzas de palanca de brazos iguales con dos platillos y un sistema unificado de  $t$  pesas cuyas masas son  $k_1 \geq \dots \geq k_t$ . Es necesario asegurar el pesaje simultáneo de  $l$  cargas en estas  $l$  balanzas, es decir, una pesa colocada en una balanza ya no puede estar colocada en las otras. El peso sumario de las cargas que se pesan nunca es superior al peso sumario de las pesas. ¿Qué condiciones son las que debe satisfacer el sistema de pesas  $k_1, \dots, k_t$  para asegurar tal peso simultáneo y cuál es la cantidad mínima de pesas que bastan para operar?

### § 3. Constantes geométricas extremales

La temática de las constantes geométricas extremales incluye tanto el cálculo de las características numéricas extremales de los sistemas de vectores, como también la descripción espacial de los sistemas de vectores extremales con relación a cualesquiera propiedades. Esta temática que se remonta históricamente a la conocida disputa entre Newton y Gregory sobre el significado de un número de contacto en  $\mathbb{R}^3$ , representando un círculo amplio de cuestiones de la geometría métrica, ha ofrecido últimamente sus nuevas aplicaciones en los problemas no geométricos, continuos y discretos, y forma hoy día una temática individual. Las constantes representadas en este párrafo están destinadas a ilustrar precisamente muchos aspectos de la cuestión en consideración; en primer lugar esto se refiere a las constantes del tipo  $\delta$ , las cuales están directamente vinculadas con las constantes de empaque, los números de contacto y sus aplicaciones.

Sea  $X$  un espacio normado lineal sobre el campo de números reales; denotemos con  $\sigma_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  un sistema de  $n$  vectores, no forzosamente diferentes,  $x_i \in X$ , y supongamos que

$$(\sigma) = \sum_{x \in \sigma} x, \|\sigma\| = \|(\sigma)\| = \left\| \sum_{x \in \sigma} x \right\|.$$

La operación de elección de un subsistema de vectores  $\sigma_1 \subset \sigma_n$  se entiende como una elección de  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\} = \sigma_l$ , donde  $x_{i_j} \in \sigma_n$ , y  $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n$ , de suerte que siempre hay exactamente  $\binom{n}{l}$  posibilidades para tal elección.

6.115. Demuéstrase que

a) entre cualesquiera tres vectores unitarios (versores) del espacio de Hilbert siempre existen dos vectores cuya norma de la suma será no inferior a uno;

b) entre cualesquiera tres vectores unitarios de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores cuya norma de la suma será no inferior a  $2/3$ ;

c) entre cualesquiera tres vectores de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores cuya norma de la suma no será inferior a  $2/3$  respecto de la norma de la suma de todos los tres vectores;

d) entre cualesquiera tres vectores de un espacio lineal normado siempre existen dos vectores, cuya norma de la suma no será inferior a  $2/3$  de la norma del vector restante.

6.116. Sea  $A(k, l; X)$  el  $A$  máximo, para el cual  $\forall \sigma_h \subset X \exists \sigma_l \subset \sigma_h \|\sigma_l\| \geq A \|\sigma_h - \sigma_l\|$ . Calcúlese  $A(k, l; X)$ .

6.117. ¿Cuál es  $B = B(k, l, r; X)$  máximo, para el cual  $\forall \sigma_h \subset X \forall \sigma_r \subset \sigma_h \exists \sigma_l \subset \sigma_h \|\sigma_l\| \geq B \|\sigma_r\|$ ?

6.118. Calcúlese el  $\delta = \delta(l, k; X)$  máximo, para el cual  $\forall \sigma_h \subset X \exists \sigma_l \subset \sigma_h \|\sigma_l\| \geq \delta (\|\sigma_h\| \geq 1)$ .

6.119. Sean  $k \geq l \geq 1$  unos números naturales, y sean  $v_1, v_2, \dots, v_l, w_1, \dots, w_k$  los números reales. Supongamos que  $C(v_l, \bar{w}_k)$  es el  $C$  máximo, para el cual  $\forall \sigma_h \subset X \exists \sigma_l = \{x_i, \dots, x_{il}\} \subset \sigma_h$ :

$$\left\| \sum_{j=1}^l v_j x_j \right\| \geq C \left\| \sum_{i=1}^k w_i x_i \right\|.$$

Calcúlese  $C(v_l, \bar{w}_k)$ .

6.120. Sean  $k \geq l \geq 1$  unos números naturales y  $v_1, \dots, v_l$ , números reales, mientras que  $\sum_k$  es un simplejo de  $k$  vértices inscrito en la esfera unitaria del espacio  $R^{k-1}$ . Demuéstrase que si  $\{x_1, \dots, x_l\} \subset \sum_k$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^l v_i x_i \right| = \left( \frac{k \sum_{i=1}^l v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^l v_i \right)^2}{k-1} \right)^{1/2}.$$

6.121. Sean  $v_1, \dots, v_n$  unos números reales. Calcúlese la constante

$$\delta(\bar{v}_n, x) = \inf_{\substack{\sigma_n \subset X \\ \|\sigma_n\| \geq 1}} \max_{\pi} \left\| \sum_{i=1}^n v_{\pi(i)} x_i \right\|,$$

donde  $\pi$  es una permutación de los números  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

6.122. El sistema de vectores unitarios  $\sigma_n$  se denominará  $L$ -sistema (se escribe  $\sigma_n \sim L$ ), si  $\forall \sigma_p \subset \sigma_n \exists \sigma_q \subset \sigma_p \forall \sigma_k \subset \sigma_q \|\sigma_k\| = c \in R^+$ . Calcúlese o estímalese la constante

$$\Delta_c(n, p, q, k; X) = \sup_{\sigma_n \sim L} \|\sigma_n\|.$$

6.123. Sea  $T(n, k, l)$  un número combinatorio de Turán (véase el problema 6.46). Demuéstrase que en cualquier  $\sigma_n \subset X (\|\sigma_n\| \geq 1)$  existen al menos  $T(n, k, l)$  subsistemas  $\sigma_l \subset \sigma_n$  tales que  $\|\sigma_l\| \geq \delta(l, k; X)$ , donde  $\delta$  se toma del problema 6.118.



6.124. Calcúlese  $\delta(t, k; \mathbb{R}^2)$  (véase el problema 6.118).

6.125. Demuéstrese que la matriz de Hadamard de orden  $4n$  existe cuando y sólo cuando  $\delta(2, 4n; l_1^{4n-1}) = (4n - 2)/(4n - 1)$ .

6.126. Problema sobre el tornillo sin fin. En un plano se dispone la línea de longitud unitaria. ¿Cuán pequeña ha de ser el área de un campo con el que se pueda cubrir completamente cualquier configuración de dicha línea?

## ANÁLISIS COMBINATORIO

### SOBRE LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Los sistemas de conjuntos son el objetivo de los problemas de este capítulo. Estos sistemas, más complejos que los grafos e hipergrafos, son, precisamente, los conjuntos ordenados. Los propios problemas están destinados para dar a conocer las propiedades estructurales de los conjuntos ordenados y señalar los diferentes tipos de problemas combinatorios sobre los mismos.

#### § 1. Conjuntos parcialmente ordenados

Sea  $P$  un conjunto arbitrario no vacío. La relación binaria  $\leq$  sobre el conjunto  $P$  se denomina *relación de orden*, si

- 1)  $a \leq a$  para cualquier  $a \in P$  (reflexividad);
- 2) si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \leq c$  (transitividad);
- 3) si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , entonces  $a = b$  (antisimetría).

Un conjunto  $P$  se llama *parcialmente ordenado* y se denota  $(P, \leq)$ , si es no vacío y si está fijada en él una relación de orden  $\leq$ . Por supuesto, sobre un mismo conjunto se pueden fijar órdenes diferentes.

Los conjuntos parcialmente ordenados  $(P, \leq)$  y  $(Q, \leq)$  se denominan *isomorfos* y se designan por  $(P, \leq) \cong (Q, \leq)$ , si existe una aplicación biunívoca  $\varphi$  del conjunto  $P$  sobre el conjunto  $Q$  tal que  $a \leq b$  tiene lugar cuando y sólo cuando  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ . Notemos que la biunivocidad de la aplicación  $\varphi$  puede ser deducida de la última condición. Una aplicación  $\varphi: P \rightarrow Q$  se llama *isótona*, si  $a \leq b$  lleva consigo  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$  para todos los  $a, b \in P$ .

Un elemento  $M$  del conjunto parcialmente ordenado  $P$  se llama *máximo*, si en  $P$  no hay un elemento  $p$  que sea «mayor» que  $M$ , es decir,  $p \geq M$  no se cumple, cualquier que sea  $p \in P$  distinto de  $M$ ; por analogía, un elemento  $m$  se llama *mínimo*, si en  $P$  no hay un elemento  $p \in P$ , distinto de  $m$  y tal que  $p \leq m$ . Un elemento  $a \in P$  se denomina *maximal*, si  $\forall p \in P$   $p \geq a$ . Un elemento  $b \in P$  se llama *minimal*, si  $\forall p \in P$   $p \leq b$ . Para los elementos maximal y minimal se usan, a veces, las designaciones 1 y 0, respectivamente.

Un par de elementos  $p, q \in P$  se denomina *comparable*, si  $p \geq q$ , o  $p \leq q$ . Si en un conjunto parcialmente ordenado  $P$  es comparable

todo par de sus elementos,  $P$  se denominará *conjunto linealmente ordenado* o *cadena*. A diferencia de las cadenas se llama anticadena a todo conjunto parcialmente ordenado  $Q$  que sólo consta de elementos incomparables uno con otro.

El elemento  $a$  de un conjunto parcialmente ordenado  $P$  *cubre* el elemento  $b \in P$  (designación:  $b \prec a$ ), si  $b < a$  y no existe  $c \in P$  tal que  $b < c < a$ . Una cadena en el conjunto parcialmente ordenado se llama *saturada*, si dicha cadena no puede ser encajada en ninguna otra cadena distinta de ella misma. De un modo análogo se define la anticadena saturada. Por *cadena máxima* (anticadena máxima) se entiende una cadena (anticadena) máxima por el número de sus elementos.

El *diagrama de Hasse* de un conjunto parcialmente ordenado  $P$  es el grafo orientado, de cuyos vértices sirven los elementos de  $P$ , mientras que el arco  $(x, y)$  está presente cuando y sólo cuando  $x$  cubre  $y$ . En el grafo citado se acostumbra a expresar los arcos orientados hacia abajo. En tal representación se ponen de manifiesto de manera ilustrativa los niveles del diagrama de Hasse, es decir, del conjunto de elementos de un mismo rango, es decir, del conjunto de aquellos elementos que distan de los elementos mínimos en un camino de longitud igual.

7.1. Déense ejemplos de conjuntos con órdenes diferentes fijos sobre ellos.

7.2. Demuéstrese que existen exactamente dos conjuntos no isomorfos parcialmente ordenados que constan de dos elementos.

7.3. Indíquense todas las relaciones de orden no isomorfas sobre un conjunto de cinco elementos.

7.4. Dése la definición formal de relación de orden que se emplea para ordenar las palabras en los diccionarios (este orden se denomina lexicográfico).

7.5. Sea  $\leq$  una relación de orden sobre  $A$  y sea  $B$  un subconjunto del conjunto  $A$ . Para  $a, b \in B$  pongamos  $a \leq_B b$ , si  $a \leq b$ . Demuéstrese que la relación  $\leq_B$  es una relación de orden sobre el subconjunto  $B$  ( $(B, \leq_B)$ ) y lleva el nombre de subconjunto parcialmente ordenado del conjunto  $(A, \leq)$ .

7.6. Sea  $S$  una familia de todos los subconjuntos del conjunto  $\{a, b, c, d\}$ . Diremos que  $A \subseteq B$ , donde  $A, B \in S$ , si  $A$  es un subconjunto del conjunto  $B$ . Compruébese que  $\subseteq$  es una relación de orden. Dibújese el diagrama de Hasse y indíquense los elementos máximos y mínimos. Déense los ejemplos de cadenas (máximas) y de anticadenas en  $(S, \subseteq)$ .

7.7. Sea  $S$  un conjunto de todos los divisores enteros positivos del número 20, ordenados según la divisibilidad, es decir,  $a \leq b$  cuando y sólo cuando  $a \mid b$  ( $a$  divide  $b$ ). Compruébese que  $\leq$  es una relación de orden. Dibújese el diagrama de Hasse, indíquense los elementos máximos y mínimos. Déense los ejemplos de cadenas (máximas) y anticadenas en  $(S, \leq)$ .

7.8. Sea  $A$  un conjunto no vacío y sea  $P$  el conjunto de todas las

relaciones de orden sobre  $A$ . Para  $\rho, \sigma \in P$  pongamos  $\rho \leq \sigma$ , si  $a\rho b$  lleva consigo  $a\sigma b$  ( $a, b \in A$ ). Demuéstrase que  $(P, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado.

7.9. Muéstrase que el elemento maximal, si existe, es máximo y el minimal, mínimo.

7.10. ¿Será cierto que si el elemento máximo es único, es también maximal?

Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado con 0 y 1. Un elemento  $a$  de  $P$  se denomina *átomo*, si  $0 \prec a$ , y *coátomo*, si  $a \prec 1$ . Sea  $P(n)$  un conjunto de particiones de un número natural  $n$ , ordenado de una manera tal que si  $\lambda, \mu \in P(n)$ , entonces  $\lambda \leq \mu$  cuando y sólo cuando puede obtenerse la partición  $\mu$  sumando las partes separadas de la partición  $\lambda$ . Por ejemplo,  $3 + 1 + 1 = (1^2, 3)$ ,  $4 + 1 = (1, 4)$ ;  $3 + 2 = (2, 3)$  son las particiones del número 5; en este caso  $(1^2, 3) \leq (1, 4)$  y  $(1^2, 3) \leq (2, 3)$ , mientras que  $(1, 4)$  y  $(2, 3)$  son elementos incomparables en  $P(5)$ .

7.11. Sea  $P(n)$  un conjunto parcialmente ordenado de particiones de un número natural  $n$ . Dibújese el diagrama de Hasse para  $P(5)$ , indiquense todos los átomos y coátomos suyos. Hállese el número de elementos en  $P(n)$  para  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  y  $10$ .

7.12. Demuéstrase que los conjuntos a seguir son parcialmente ordenados:

a) el conjunto de toda la gente y  $a < b$  significa que  $a$  es un descendiente de  $b$ ;

b)  $A$  es un conjunto de todas las funciones reales definidas en el conjunto  $X$ , y  $f \leq g$ , donde  $f, g \in A$  cuando y sólo cuando  $f(x) \leq g(x)$  para cualquier  $x \in X$ ;

c)  $A$  es un conjunto de todas las funciones reales cóncavas continuas definidas en cierto intervalo de un conjunto de números reales, y  $f \leq g$  está definida del mismo modo que en b).

7.13. Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Definamos sobre el conjunto  $A$  una relación  $\rho$ , suponiendo  $a\rho b$ , si  $b \leq a$ . Compruébese que  $(A, \rho)$  es un conjunto parcialmente ordenado que se denomina *dual* respecto del conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$ .

Si  $a$  y  $b$  son elementos del conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$ , con la particularidad de que  $a \leq b$ , entonces el conjunto  $[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$  se llamará *intervalo*. El conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  se denomina *localmente finito*, si  $|[a, b]| < \infty$  para todos los  $a, b \in A$ .

7.14. Déense los ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados finitos y localmente finitos.

7.15. Demuéstrase que en todo conjunto finito parcialmente ordenado existen tanto elementos máximos, como mínimos.

7.16. Déense ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados:

a) sin 0; b) sin 1; c) sin 0 y sin 1.

7.17. Demuéstrase que un elemento que es mínimo y máximo simultáneamente no es comparable con ningún elemento distinto de él.

7.18. Sea  $\mathcal{S}(S)$  una familia de todos los subconjuntos del con-

junto  $S$ . Para  $A, B \in \mathcal{P}(S)$  pongamos  $A \subseteq B$ , si  $A$  es un subconjunto del conjunto  $B$ . Demuéstrase que  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  es un conjunto parcialmente ordenado llamado *booleano*. Hállense: 0, 1, conjuntos de átomos y coátomos del booleano. Representese el diagrama de Hasse del booleano en  $\mathcal{P}(S_n)$ , si  $|S_n| = n$ . ¿Será el booleano  $\mathcal{P}(S)$  un conjunto localmente finito, si  $S$  es un conjunto infinito?

Se denomina *longitud*  $l(C)$  de una *cadena finita*  $C$  a un número igual a  $|C| - 1$ . Suele decirse que un conjunto parcialmente ordenado  $P$  es de *longitud*  $n$ , si en  $P$  existe una cadena de longitud  $n$  y todas las demás cadenas en  $P$  tienen longitud no superior a  $n$ . Diremos que la *anchura del conjunto parcialmente ordenado*  $P$  es igual a  $n$ , si en  $P$  existe una anticadena compuesta de  $n$  elementos, mientras que todas las anticadenas restantes de  $P$  contienen no más de  $n$  elementos. Es evidente que la longitud del conjunto parcialmente ordenado  $P$  es igual a  $|P| - 1$ , y la anchura, a 1.

7.19. Sea  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$  una anticadena arbitraria en el booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ . Demuéstrase la *desigualdad de Yamamoto—Lubel—Meshalkin*:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1.$$

7.20. Demuéstrase el teorema de Sperner: la anchura del booleano  $\mathcal{P}(S_n)$  es igual a  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ , donde  $\lfloor x \rfloor$  es la parte entera de  $x$ .

7.21. Demuéstrase que toda cadena de longitud  $n$  es isomorfa al subconjunto  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  de números enteros ordenados de un modo corriente.

Se denomina *producto directo*  $P \times Q$  de los conjuntos parcialmente ordenados  $P$  y  $Q$  a un conjunto de todos los pares del tipo  $(x, y)$ , donde  $x \in P, y \in Q$ , con la particularidad de que  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$  en  $P \times Q$  cuando y sólo cuando  $x_1 \leq x_2$  en  $P$  e  $y_1 \leq y_2$  en  $Q$ .

7.22. Demuéstrase que el booleano  $\mathcal{P}(S_n)$  es isomorfo a un producto cartesiano de  $n$  cadenas, donde la longitud de cada cadena es igual a 2.

7.23. Compruébese que la unión de una sucesión creciente de cadenas encajadas una en otra de cierto conjunto parcialmente ordenado es una cadena.

7.24. Si  $\varphi$  es un isomorfismo y  $a$ , un elemento maximal (minimal, máximo, mínimo, respectivamente), entonces  $\varphi(a)$  será también un elemento maximal (minimal, máximo, mínimo, respectivamente). Constrúyanse los ejemplos que muestran lo ilícito de la afirmación para una aplicación isótona arbitraria.

7.25. ¿Cómo se pueden ordenar los vértices de un cubo unitario  $n$ -dimensional, para que los mismos, junto con dicha ordenación, sean isomorfos al booleano  $\mathcal{P}(S)$ ? ¿Será única tal ordenación?

7.26. Sea  $\mathcal{D}(n)$  un conjunto de todos los divisores enteros no negativos de un número natural  $n$  ordenados según la divisibilidad  $|$ . Compruébese que  $(\mathcal{D}(n), |)$  es un conjunto parcialmente ordenado, hállese sus 0 y 1 y los conjuntos de átomos y coátomos. Dibújese su diagrama de Hasse.

7.27. Sea  $(B(S_n), \subset)$  un belliano, es decir, un conjunto de todas las particiones de Bell (particiones no ordenadas tanto en el interior de los bloques, como también en los propios bloques) del conjunto  $S_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ , ordenadas por la unión de los bloques: para las particiones  $\pi_1, \pi_2 \in B(S_n)$  pongamos  $\pi_1 \subset \pi_2$  cuando y sólo cuando cualquier bloque de  $\pi_1$  está contenido en cierto bloque de  $\pi_2$ . Compruébese que  $(B(S_n), \subset)$  es un conjunto parcialmente ordenado, hállese su 0 y 1 y describáanse los niveles de su diagrama de Hasse.

7.28. Sea  $(P(n), \leq)$  un conjunto de particiones del número  $n$  en sumandos naturales ordenados de un modo tal que si  $p_1, p_2 \in (P(n), \leq)$ , entonces  $p_1 \leq p_2$  cuando y sólo cuando se puede obtener  $p_2$  sumando las partes separadas de la partición  $p_1$ . Compruébese que dicho conjunto es parcialmente ordenado, describáanse los niveles de su diagrama de Hasse.

7.29. Sea  $(V_n(q), \subset)$  un conjunto de todos los subespacios del espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V_n$  sobre un campo finito con  $q$  elementos, ordenado por inclusión. Demuéstrese que este conjunto es parcialmente ordenado y describábase su diagrama de Hasse.

7.30. Sea  $(\Pi_n, \subset)$  un conjunto de todas las aristas de un poliedro  $\Pi_n$ , ordenado por inclusión. Demuéstrese que este conjunto es parcialmente ordenado y describábase su diagrama de Hasse.

7.31. ¿Cómo están ligados entre sí los conjuntos  $(B(S_n), \subset)$  y  $(P(n), \leq)$ ?

7.32. Sea  $\mathcal{D}(n)$  un conjunto de todos los divisores naturales de un número natural  $n$ , ordenado según la divisibilidad  $|$ , y  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ , donde  $p_i$  son diferentes números primos y  $\alpha_i$ , los números naturales. Demuéstrese que

$$\mathcal{D}(n) \cong \mathcal{D}(p_1^{\alpha_1}) \times \mathcal{D}(p_2^{\alpha_2}) \times \dots \times \mathcal{D}(p_s^{\alpha_s}).$$

7.33. Sea  $(A, \leq)$  uno de los conjuntos parcialmente ordenados citados en los problemas 7.18 y 7.26—7.30, y sea,  $(A, \leq)_k$  un conjunto de todos los elementos del  $k$ -ésimo nivel de su diagrama de Hasse. Dése la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos elementos distintos hay en  $(A, \leq)$ ?

b) ¿Cuántos elementos de nivel dado hay en  $(A, \leq)$ ?

c) ¿Cuál es el número de cadenas máximas entre el cero y la unidad en el conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$ ?

d) ¿Cuál es el número de cadenas máximas entre el cero y la unidad que pasan por un elemento fijo  $a \in (A, \leq)$ ?

e) ¿Cuál es la anchura del conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$ ?

7.34. Sea  $(A, <)$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Demuéstrase que los elementos de  $A$  pueden enumerarse del modo siguiente:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , de suerte que de  $a_i < a_j$  se desprenderá  $i < j$ .

Una cadena, en la cual cada subconjunto no vacío posee un elemento mínimo lleva el nombre de conjunto *bien ordenado*. El conjunto bien ordenado lo constituye cada cadena finita.

7.35. Dése un ejemplo de conjunto que no está bien ordenado.

7.36. Demuéstrase que si una cadena  $C$  y una cadena dual respecto de  $C$  en un conjunto dual parcialmente ordenado están bien ordenadas, entonces  $C$  contiene un número finito de elementos.

Se dice que un conjunto parcialmente ordenado  $P$  satisface la condición de mínimo (de máximo, respectivamente), siempre que cada subconjunto no vacío de  $P$  sea un conjunto parcialmente ordenado que contiene elementos mínimos (máximos, respectivamente).

7.37. ¿Satisface cualquier conjunto bien ordenado  $P$  la condición del mínimo? ¿Qué puede decirse sobre el cumplimiento de la condición de máximo en  $P$  y en un conjunto  $P^*$ , dual respecto a  $P$ ?

Un conjunto parcialmente ordenado  $P$  satisface la *condición de rotura de las cadenas decrecientes* (condición de rotura de las cadenas crecientes, respectivamente), si para una sucesión numerable arbitraria  $\{a_n | n = 1, 2, \dots\}$  de elementos de  $P$  tal que  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  ( $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ ), respectivamente existe un número  $k$  tal que  $a_n = a_k$  para cualquier  $n \geq k$ .

7.38. Demuéstrase que en un conjunto parcialmente ordenado  $P$  la condición de mínimo es equivalente a la de rotura de las cadenas decrecientes. ¿Será cierto que la condición de máximo es equivalente a la condición de rotura de las cadenas crecientes?

7.39. Demuéstrase que si un conjunto parcialmente ordenado no contiene ni cadenas infinitas ni anticadenas infinitas, es finito.

7.40. Demuéstrase que un conjunto finito satisface las condiciones de mínimo y de máximo.

7.41. Demuéstrase que si una cadena no es bien ordenada, contiene una subcadena dual respecto de una serie natural.

7.42. Demuéstrase que un conjunto parcialmente ordenado localmente finito satisface la condición de mínimo.

7.43. Demuéstrase el *teorema de Dilworth*: el número mínimo de cadenas disjuntas que contienen todos los elementos de un conjunto finito parcialmente ordenado  $P$  es igual a la anchura de  $P$ .

7.44. Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Demuéstrase que el número máximo de elementos en la cadena de  $P$  es igual al número mínimo de anticadenas disjuntas, que contienen todos los elementos del conjunto  $P$ .

7.45. Sea  $G(V, E)$  un grafo orientado sin contornos. Diremos

que  $a$  es superior a  $b$ , donde  $a, b \in V$ , si en  $G$  existe una cadena orientada desde  $a$  hacia  $b$ . Formúlese el teorema de Dilworth en términos del grafo orientado sin contornos.

El teorema de Dilworth, demostrado en 1950, cuenta con un amplio dominio de aplicación. Es equivalente <sup>1)</sup> a los teoremas fundamentales del análisis combinatorio tales como, por ejemplo, el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos (véase el cap. III, § 2), los teoremas de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, los teoremas de tipo de Menger, König y otros que ocupan el lugar central en la matemática combinatoria.

Se denomina red a un grafo conexo orientado  $G(V, E)$  con el conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de arcos  $E$ , en el cual a todo arco  $(x, y) \in E$  se le ha puesto en correspondencia un número no negativo  $c(x, y)$  llamado *capacidad del arco*  $(x, y)$ . Sean  $s, t$  dos vértices distintos de  $G$ ,  $\Gamma(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$  y  $\Gamma^{-1}(x) = \{y \in V \mid (y, x) \in E\}$ . Se denomina *flujo estacionario de la magnitud  $v$*  de  $s$  a  $t$  la función real  $f$  que está definida sobre el conjunto de arcos  $E$  y que satisface las siguientes correlaciones

$$\sum_{y \in \Gamma(x)} f(x, y) - \sum_{y \in \Gamma^{-1}(x)} f(y, x) = \begin{cases} v, & \text{si } x = s; \\ 0, & \text{si } x \neq s, t; \\ -v, & \text{si } x = t; \end{cases} \quad (7.1)$$

$$0 \leq f(x, y) \leq c(x, y) \text{ para todos los } (x, y) \in E. \quad (7.2)$$

En este caso el vértice  $s$  se llama *fuentes* y  $t$ , salida (vertedero). En el problema sobre el flujo máximo entre dos vértices se requiere construir un flujo estacionario desde el vértice  $s$  al vértice  $t$ , que tenga la magnitud máxima posible  $v$ . Sea  $X$  un subconjunto de vértices de la red  $G$  tal que  $s \in X$ ,  $t \notin X$ . En este caso el conjunto de todos los arcos  $(x, y) \in E$  tales que  $x \in X$ ,  $y \notin X$ , se llama *corte* de la red  $G$  y se designa  $(X, \bar{X})$ . La capacidad del corte se llama magnitud

$$\sum_{x \in X, y \notin X} c(x, y).$$

Resulta válido el siguiente teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo y corte mínimo; la magnitud máxima de un flujo en una red arbitraria es igual a la capacidad mínima de sus cortes.

Si la función de la capacidad de los arcos se expresa en números enteros, existe un flujo máximo que también se mide en números enteros (*teorema sobre el flujo* en números enteros).

Muchos problemas de la optimización discreta se reducen al problema sobre el flujo máximo entre dos vértices.

En la fig. 7.1 está representada una red, en la cual el primer número en el arco es igual a la capacidad de éste, y el segundo, al valor

<sup>1)</sup> Es decir, puede obtenerse directamente de la validez de cada uno de los teoremas citados más abajo, y viceversa, cada uno de estos últimos se deduce, a su vez, directamente del teorema de Dilworth.



de la función del flujo  $f$ . Con líneas s punteadas están designados dos cortes cuyas capacidades son iguales a 4. El valor del flujo en esta red es igual a 4 y este flujo es máximo.

Se denomina *sistema de representantes distintos* (o transversal) de una familia de subconjuntos  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  del conjunto  $X$  a tal sistema de elementos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que  $x_i \in X_i$ , y  $x_i \neq x_j$  para cualesquiera  $i \neq j$ .

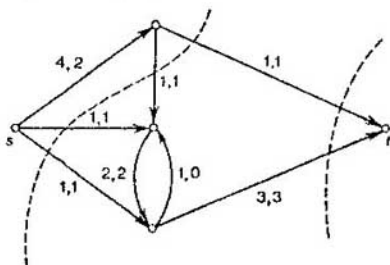


Fig. 7.1.

TEOREMA DE P. HALL SOBRE EL SISTEMA DE REPRESENTANTES DISTINTOS: para una familia arbitraria de subconjuntos  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  del conjunto  $X$  una transversal existe cuando y sólo cuando para cualesquiera  $i_1, i_2, \dots, i_n$  tales que  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n$ ,  $1 \leq k \leq n$ , se verifica la desigualdad  $|X_{i_1} \cup \dots \cup X_{i_k}| \geq k$ .

Se denomina *combinación de pares* en el grafo  $G(V, E)$  un subconjunto de sus aristas  $M$ ,  $M \subseteq E$ , dos cualesquiera de las cuales no

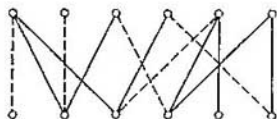


Fig. 7.2.

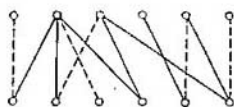


Fig. 7.3.

tienen vértices comunes. Dicho de otro modo, una combinación de pares es una familia de aristas no adyacentes de dos en dos. Un *grafo bipartido*, es el grafo  $G(V, E)$ , en el cual el conjunto de vértices  $V$  puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos  $S$  y  $T$  (es decir,  $V = S \cup T$ ,  $S \cap T = \emptyset$ ) de un modo tal que cada arista une cierto vértice de  $S$  con un vértice de  $T$ . En las figs. 7.2 y 7.3 se muestran los grafos bipartidos, en los cuales las aristas de las combinaciones de pares se expresan mediante líneas punteadas. El conjunto de vértices del grafo  $G(V, E)$  lleva el nombre de *conjunto de vértices (A, B)-separador*, donde  $A, B \subseteq V$  y  $A \cap B = \emptyset$ , si la supresión en el grafo de dichos

vértices junto con las aristas incidentes a ellos (o arcos) rompe todas las cadenas que van de los vértices del conjunto  $A$  a los vértices del conjunto  $B$ . Análogamente, se denomina conjunto de aristas (o de arcos)  $(A, B)$ -separador a tal familia de aristas (arcos) del grafo  $G(V, E)$ , cuya supresión de  $G$  rompe todas las cadenas que van de los vértices del conjunto  $A$  a los del conjunto  $B$ . Supongamos que en

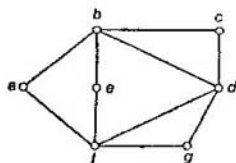


Fig. 7.4.

el grafo representado en la fig. 7.4  $A = \{a, b\}$  y  $B = \{c, g\}$ . Entonces  $\{f, b, d\}$  es un conjunto de vértices  $(A, B)$ -separador, y  $\{(a, f); (b, e); (b, d); (b, c)\}$ , un conjunto de aristas  $(A, B)$ -separador.

**TEOREMA DE KONIG:** el número máximo de aristas de una combinación de pares en un grafo bipartido arbitrario  $G(S \cup T, E)$  es igual a la potencia mínima del conjunto de vértices  $(S, T)$ -separador del grafo  $G$ .

**TEOREMA DE MENGER:** sean  $s$  y  $t$  dos vértices de un grafo orientado  $G$ . Entonces el número máximo de caminos que no se intersecan en los arcos de  $s$  a  $t$  en  $G$ , es igual a la potencia mínima del conjunto de arcos  $(s, t)$ -separador del grafo  $G$ .

7.46. Demuéstrese el análogo matricial del teorema de Konig: el número mínimo de filas y columnas de una matriz que contienen todos los elementos no nulos, es igual al número mínimo de dichos elementos no dispuestos de dos en dos en una misma fila o en una misma columna.

7.47. Demuéstrese el análogo de vértice del teorema de Menger: sean  $s$  y  $t$  dos vértices no adyacentes en un grafo orientado  $G$ . Entonces, la potencia mínima del conjunto de vértices  $(s, t)$ -separador en el grafo  $G$  es igual al número máximo de caminos de  $s$  a  $t$ , que no tienen vértices comunes.

7.48. Demuéstrese que las afirmaciones del teorema de Menger y de su análogo concerniente a los vértices (problema 7.47) son válidas también para los grafos no orientados.

7.49. Demuéstrese una variante más del análogo de vértices del teorema de Menger: sea  $G(V, E)$  un grafo (orientado) y sea  $S, T \subseteq V$ . Entonces la potencia mínima del conjunto de vértices  $(S, T)$ -separador es igual al número máximo de cadenas que van de los vértices del conjunto  $S$  a los vértices del conjunto  $T$  y que no tienen vértices comunes.

7.50. Dedúzcase el teorema de Konig:

- del teorema de Dilworth;
- del teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y de corte mínimo;
- del teorema de Menger;
- del teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos.

7.51. Demuéstrese, basándose en el teorema de Konig, la validez:

- a) del teorema de Dilworth;
- b) del teorema de Menger;
- c) del teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos.

7.52. Dedúzcase el teorema de Menger a partir del teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo.

7.53. Dedúzcase el teorema de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo a partir del teorema de Menger.

Todas las implicaciones, establecidas en los problemas 7.50—7.53, entre los teoremas principales de mini—máx del análisis combinatorio están reducidas a un grafo orientado expresado en la fig. 7.5; en dicho grafo los vértices corresponden a los teoremas y el arco

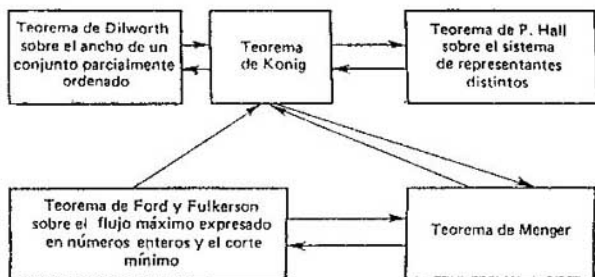


Fig. 7.5.

( $A, B$ ) está presente en el grafo mencionado cuando y sólo cuando el teorema  $B$  ha sido obtenido directamente del teorema  $A$ . Cabe indicar que al haber resuelto todos los problemas 7.50—7.53, el lector mismo establecerá el hecho de equivalencia de los teoremas de Ford y Fulkerson sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, de Dilworth sobre el ancho de un conjunto parcialmente ordenado, de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos, de Menger sobre la separación de las aristas y vértices y de Konig sobre la combinación máxima de pares en un grafo bipartido.

Representa interés el problema de hallar (demostrar) todas las implicaciones entre los teoremas del análisis combinatorio mencionados más arriba. Proponemos que el mismo lector halle todas las implicaciones que faltan, es decir, resuelva el siguiente problema:

7.54. Demuéstranse todas las implicaciones necesarias para que el grafo representado en la fig. 7.5 se haga grafo orientado completo sin bucles (lazos).

## § 2. Retículos

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto arbitrario parcialmente ordenado y  $B$  su subconjunto no vacío. El elemento  $a \in A$  se llama *cota superior exacta* (*supremo*) del conjunto  $B$ , si  $a \geq b$  para todos los  $b \in B$  y si de la validez de la relación  $v \geq b$  para todo  $b \in B$  se deduce que  $v \geq a$ . De un modo dual se define la *cota inferior exacta* (*infimo*) del conjunto  $B$ : el elemento  $a \in A$  se denomina cota inferior exacta, si  $a \leq b$  para todo  $b \in B$  y si de la condición  $u \leq b$  para cualquier  $b \in B$  se deduce que  $u \leq a$ . Las cotas exactas superior e inferior del conjunto  $B$  en  $(A, \leq)$  se designarán por los símbolos  $\sup_{\Lambda} B$  e  $\inf_{\Lambda} B$ , respectivamente. Un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  se denomina *retículo* (o *estructura*), si para todos los  $a, b \in A$  existen  $\sup\{a, b\}$  y  $\inf\{a, b\}$ . En los retículos se emplearán también las designaciones  $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ ,  $a \vee b = \sup\{a, b\}$ ; llamaremos  $\wedge$  intersección,  $\vee$ , unión.

7.55. Sea  $A \subseteq \mathcal{P}(S)$ . Demuéstrase que  $\sup A$  coincide con la unión de los subconjuntos que integran  $A$ , mientras que  $\inf A$ , con su intersección.

7.56. Sea  $A \subseteq B \subseteq P$  y supongamos que existen  $\sup A$  y  $\sup B$  ( $\inf A$  y  $\inf B$ ). Demuéstrase que  $\sup A \leq \sup B$  ( $\inf A \geq \inf B$ ).

7.57. Demuéstrase que si  $a \leq b$ , entonces  $\sup\{a, b\} = b$  e  $\inf\{a, b\} = a$ .

7.58. Sea  $\{A_{\alpha}\}$  cierta totalidad de subconjuntos del conjunto parcialmente ordenado  $P$ ,  $A = \bigcup A_{\alpha}$ , y supongamos que existen  $\sup A$  y  $\sup A_{\alpha}$  ( $\inf A$  y  $\inf A_{\alpha}$ ) para todo  $\alpha$ . Demuéstrase que en este caso

$$\sup A = \sup\{\sup A_{\alpha}\} \quad (\inf A = \inf\{\inf A_{\alpha}\}).$$

7.59. Sea  $Q$  un subconjunto del conjunto parcialmente ordenado  $P$ . Demuéstrase que si  $A \subseteq Q$  y existe  $a = \sup_P A \in Q$  ( $b = \inf_P A \in Q$ , respectivamente), entonces  $a = \sup_Q A$  ( $b = \inf_Q A$ , respectivamente).

7.60. Dése un ejemplo en que de la existencia de  $\sup_Q A$  (en las condiciones del problema 7.59) no se deduce que existe  $\sup_P A$ .

7.61. Demuéstrase que si  $a$  y  $b$  son elementos máximos, entonces  $\sup\{a, b\}$  existe cuando y sólo cuando  $a = b$ .

7.62. Dése un ejemplo de conjunto parcialmente ordenado en el cual no existe  $\inf \emptyset$ .

7.63. Demuéstrase que si  $\inf B$  existe para cualquier subconjunto no vacío  $B$  del conjunto parcialmente ordenado  $P$ , entonces en  $P$  existe también  $\sup \emptyset$ .

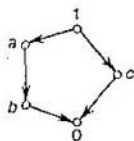
7.64. Demuéstrase que si  $L$  es un retículo con  $a \wedge b = \inf\{a, b\}$  y  $a \vee b = \sup\{a, b\}$ , entonces las operaciones binarias  $\wedge$  y  $\vee$  para cualesquiera  $a, b, c \in L$  satisfacen las siguientes propiedades:

- a)  $a \wedge a = a$ ;  $a \vee a = a$  (idempotencia);
- b)  $a \wedge b = b \wedge a$ ;  $a \vee b = b \vee a$  (conmutatividad);
- c)  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ ,  
 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$  (asociatividad);

d)  $a \wedge (a \vee b) = a$ ;  $a \vee (a \wedge b) = a$  (absorción).

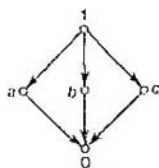
7.65. ¿Cuáles de los conjuntos parcialmente ordenados, correspondientes a los diagramas de Hasse representados en las figs. 7.6, 7.7 y 7.8, son retículos?

7.66. Compruébese que los conjuntos parcialmente ordenados de los problemas 7.18, 7.26, 7.27, 7.29, 7.30 son retículos.



Pentagono

Fig. 7.6.



Diamante

Fig. 7.7.



P(6)

Fig. 7.8.

7.67. Demuéstrase que el conjunto parcialmente ordenado del problema 7.28 no es un retículo, cuando  $n \geq 5$ .

7.68. ¿Qué conjuntos parcialmente ordenados del problema 7.12 son retículos? Calcúlense  $a \wedge b$  y  $a \vee b$  para aquellos que son retículos.

7.69. Muéstrase que cualquier cadena es un retículo.

7.70. Demuéstrase que si un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$  es un retículo, entonces el conjunto parcialmente ordenado  $(A, \geq)$ , dual respecto a  $(A, \leq)$ , también lo es.

7.71. Sea  $A$  un conjunto de todos los subgrupos (normales) del grupo  $G$  y para  $X, Y \in A$  supongamos que  $X \leq Y$  significa que  $X \subseteq Y$ . Demuéstrase que  $(A, \leq)$  es un retículo; calcúlense  $X \wedge Y$ ,  $X \vee Y$ .

7.72. Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado en el que  $\inf B$  existe para cualquier  $B \subseteq A$ . Muéstrase que  $(A, \leq)$  es un retículo.

7.73. Demuéstrase que todo elemento mínimo (máximo) de un retículo es un cero (unidad).

7.74. Demuéstrase que si  $a, b, c$  son elementos de un retículo y  $a \vee b \vee c = a \wedge b \wedge c$ , entonces  $a = b = c$ .

7.75. Sea  $A$  un conjunto con dos operaciones binarias  $\wedge$  y  $\vee$ , que son idempotentes, conmutativas, asociativas y satisfacen las propiedades de absorción; además,  $a \leq b$  significa que  $a \vee b = b$ . Demuéstrase que la relación  $\leq$  es relación de orden sobre el conjunto  $A$  y el conjunto parcialmente ordenado que surge resulta ser un retículo, con la particularidad de que

$$a \vee b = \sup \{a, b\},$$

$$a \wedge b = \inf \{a, b\}.$$

7.76. ¿Qué cambiará, si en el problema 7.75 ponemos  $a \leq b$  cuando y sólo cuando  $a \wedge b = a$ ?

7.77. ¿Serán retículos los conjuntos parcialmente ordenados representados en la fig. 7.9?

7.78. Muéstrase que en la fig. 7.10 está representado dos veces un mismo retículo.

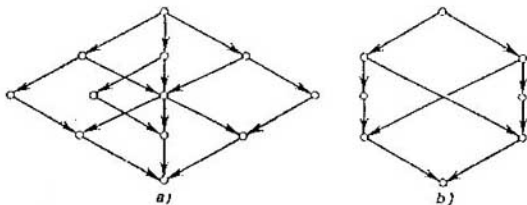


Fig. 7.9.

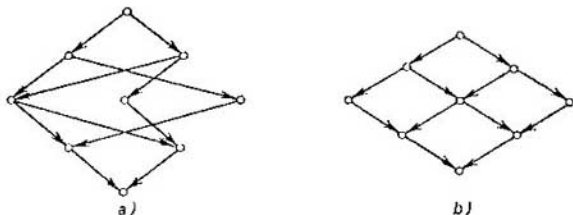


Fig. 7.10.

7.79. Dibújense los diagramas de todos los retículos que se componen de no más de seis elementos.

7.80. Demuéstrase que el producto directo  $P \times Q$  (como conjuntos parcialmente ordenados) de cualesquiera dos retículos  $P$  y  $Q$  es un retículo llamado *producto directo de retículos*.

Un conjunto parcialmente ordenado se denomina *retículo completo*, siempre que todo su subconjunto no vacío tiene tanto cota superior exacta, como cota inferior exacta.

7.81. Déense los ejemplos de retículos completos.

7.82. ¿Formará el retículo completo un conjunto de todos los números enteros con orden corriente según su valor?

7.83. Compruébese que todo retículo completo es un retículo. ¿Es cierto que todo retículo es retículo completo?

7.84. Compruébese que el belliano  $\mathcal{B}(S_n)$  es un retículo completo.

7.85. Demuéstrase que un producto directo de retículos completos es un retículo completo.

7.86. Demuéstrase que si un conjunto parcialmente ordenado  $P$  tiene la cifra 1 y si cada su subconjunto no vacío tiene cota inferior exacta, entonces  $P$  es un retículo completo.

Para los retículos hay dos conceptos equivalentes de isomorfismo:

a) Los retículos  $L_0$  y  $L_1$  se llaman *isomorfos*, si son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.

b) Los retículos  $L_0$  y  $L_1$  se llaman isomorfos, si existe un isomorfismo  $\varphi$  del conjunto  $L_0$  sobre el conjunto  $L_1$  tal que para cualesquiera  $a, b \in L_0$  tiene lugar:

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b);$$

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b).$$

Se denomina *homomorfismo* del retículo  $L_0$  en el retículo  $L_1$  la aplicación  $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$  que satisface, para cualesquiera  $a, b \in L_0$ , las condiciones:

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b);$$

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b).$$

7.87. Demuéstrase que todo homomorfismo de los retículos es una aplicación isótona. ¿Será cierta la afirmación inversa de que toda aplicación isótona de los retículos es un homomorfismo?

Un subconjunto  $B$  del retículo  $L$  se denominará también *pentágono* o *diamante*, si es un subretículo isomorfo al pentágono (véase fig. 7.6) o al diamante (véase fig. 7.7). De este modo, afirmando que  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$  es un pentágono (diamante, respectivamente) suponemos que la aplicación  $\varphi: b_1 \rightarrow 0; b_2 \rightarrow a; b_3 \rightarrow b; b_4 \rightarrow c; b_5 \rightarrow 1$  es un isomorfismo del retículo  $B$  sobre el retículo representado en la fig. 7.6 (en la fig. 7.7, respectivamente).

7.88. Muéstrase que la imagen homomorfa de un diamante la constituye el propio diamante o un retículo de un solo elemento.

Una aplicación isótona  $\varphi$  del conjunto parcialmente ordenado  $P$  en sí mismo lleva el nombre de *operador de clausura*, si  $\varphi(x) \geq x$  y  $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$  para todo  $x \in P$ . El elemento  $\varphi(x)$  se llama  *$\varphi$ -clausura* de  $x$ . Un elemento que coincide con su  $\varphi$ -clausura se llama  *$\varphi$ -cerrado*.

7.89. Déense ejemplos de operadores de clausura sobre los conjuntos parcialmente ordenados e indíquense todos los elementos cerrados en estos conjuntos parcialmente ordenados.

7.90. Sea  $\varphi$  un operador de clausura sobre el conjunto parcialmente ordenado  $P$ ; el subconjunto  $A \subseteq P$  consta de elementos  $\varphi$ -cerrados y  $a = \inf A$  existe. Demuéstrase que en este caso  $a$  es un elemento  $\varphi$ -cerrado.

7.91. Sea  $\varphi$  un operador de clausura sobre el retículo completo  $P$ . Demuéstrase que un conjunto parcialmente ordenado  $L$  de todos los elementos  $\varphi$ -cerrados, considerado como un subconjunto del conjunto parcialmente ordenado  $P$ , es también un retículo completo y que

en tal caso para cualquier subconjunto no vacío  $A$  del conjunto  $L$  tiene lugar  $\inf_L A \inf_P A$  y  $\sup_L A = \varphi(\sup_P A)$ .

7.92. Demuéstrase que si  $\varphi$  es un operador de clausura sobre el conjunto parcialmente ordenado  $P$ , todos los elementos máximos de  $P$  son  $\varphi$ -cerrados.

Un retículo  $L$  se llama *modular*, si para cualesquiera  $a, b, c \in L$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$$

o bien, lo que es equivalente a la condición siguiente:

$$a \geq c \text{ lleva consigo } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c.$$

7.93. Muéstrase que los retículos que siguen:

- diamante (véase fig. 7.7);
- retículo del problema 7.29;
- retículo dual respecto del retículo modular;
- subretículo de un retículo modular;
- producto directo de los retículos modulares;
- imagen homomorfa de un retículo modular son todos modulares.

7.94. Déense ejemplos de retículos no modulares.

7.95. Demuéstrase que un belliano  $\mathcal{B}(S_n)$  es un retículo modular, si y sólo si  $k \leq 3$ .

7.96. Demuéstrase que el retículo  $L$  es modular si y sólo si no contiene pentágonos.

7.97. Demuéstrase que el retículo  $L$  es modular cuando y sólo cuando para todos los  $a, b, c \in L$  de  $b \geq a$ ,  $a \wedge c = b \wedge c$  y de  $a \vee c = b \vee c$  se deduce que  $a = b$ .

7.98. Demuéstrase que si  $a$  y  $b$  son elementos de un retículo modular  $L$ , los intervalos  $[a \wedge b, a]$  y  $[b, a \vee b]$  son isomorfos. En este caso el isomorfismo se realiza mediante las aplicaciones:

$$\varphi(x) = x \vee b, \quad \text{si } x \in [a \wedge b, a]$$

$$\psi(y) = a \wedge y, \quad \text{si } y \in [b, a \vee b]$$

7.99. Demuéstrase que si  $L$  es un retículo modular y si  $a, b \in L$ : entonces para cualesquiera  $x, y \in [a \wedge b, b]$  se verifica la igualdad

$$a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y).$$

Un retículo  $L$  se llama *distributivo*, si para cualesquiera  $a, b, c \in L$  se verifica una de las siguientes identidades:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c);$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

7.100. Muéstrase que los retículos que siguen:

- booleano;
- toda cadena finita;
- retículo compuesto por no más de 4 elementos;
- retículo de números enteros no negativos ordenados según la divisibilidad;
- dual respecto del retículo distributivo;
- subretículo de un retículo distributivo;
- imagen homomorfa



fa de un retículo distributivo; h) producto directo de los retículos distributivos son todos distributivos.

7.101a. Déense ejemplos de retículos no distributivos.

7.101b. ¿Será cierto que un belliano  $\mathcal{B}(S_n)$  es retículo distributivo, si y sólo si  $n \leq 2$ ?

7.102. Demuéstrese que un retículo modular  $L$  es distributivo cuando y sólo cuando no contiene diamantes.

7.103. Demuéstrese que un retículo  $L$  es distributivo cuando y sólo cuando para cualesquiera  $a, b, c \in L$  de  $a \wedge c = b \wedge c$ ,  $a \vee c = b \vee c$  se deduce que  $a = b$ .

7.104. Demuéstrese que el retículo  $L$  es distributivo si y sólo si para cualesquiera  $a, b, c \in L$  se verifica

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a).$$

Escribamos  $a \preceq b$  ( $b \succeq a$ ), si  $a < b$ , ó  $a = b$ . Se dice que el retículo  $L$  satisface la *condición de recubrimiento por arriba* si para cualesquiera  $a, b, c \in L$  de  $a < b$  se deduce que  $a \vee c \preceq b \vee c$ . La *condición de recubrimiento por debajo* se define de un modo dual.

7.105. Demuéstrese que un retículo modular arbitrario satisface las condiciones de recubrimiento por arriba y por debajo.

El retículo  $L$  se denominará *semimodular*, si satisface la condición de recubrimiento por arriba.

7.106. ¿Serán semimodulares los retículos representados en la fig. 7.11?

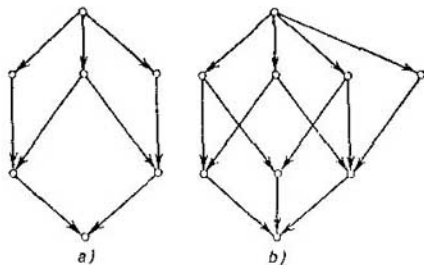


Fig. 7.11.

7.107. Demuéstrese que el producto directo de los retículos semimodulares, la imagen homomorfa del retículo semimodular finito y el belliano  $\mathcal{B}(S_n)$  son retículos semimodulares.

7.108. Déense ejemplos de retículos semimodulares que no son modulares.

Sea  $L$  un retículo con  $0$ . Definamos en él una *función de rango*  $r(a)$  del modo siguiente:  $r(a)$  es igual a la longitud de la cadena máxima más larga en el intervalo  $[0, a]$ , si tal cadena existe, y

$r(a) = \infty$  en el caso contrario. Diremos que  $L$  es un retículo de longitud finita, si  $r(a) < \infty$ , cualquiera que sea  $a \in L$ .

7.109. Demuéstrase que en un retículo semimodular  $L$  de longitud finita se cumple la condición de Jordan—Hölder: cualesquiera dos cadenas máximas entre los elementos arbitrarios del retículo  $L$  son de igual longitud.

7.110. ¿Se cumplirá la condición de Jordan—Hölder en un retículo de longitud finita que satisface la condición de recubrimiento por debajo?

Así pues, en virtud de la condición de Jordan—Hölder, que se cumple en los retículos semimodulares de longitud finita, el rango  $r(a)$  coincide con la longitud de la cadena máxima arbitraria en el intervalo  $[0, a]$ .

7.111. Demuéstrase que:

a) si en un conjunto parcialmente ordenado  $A$  con  $0$  se cumple la condición de Jordan—Hölder, entonces su función de rango  $r(a)$ , definida para todo  $a \in A$ , satisface las siguientes condiciones:  $r(0) = 0$  y de  $a < b$  se deduce que  $r(b) = r(a) + 1$ ;

b) si sobre un conjunto parcialmente ordenado  $A$ , está definida una función  $r$  tal que  $r(0) = 0$  y si de  $a < b$  se deduce que  $r(b) = r(a) + 1$ , entonces  $A$  satisface la condición de Jordan—Hölder y esta función coincide con su función de rango.

7.112. Demuéstrase que en el retículo  $L$  de longitud finita son equivalentes las siguientes condiciones:

a)  $L$  es un retículo semimodular;

b) si  $a, b \in L$ ,  $a \neq b$ , y los elementos  $a, b$  cubren el elemento  $a \wedge b$ , entonces el elemento  $a \vee b$  cubre los elementos  $a$  y  $b$ ;

c) si  $a, b, c \in L$ ,  $a \leq b$  y  $C$  es una cadena máxima en el intervalo  $[a, b]$ , entonces  $\{x \vee c \mid x \in C\}$  es la cadena máxima en el intervalo  $[a \vee c, b \vee c]$ ;

d) para cualesquiera  $a, b \in L$  se verifica la desigualdad

$$r(a) + r(b) \geq r(a \wedge b) + r(a \vee b).$$

7.113. Demuéstrase que si en un retículo de longitud finita  $L$  se cumple la condición de recubrimiento por debajo, entonces para cualesquiera  $a, b \in L$  se verifica la desigualdad

$$r(a) + r(b) \leq r(a \wedge b) + r(a \vee b).$$

7.114. Demuéstrase que el retículo  $L$  es semimodular cuando y sólo cuando para cualesquiera  $x, y \in L$  de  $x > x \wedge y$  se deduce  $x \vee y < y$ .

7.115. Demuéstrase que para los retículos semimodulares resulta válido el axioma de sustitución de Mac Lane—Steinitz: si  $p$  y  $q$  son átomos del retículo  $L$  y si  $a \in L$ ,  $a < a \vee q \leq a \vee p$ , entonces  $a \vee p = a \vee q$ .

7.116. Demuéstrase que para el retículo  $L$  de longitud finita son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- a)  $L$  es un retículo modular;
- b) el retículo  $L$  satisface las condiciones de recubrimiento tanto por arriba, como por debajo;
- c)  $L$  no contiene pentágonos;
- d) para cualesquiera  $a, b \in L$  se verifica la igualdad

$$r(a) + r(b) = r(a \vee b) + r(a \wedge b).$$

7.117. Demuéstrese que en un retículo semimodular  $L$  de longitud finita para cualesquiera  $x_i \in L, i = 1, 2, \dots, n$ , se verifica la desigualdad

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \leq r(x_1) + r(x_2) + \dots + r(x_n).$$

7.118. Demuéstrese que en un retículo semimodular  $L$  de longitud finita, si  $p$  es un átomo tenemos:  $p \leq a$  ó  $a \vee p > a$ .

Un par de elementos  $(a, b)$  del retículo  $L$  se llama modular y se denota  $aMb$ , si de  $x \leq b$  se deduce, para cualquier  $x \in L$ , que  $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$ .

Inmediatamente de la definición se desprende que el retículo  $L$  es modular cuando y sólo cuando  $aMb$  para cualesquiera  $a, b \in L$ .

7.119. Demuéstrese que para los elementos  $a$  y  $b$  de un retículo arbitrario  $L$  y las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$ , definidas en el problema 7.98, son equivalentes las siguientes condiciones:

- a)  $aMb$ ;
- b)  $\varphi$  es la aplicación de  $[a, a \vee b]$  sobre  $[a \wedge b, b]$ ;
- c)  $\psi$  es la aplicación biunívoca de  $[a \wedge b, b]$  en  $[a, a \vee b]$ ;
- d)  $\varphi\psi(x) = x$  para todo  $x \in [a \wedge b, b]$ .

7.120. Demuéstrese que en un retículo semimodular  $L$  de longitud finita  $aMb$  cuando y sólo cuando

$$r(a) + r(b) = r(a \vee b) + r(a \wedge b).$$

Un retículo  $L$  se llama  $M$ -simétrico, si  $aMb$  lleva consigo  $bMa$  para cualesquiera  $a, b \in L$ .

7.121. Muéstrase que en el retículo representado en la fig. 7.11 a) de  $aMb$  no se desprende  $bMa$ .

7.122. Demuéstrese que un retículo arbitrario  $L$  de longitud finita es semimodular cuando y sólo cuando es  $M$ -simétrico.

Sea  $L$  un retículo con  $0$ . El subconjunto  $X$  del conjunto  $L \setminus \{0\}$  se denomina *independiente*, si para cualesquiera subconjuntos finitos suyos  $A$  y  $B$  es válida la igualdad

$$\inf \{\sup A, \sup B\} = \sup (A \cap B).$$

7.123. Demuéstrese que un subconjunto  $X$  del retículo  $L$  es independiente cuando y sólo cuando la aplicación  $\varphi: A \rightarrow \sup A$ , definida para todos los  $A \in \mathcal{P}(X)$ , es un isomorfismo entre el retículo del booleano  $\mathcal{P}(X)$  y un subretículo del retículo  $L$ , engendrado por el conjunto  $X$ .

7.124. Sea  $L$  un retículo modular con 0. Demuéstrase que el subconjunto de  $n$  elementos  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq L - \{0\}$  es independiente, si y sólo si para cualesquiera  $i = 1, 2, \dots, n-1$  son válidas las correlaciones

$$(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0.$$

7.125. Sea  $L$  un retículo modular con 0. Demuéstrase que

a) si  $a_i \leq b_i$ ,  $a_i, b_i \in L$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son independientes en  $L$ , entonces  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son también independientes;

b) Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son elementos independientes del retículo  $L$  y si  $a_i = a_{i1} \vee a_{i2} \vee \dots \vee a_{ih_i}$  donde  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ih_i}$  también son elementos independientes del retículo  $L$  y  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces los elementos  $a_{11}, \dots, a_{1h_1}, a_{21}, \dots, a_{2h_2}, \dots, a_{nh_n}$  son independientes.

El conjunto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de elementos de un retículo semimodular de longitud finita será independiente, si satisface la siguiente condición

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = r(x_1) + r(x_2) = \dots + r(x_n).$$

7.126. Demuéstrase que si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son elementos independientes del retículo semimodular  $L$  de longitud finita, entonces para todos los  $i = 1, 2, \dots, n-1$  se verifican las siguientes correlaciones:

a)  $(x_1 \vee \dots \vee x_i) \wedge x_{i+1} = 0$ ;

b)  $(x_1 \vee \dots \vee x_i) Mx_{i+1}$ ;

c)  $x_1, \dots, x_i$ , son elementos independientes.

7.127. ¿Será cierta la afirmación del problema 7.124 para los retículos semimodulares de longitud finita?

7.128. Demuéstrase que si  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es un conjunto de átomos de un retículo semimodular, entonces serán equivalentes las siguientes condiciones:

a)  $X$  es un conjunto independiente;

b)  $(a_1 \vee \dots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;

c)  $r(a_1 \vee \dots \vee a_n) = n$ .

7.129. Muéstrase que si en un retículo semimodular los átomos  $p_1, \dots, p_s$  son independientes y los átomos  $q_1, \dots, q_{s+1}$  también son independientes, será independiente también cierto conjunto  $p_1, \dots, p_s, q_1$ .

Un retículo  $L$  con 0 y 1 se llama *retículo con complementos*, si para cualquier  $x \in L$  existe tal elemento  $x^* \in L$  que  $x \wedge x^* = 0$  y  $x \vee x^* = 1$ , con la particularidad de que el elemento  $x^*$  se denomina *complemento del elemento  $x$*  en  $L$ . Un retículo  $L$  recibe el nombre de retículo con complementos relativos, si de que  $a \leq x \leq b$ , donde  $a$  y  $b$  son elementos arbitrarios del retículo  $L$ , y  $x \in L$  se deduce la existencia de tal elemento  $y \in L$  que  $x \wedge y = a$ ,  $x \vee y = b$ , y en este caso el elemento  $y$  se denomina *complemento relativo del*

elemento  $x$  en el intervalo  $[a, b]$ . De acuerdo con las definiciones dadas, cada retículo  $L$  con complementos relativos que posea  $0$  y  $1$  será retículo con complementos.

7.130. Sea  $L$  un retículo representado en la fig. 7.12. Hállense los complementos relativos: a) del elemento  $b$  en el intervalo  $[e, 1]$ ; b) de los elementos  $a$  y  $e$  en el intervalo  $[0, b]$ . ¿Será el retículo  $L$  un retículo con complementos o complementos relativos? ¿Podrá un elemento tener varios complementos (relativos)?

7.131. ¿Será cierto que cada retículo con complementos es un retículo con complementos relativos? Arguéntese la respuesta.

7.132. ¿Será un pentágono (véase fig. 7.6): a) retículo con complementos; b) retículo con complementos relativos?

7.133. Muéstrase que todos los retículos con complementos relativos que tienen no más de 8 elementos son modulares.

7.134. Demuéstrase que si en un retículo modular con  $0$  y  $1$  el elemento  $a$  tiene complemento, poseerá también complemento relativo en cualquier intervalo que lo contiene.

7.135. Demuéstrase que en un retículo de longitud finita  $L$  con complementos relativos, cada elemento  $a$  es una unión de átomos en él contenidos. ¿Será cierto que en un retículo modular de longitud finita con complementos, cada elemento es una unión de átomos en él contenidos?

7.136. Sea  $L$  un retículo modular con complementos y sea  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  una cadena en  $L$ . Supongamos, además, que  $b_1 = a_1$ ,  $b_2$  es un complemento relativo de  $a_1$  en el intervalo  $[0, a_2]$ ,  $\dots$ ,  $b_n$  es un complemento relativo del elemento  $a_{n-1}$  en el intervalo  $[0, a_n]$ . Demuéstrase que el conjunto  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  es independiente en  $L$ .

7.137. Sea  $L$  un retículo con  $0$  y  $1$ ;  $a, b, c, x, y, z, t \in L$ ; supongamos que  $x$  es un complemento relativo del elemento  $a$  en el intervalo  $[b, c]$ ,  $y$  es un complemento relativo del elemento  $c$  en el intervalo  $[x, 1]$ ,  $z$  es un complemento relativo del elemento  $b$  en el intervalo  $[0, x]$  y  $t$  es un complemento relativo del elemento  $x$  en el intervalo  $[z, y]$ . Compruébese que  $t$  es un complemento del elemento  $a$  en  $L$ .

7.138. Demuéstrase que en un retículo distributivo  $L$  con  $0$  y  $1$  cualquier elemento  $a$  tiene a lo sumo: a) un complemento relativo en cada intervalo; b) un complemento en  $L$ .

7.139. Demuéstrase que si en un retículo distributivo  $L$  los elementos  $a$  y  $b$  tienen complementos  $a^*$  y  $b^*$ , respectivamente, entonces los elementos  $a \wedge b$  y  $a \vee b$  también poseen los complementos  $(a \wedge b)^*$  y  $(a \vee b)^*$ , respectivamente; además, son válidas en este caso las identidades de Morgan:

$$(a \wedge b)^* = a^* \vee b^* \text{ y } (a \vee b)^* = a^* \wedge b^*.$$

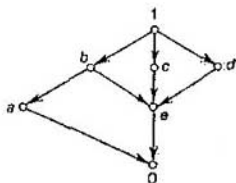


Fig. 7.12.

7.140. Sea  $L$  un retículo distributivo con  $0$  y  $1$ ;  $a, b \in L$ . Demuéstrese que si los elementos  $(a \wedge b)$  y  $(a \vee b)$  tienen complementos, los elementos  $a$  y  $b$  también tienen complementos en  $L$ .

7.141. Demuéstrese que un retículo semimodular de longitud finita  $L$  es un retículo con complementos, si y sólo si su  $1$  es una unión de sus átomos.

7.142. Demuéstrese que un retículo semimodular  $L$  es un retículo con complementos relativos, si y sólo si cada elemento  $x$  de él es tal que  $x > 0$ , es una unión de átomos.

7.143. Demuéstrese que si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son elementos independientes del retículo modular  $L$  con  $0$ , entonces el subretículo  $H$  del retículo  $L$ , engendrado por los intervalos  $[0, a_i]$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , es isomorfo al producto  $[0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$ .

Se llama *retículo de Boole* un retículo distributivo con complementos. En vista del problema 7.138, cada elemento del retículo de Boole  $B$  tiene un único complemento, y en virtud del problema 7.134, el retículo de Boole cuenta con complementos relativos. Por ser simétrico el complemento, tenemos  $x^{**} = x$  para todo  $x \in B$  (esta propiedad lleva el nombre de *involutividad*). Un retículo de Boole, en el cual  $0, 1$  y  $*$  (operación de complementar) se consideran como operaciones principales, recibe el nombre de *álgebra de Boole*. De este modo el álgebra de Boole es en realidad un sistema algebraico  $(B; \wedge, \vee, *, 0, 1)$ , donde  $\wedge, \vee$  son operaciones binarias,  $*$  es operación monaria, y  $0, 1$ , las constantes de operaciones que satisfacen las propiedades de: idempotencia, conmutatividad, asociatividad, absorción (retículo), modularidad, (retículo modular), distributividad (retículo distributivo), fronteras universales (retículo con  $0$  y  $1$ ), complementariedad (retículo con complementos), involutividad e identidades de Morgan (retículo de Boole).

7.144. Muéstrese que los retículos: a) booleano  $\mathcal{P}(S)$ ; b) el retículo modular con complementos únicos; c) cualquier subretículo del retículo de Boole; d) el producto directo de retículos de Boole, son todos retículos de Boole.

7.145. Demuéstrese que un retículo de Boole finito es isomorfo a cierto booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ .

Dos intervalos  $[x, y]$  y  $[x', y']$  del retículo  $L$  se llaman *transpuestos*, si  $[x, y] = [b, a \vee b]$  y  $[x', y'] = [a \wedge b, a]$  para ciertos  $a, b \in L$ . Diremos que los intervalos  $[x, y]$  y  $[x', y']$  son *projectivos* (la designación es:  $[x, y] \sim [x', y']$ ), si existe una sucesión finita de intervalos

$$[x, y], [x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n], [x', y'],$$

en la cual cualesquiera dos intervalos vecinos son transpuestos.

7.146. Demuéstrese que en los retículos modulares de longitud finita se cumple la *condición reforzada de Jordan—Hölder*: cualesquiera dos cadenas máximas entre los elementos arbitrarios del retículo modular  $L$  de longitud finita tienen longitud igual; si  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  y  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n = a_n$  es un par de tales

cadena máxima, existe una permutación  $\sigma$  de índices  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $[a_{i-1}, a_i] \sim [b_{\sigma(i)-1}, b_{\sigma(i)}]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Además, si  $L$  es un retículo modular, la permutación  $\sigma$  está definida del modo unívoco.

7.147. Sea  $S$  un conjunto finito;  $L$ , un subretículo del retículo de Boole  $\mathcal{P}(S)$ ;  $S^-$ , el elemento minimal del subretículo y  $S^+$ , el complemento en  $S$  de su elemento maximal. Demuéstrase que si  $A_0 = S^-, A_1, \dots, A_n = S \setminus S^+$  es la cadena máxima en  $L$  y  $\mathcal{F} = \{A_i \setminus A_{i+1} \mid i = 1, \dots, n\}$ , entonces  $(S^-, \{F: F \in \mathcal{F}\}, S^+)$  será partición del conjunto  $S$  que no depende del modo de elegir la cadena máxima entre  $S^-$  y  $S \setminus S^+$  en  $L$  (los conjuntos  $S^-$  y  $S^+$  pueden ser vacíos, todos los  $F \in \mathcal{F}$  no son conjuntos vacíos).

Una cadena se denomina *puntual*, si cada uno de sus elementos es una unión de átomos. Un retículo semimodular puntual de longitud finita se llama *geométrico* (o bien *matroidal*). De este modo, en virtud del problema 7.142, el retículo geométrico es un retículo semimodular de longitud finita con complementos relativos.

7.148. Muéstrase que los retículos: a) booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ ; b) belliano  $\mathcal{B}(S_n)$ ; c) el conjunto parcialmente ordenado del problema 7.29; d) el intervalo arbitrario  $[a, b]$  del retículo geométrico  $L$ ; e) el producto directo de los retículos geométricos, son todos geométricos.

7.149. Sea  $G$  un retículo geométrico y  $A$ , cierto conjunto de sus átomos. Demuéstrase que el conjunto  $L$  de toda clase de uniones de átomos  $p \in A$  es un retículo geométrico, si le agregamos un elemento más 0 y ponemos  $0 = \sup \emptyset$ .

7.150. ¿Será posible despreocuparse en las afirmaciones de los problemas 7.141 y 7.142 el requisito de semimodularidad de los retículos? Argumentétese la respuesta.

7.151. Demuéstrase que un retículo  $L$  de longitud finita con complementos relativos es geométrico, si y sólo si se cumple en él una de las siguientes condiciones:

a) si  $a, b \in L$ ,  $a \neq b$ , y los elementos  $a, b$  cubren el elemento  $c (= a \wedge b)$ , entonces el elemento  $a \vee b$  cubre los elementos  $a$  y  $b$ ;

b) si  $p$  es un átomo del retículo  $L$ , entonces para un elemento arbitrario  $a \in L$  o bien  $p \leq a$ , o bien  $a \vee p$  cubre  $a$ ;

c) si  $p, q$  son los átomos del retículo  $L$  y  $a < a \vee q \leq a \vee p$ , donde  $a \in L$ , entonces  $a \vee q = a \vee p$ .

d) la propiedad de independencia de los átomos es simétrica (es decir, invariante respecto de todas las permutaciones de átomos).

7.152. Demuéstrase que un retículo puntual de longitud finita es semimodular (geométrico) cuando y sólo cuando para cualquier elemento  $a \in L$  y para cada átomo  $p \in L$ :  $pMa$ .

7.153. Supongamos que en un retículo geométrico los elementos  $c \leq b$  son complementos de  $a$ . Demuéstrase que si  $aMb$  y  $aMc$ , entonces  $b = c$ .

7.154. Sea  $G$  un grupo abeliano. Denotemos con  $L$  el retículo de todos los subgrupos  $H$  tales que el grupo cociente  $G/H$  no tiene ele-

mentos de orden finito, salvo el cero. Demuéstrase que  $L$  es un retículo geométrico.

7.155. Sea  $a^*$  un complemento del elemento arbitrario  $a$  de un retículo geométrico  $L$ . Demuéstrase que  $a^* Ma$ .

Sea  $A$  un conjunto de todos los átomos del retículo geométrico  $L$  y sea  $B$  un subconjunto arbitrario suyo. Se llama rango  $r(b)$  del subconjunto  $B$  el rango del elemento  $\sup B$  en el retículo  $L$ .

7.156. Demuéstrase que la función de rango  $r$  de los subconjuntos del conjunto  $A$  de átomos del retículo geométrico  $L$  satisface las siguientes condiciones:

- $r(\emptyset) = 0$ ;
- $r(B) \leq r(B \cup \{p\}) \leq r(B) + 1$ ;
- si  $r(B) = r(B \cup \{p\}) = r(B \cup \{q\})$ , entonces  $r(B) = r(B \cup \{p\} \cup \{q\})$ , cualesquiera que sean  $B \subseteq A$  y  $p, q \in A$ .

Es evidente que el subconjunto  $B$  de átomos del retículo geométrico  $L$  será independiente cuando y sólo cuando  $r(B) = |B|$  (véa-

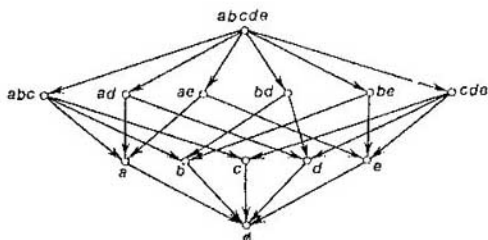


Fig. 7.13.

se el problema 7.128). Los conjuntos independientes máximos (por inclusión) son bases del retículo geométrico  $L$ . Los subconjuntos  $B \subseteq A$ , que no son independientes, se llamarán dependientes y los conjuntos dependientes mínimos (por inclusión), ciclos. Por ejemplo, en el retículo geométrico representado en la fig. 7.13 los subconjuntos de átomos  $ab$ ;  $bcd$ ,  $ade$  son independientes; los  $abc$ ;  $cde$ ;  $abcd$  son dependientes;  $abc$ ;  $cde$  son ciclos, y  $ace$ ;  $bcd$ ;  $acd$ , bases.

7.157. Demuéstrase que para el conjunto de todas las bases del retículo geométrico  $L$  se cumplen las siguientes condiciones:

- ningún subconjunto propio de una base será base;
- para cualesquiera bases  $B_1$  y  $B_2$  y para cada  $a \in B_1$ , existe un átomo  $b \in B_2$  tal que  $(B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$  también será una base.

7.158. Demuéstrase que para el conjunto de todos los ciclos de un retículo geométrico  $L$  se cumplen las siguientes condiciones:

- ningún ciclo no es subconjunto propio de otro ciclo;
- si  $C_1$  y  $C_2$  son ciclos diferentes y  $a \in C_1 \cap C_2$ , existe un ciclo  $C_3$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$ ;



c) si  $C_1$  y  $C_2$  son ciclos diferentes,  $a \in C_1 \cap C_2$  y  $b \in C_1 \setminus C_2$ , entonces existe un ciclo  $C_3$  tal que  $b \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$ .

Dos elementos  $a$  y  $b$  del retículo  $L$  con complementos se denominan *perspectivos*, si tienen un complemento común, es decir,  $a \vee c = b \vee c = 1$ , y  $a \wedge c = b \wedge c = 0$  para cierto elemento  $c \in L$ . En este caso el elemento  $c$  lleva el nombre de *eje de la perspectiva*.

Si  $L$  es un retículo modular con complementos y si sus elementos  $a$  y  $b$  son perspectivos con el eje de perspectiva  $c$ , entonces, al emplear sucesivamente las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$  del problema 7.98:

$$\begin{aligned} [0, a] &= [a \wedge c, a] \rightarrow [c, a \vee c] = [c, 1] = \\ &= [c, b \vee c] \rightarrow [b \wedge c, b] = [0, b], \end{aligned}$$

establezcamos el isomorfismo entre los intervalos  $[0, a]$  y  $[0, b]$ . Además, los intervalos  $[0, a]$  y  $[0, b]$  son proyectivos. Por eso, teniendo en cuenta la analogía con los intervalos proyectivos, emplearemos la designación  $a \sim b$  para escribir los elementos perspectivos  $a$  y  $b$ .

7.159. Sea  $L$  un retículo geométrico. Muéstrase que  $a \sim b$  en el retículo  $L$  cuando y sólo cuando  $a \vee x = b \vee x$ , y  $a \wedge x = b \wedge x$  para cierto elemento  $x \in L$ .

7.160. Sean  $a$  y  $b$  los átomos del retículo geométrico  $L$ . Demuéstrase que  $a \sim b$ , cuando y sólo cuando existe un ciclo  $C$  del retículo  $L$  que contenga  $a$  y  $b$  simultáneamente.

7.161. Demuéstrase que la relación de perspectividad de los átomos de un retículo geométrico es una relación de equivalencia.

7.162. Compruébese que en los problemas 7.85, 7.93 e), 7.100 h), 7.107 y 7.148 e) son válidas también las afirmaciones inversas.

Diremos que un retículo  $L$  con 0 y 1 es *desarrollable*, si existen intervalos no triviales  $L_1 = [0, z_1]$  y  $L_2 = [0, z_2]$  tales que para cada elemento  $x \in L$  se encuentre un único par  $(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$  de tal índole que  $x = x_1 \vee x_2$ . Indiquemos que esto es equivalente a la afirmación de que  $L$  es isomorfo a  $L_1 \times L_2$ .

7.163. Demuéstrase que un retículo geométrico es indesarrollable cuando y sólo cuando dos de sus átomos cualesquiera son perspectivos.

7.164. Demuéstrase que cualquier retículo geométrico es isomorfo al producto directo de los retículos geométricos indesarrollables.

7.165. Sean  $x$  e  $y$  los elementos arbitrarios de un retículo modular geométrico  $M$ , y sea  $z$  uno de sus átomos tal que  $z \leq x \vee y$ , y  $z \not\leq y$ . Demuéstrase que se encontrará un átomo  $x'$  tal que  $x' \leq x$  y  $z \leq x' \vee y$ .

7.166. Sean  $a$  y  $b$  dos átomos distintos de un retículo geométrico modular  $M$ . Demuéstrase que  $a \sim b$  cuando y sólo cuando el elemento  $a \vee b$  contiene el tercer átomo  $c \in M$ .

Se denomina *estructura de incidencia* a un par  $(P, L)$  de conjuntos disjuntos  $P$  y  $L$ , donde  $P$  es un conjunto de puntos y  $L$ , una familia

de rectas relacionadas entre sí por la relación de incidencia. Se llamará *subespacio* de la estructura de incidencia  $(P, L)$  al subconjunto  $S$  del conjunto  $P$ , para el cual si  $p, q \in S$  y  $p \neq q$ , entonces el conjunto de puntos de una recta que se pasa por los puntos  $p$  y  $q$  también pertenecen a  $S$ . Un subespacio se considera *engendrado* por el conjunto de puntos  $A$ , si es un subespacio minimal de la estructura de incidencia que contiene el conjunto  $A$ . Dos rectas se *intersecan*, si son incidentes respecto de un mismo punto. Una estructura de incidencia se llama *geometría proyectiva de dimensión proyectiva  $n-1$* , si satisface los siguientes cuatro axiomas:

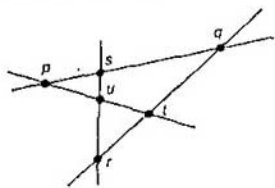


Fig. 7.14.

los siguientes cuatro axiomas:

*PG1*) dos puntos diferentes se ubican en una y sólo una recta;

*PG2*) si una recta corta dos lados de un triángulo (no en el punto de su intersección), entonces corta también su tercer lado (véase fig. 7.14);

*PG3*) cada recta contiene por lo menos tres puntos;

*PG4*) el conjunto de todos los puntos está engendrado por un subconjunto que contiene  $n$  puntos, y no es engendrado por ningún subconjunto con número inferior de puntos.

7.167. Muéstrase que una familia de subespacios de la geometría proyectiva forma un retículo puntual.

7.168. Muéstrase que cualesquiera dos rectas distintas de la geometría proyectiva de dimensión proyectiva  $n-1$  se intersecan en un punto, si  $n \leq 3$ .

7.169. Demuéstrase que un retículo de los subespacios de la geometría proyectiva de dimensión proyectiva  $n-1$  es isomorfo al retículo de subespacios de cierto espacio vectorial  $n$ -dimensional para  $n \geq 4$ .

7.170. Demuéstrase que el retículo de los subespacios de la geometría proyectiva es modular.

Así pues, en los problemas 7.167—7.170 se ha establecido que los retículos de los subespacios de una geometría proyectiva son retículos geométricos modulares.

Sea ahora  $M$  un retículo geométrico modular. Llamemos *recta* al elemento  $x \in M$  con  $r(x) = 2$  y *puntos* de la recta  $x$  a los átomos del intervalo  $[0, x]$ . De este modo, hemos definido la estructura de incidencia  $PG(M)$ .

7.171. Demuéstrase que la estructura de incidencia  $PG(M)$  satisface los axiomas *PG1*, *PG2* y *PG4*. ¿Podrá ser que en  $PG(M)$  no se cumpla el axioma *PG3*?

7.172. Demuéstrase que un retículo geométrico modular  $M$  es indesarrollable cuando y sólo cuando la estructura de incidencia  $PG(M)$  es una geometría proyectiva.

7.173. ¿Será cierto que cada retículo geométrico modular es un producto directo de un número finito de geometrías proyectivas?

Los retículos  $L$  que satisfacen para todos los  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in L$  la desigualdad

$$(a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \leq \\ \leq ((c \vee a_1) \wedge a_0) \vee ((c \vee b_1) \wedge b_0),$$

donde  $c = ((a_0 \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1)) \wedge (((a_0 \vee a_2) \wedge (b_0 \vee b_2)) \vee ((a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2)))$ , se denominan *arguesanos*.

7.174. Demuéstrase que del carácter arguesano de un retículo se deduce su modularidad.

7.175. Sea  $M$  un retículo geométrico modular. Demuéstrase que en la geometría proyectiva  $PG(M)$  se verifica el teorema de Desargues (véase el capítulo V, § 3) cuando y sólo cuando el retículo  $M$  satisface la identidad arguesana.

7.176. Sea  $M$  un retículo geométrico indesarrollable de longitud no inferior a 4. Demuéstrase que  $M$  es un retículo arguesano.

Sea  $L$  un retículo geométrico de longitud finita. Denotemos por  $E(i)$  el conjunto de todos los elementos de retículo  $L$  de rango  $i$ , y supongamos que  $W_i = |E(i)|$ . Es evidente que el conjunto  $E(i)$  es una anticadena del retículo  $L$ .

7.177. Sea  $L$  un retículo geométrico de longitud finita, en el cual cualquier elemento  $a$  de rango  $i$  se cubre por  $k_i$  elementos y cubre  $m_i$  elementos (los números  $k_i$  y  $m_i$  sólo dependen del rango  $i$ ). Demuéstrase que la anchura de  $L$  es igual a  $\max_{i:0 \leq i \leq r(L)} W_i$ .

7.178. Demuéstrase que si  $L$  es un retículo geométrico de rango  $n$ , entonces

$$W_1 \leq W_t \quad \text{para } t = 2, 3, \dots, n-1$$

y

$$W_1 + \dots + W_k \leq W_{n-k} + \dots + W_{n-1}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-2.$$

7.179. Sea  $L$  un retículo geométrico de rango  $n$ . Demuéstrase que para cualquier  $k = 1, 2, \dots, n-2$  la igualdad

$$W_1, \dots, W_k = W_{n-k} + \dots + W_{n-1}$$

se verifica si y sólo si el retículo  $L$  es modular.

7.180. Sea  $L$  un retículo geométrico modular de rango  $n$ . Demuéstrase que  $W_k = W_{n-k}$  para todo  $k = 0, 1, \dots, n$ .

### § 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius

Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito y sea  $K$  un campo de característica 0 (habitualmente, un campo de los números reales). Veamos una clase  $A(P)$  de funciones  $f(x, y)$  que toman valores en el campo  $K$  y que están definidas para cualesquiera  $x, y \in P$ . Exijamos que  $f(x, y) = 0$ , si no se cumple la condición

$x \leq y$ . La suma de dos tales funciones, como también la multiplicación por los escalares se definirán del modo siguiente:

$$\begin{aligned}(f + g)(x, y) &= f(x, y) + g(x, y) \\ (\alpha \cdot f)(x, y) &= \alpha \cdot f(x, y);\end{aligned}$$

mientras que el producto (o convolución)  $f * g$  se definirá así:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y).$$

La convolución está definida correctamente, pues, por ser localmente finito el conjunto parcialmente ordenado  $P$ , en el segundo miembro es finito el número de sumandos y  $(f * g)(x, y) = 0$  cada vez que  $x \not\leq y$ .

El conjunto  $A(P)$  con operaciones de sumación, multiplicación por escalares y convoluciones recibe el nombre de *álgebra de incidencia del conjunto parcialmente ordenado  $P$  sobre el campo  $K$* , y sus elementos, de *funciones de incidencias* del conjunto  $P$ . Entre las funciones de incidencia en  $A(P)$  destaquemos las siguientes:

función de Kronecker (o bien función delta)

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

función zeta

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

función lambda

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y, \text{ o bien } y \text{ cubre } x; \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

función de las cadenas (o bien función eta)

$$\eta(x, y) = \xi(x, y) - \delta(x, y);$$

función de recubrimiento (o bien función kappa)

$$\kappa(x, y) = \lambda(x, y) - \delta(x, y);$$

función de Moebius

$$\mu(x, y) = \xi^{-1}(x, y);$$

función de la longitud (o bien función rho)

$$\rho(x, y) = l(x, y),$$

donde  $l(x, y)$  es la longitud del intervalo  $[x, y]$  en  $P$ . Las razones que nos hacen destacar estas funciones y sus nombres se aclararán después de resolver algunos problemas correspondientes.

7.181. Compruébese que la convolución de las funciones de incidencia es asociativa y la función de Kronecker sirve de elemento neutral respecto de la convolución.

7.182. Pruébese que una convolución en  $A(P)$  es conmutativa cuando y sólo cuando  $P$  es una anticadena.

7.183. Demuéstrase que una función de incidencia  $f$  en  $A(P)$  tiene tanto la función inversa izquierda como la función inversa derecha respecto de la operación de convolución cuando y sólo cuando  $f(x, x) \neq 0$  para todo  $x \in P$ . ¿Coincidirán entre sí las funciones inversas derecha e izquierda?

7.184. ¿Por qué es correcta la definición de la función de Moebius como función inversa de la función zeta?

7.185. Compruébese que la función de Moebius  $\mu(x, y)$  de un conjunto parcialmente ordenado localmente finito  $P$  puede ser calculada de un modo recurrente con ayuda de la fórmula:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \not\leq y; \\ 1, & \text{si } x = y; \\ - \sum_{x < z \leq y} \mu(z, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z), & \end{cases}$$

si  $x < y$ .

7.186. Sea  $P^*$  un conjunto parcialmente ordenado dual respecto de  $P$  y supongamos que  $f(x, y) \in A(P)$ , y  $f^*(x, y) \in A(P^*)$ . Compruébese que  $f^*(x, y) = f(x, y)$  para cualesquiera  $x, y \in P$ , cuando  $f(x, y)$  es una de las funciones de incidencia analizadas más arriba.

7.187. Demuéstranse las siguientes identidades:

$$a) \zeta^n(x, y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \eta^i(x, y);$$

$$\eta^n(x, y) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{k}{i} \zeta^i(x, y);$$

$$b) \lambda^n(x, y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \kappa^i(x, y);$$

$$\kappa^n(x, y) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \lambda^i(x, y);$$

c)  $(\kappa * \zeta)(x, y)$  = al número de todos los átomos en el intervalo  $[x, y]$  de  $P$ ;

d)  $(\zeta * \kappa)(x, y)$  = al número de todos los cóatomos en el intervalo  $[x, y]$  de  $P$ ;

e)  $\eta^k(x, y)$  = al número de todas las cadenas de longitud  $k$  entre  $x$  e  $y$  en  $P$ ;

f)  $\kappa^k(x, y)$  = al número de todas las cadenas máximas de longitud  $k$  entre  $x$  e  $y$  en  $P$ ;

g)  $\xi^2(x, y) = |[x, y]|$ .

7.188. Demuéstrase el *teorema de Stanley*: sean  $P$  y  $Q$  los conjuntos parcialmente ordenados localmente finitos y sea  $K$  cierto campo. Entonces, si las álgebras de incidencia  $A(P)$  y  $A(Q)$  sobre el campo  $K$  son isomorfas, lo serán también los conjuntos parcialmente ordenados  $P$  y  $Q$ .

Muy a menudo se considera en las aplicaciones no toda el álgebra de incidencia  $A(P)$  en su integridad, sino ciertas subálgebras, exigiendo que las funciones de incidencia tengan o valores constantes en los intervalos isomorfos del conjunto ordenado  $P$ , o bien la llamada multiplicatividad. Supongamos que  $P$  es un retículo. La función de incidencia  $f \in A(P)$  se llama multiplicativa, si para cualesquiera  $x, y \in P$  de la condición

$$[x \wedge y, x \vee y] \cong [x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y]$$

se deduce que

$$f(x \wedge y, x \vee y) = f(x \wedge y, x) \cdot f(x \wedge y, y).$$

Como ejemplos de funciones multiplicativas de incidencia para los retículos intervienen  $\delta$ ,  $\xi$  y  $\xi^2$ .

7.189. Demuéstrase que si  $f$  es una función inversa multiplicativa de  $A(P)$ , entonces  $f(x, x) = 1$ , cualquiera que sea  $x \in P$ .

7.190. Sea  $S(P)$  un subconjunto de todas las funciones de incidencia  $f \in A(P)$ , para las cuales del isomorfismo de cualesquiera intervalos  $[x, y]$  y  $[a, b]$  en un conjunto parcialmente ordenado  $P$  se deduce que  $f(x, y) = f(a, b)$ . Demuéstrase que  $S(P)$  es una subálgebra del álgebra de incidencia  $A(P)$  que lleva el nombre de *álgebra estándar*.

7.191. Compruébese que si una función de incidencia pertenece al álgebra estándar  $S(P)$  y es invertible en  $A(P)$ , será invertible también en  $S(P)$ .

7.192. ¿Pertencerán al álgebra estándar  $S(P)$  de un conjunto parcialmente ordenado  $P$  todas las funciones examinadas más arriba?

7.193. Sea  $P$  un retículo. Demuéstrase que todas las funciones invertibles multiplicativas de  $S(P)$  forman un grupo respecto de la operación de convolución.

7.194. Calcúlense las funciones de Moebius para los siguientes conjuntos parcialmente ordenados:

- anticadena;
- subconjunto  $N = \{0, 1, \dots, k\}$  de números enteros con orden corriente;
- booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ ;
- conjunto de todos los divisores enteros no negativos de un número natural  $n$ , ordenado según la divisibilidad;
- belliano  $B(S_n)$  sobre el conjunto  $S_n$ , donde  $|S_n| = n$ ;

f) conjunto de todos los subespacios de un espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V_n$  sobre un campo finito con  $q$  elementos, ordenado por inclusión;

g) conjunto de todas las caras de un poliedro  $\Pi_n$  ordenado por inclusión.

7.195. Demuéstrase la 1ª fórmula de inversión de Moebius: supongamos que  $g$  y  $f$  son las funciones definidas en el conjunto finito parcialmente ordenado  $P$  con valores en el conjunto de números reales y que

$$g(x) = \sum_{y: y \leq x} f(y) \quad \text{para todo } x \in P.$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y: y \leq x} g(y) \mu(y, x) \quad \text{para todo } x \in P.$$

7.196. Demuéstrase la 2ª fórmula de inversión de Moebius: sean  $g$  y  $f$  unas funciones definidas sobre un conjunto finito parcialmente ordenado  $P$  con valores en el conjunto de números reales y supongamos que

$$g(x) = \sum_{y: y \geq x} f(y) \quad \text{para } x \in P.$$

Entonces

$$f(x) = \sum_{y: y \geq x} \mu(x, y) g(y) \quad \text{para todo } x \in P.$$

7.197. Las fórmulas de inversión de Moebius son válidas también para los conjuntos parcialmente ordenados y localmente finitos. En este caso, con el fin de garantizar la finitud de las sumas, se impone una condición adicional. Formúlen su propia versión de una de las fórmulas de inversión de Moebius para el conjunto parcialmente ordenado y localmente finito.

7.198. Sean  $g$  y  $f$  las funciones reales, definidas sobre un conjunto  $N = \{0, 1, \dots, n\}$  con orden corriente. Cerciórese de que para  $\forall m \in N$  se verifican las relaciones:

$$a) \quad g(m) = \sum_{i=0}^m f(i) \Leftrightarrow f(m) = g(m) - g(m-1);$$

$$b) \quad g(m) = \sum_{i=m}^n f(i) \Leftrightarrow f(m) = g(m) - g(m+1).$$

7.199. Sean  $g$  y  $f$  las funciones reales definidas sobre un booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ . Cerciórese de que para  $\forall B \in \mathcal{P}(S_n)$  se verifican las siguientes relaciones:

$$a) \quad g(B) = \sum_{A: A \subseteq B} f(A) \Leftrightarrow f(B) = \sum_{A: A \subseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A);$$

$$b) \quad g(B) = \sum_{A: A \supseteq B} f(A) \Leftrightarrow f(B) = \sum_{A: A \supseteq B} (-1)^{|B|-|A|} g(A).$$

Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado y  $|P| = n$ . Hagamos extender el orden prefijado en éste hasta que se obtenga el orden lineal, el cual dispondrá los elementos del conjunto  $P$  en una sucesión finita  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de un modo tal que si  $x_i \leq x_j$  en  $P$ , entonces  $i \leq j$  (véase el problema 7.34). Ahora, a toda función de incidencia  $f(x, y)$  de  $A(P)$  pongámosle en correspondencia una matriz  $F = (f_{ij})$   $i, j = 1 - n$  con elementos del campo  $K$ , en la cual las filas y las columnas están coordinadas con la numeración de los elementos de  $P$ , a saber:

$$f_{ij} = f(x_i, x_j),$$

7.200. Escribáse la matriz de la función zeta para los siguientes conjuntos parcialmente ordenados:

- el booleano  $\mathcal{P}(S_3)$ , donde  $S_3 = \{a, b, c\}$ ;
- la cadena de 5 elementos;
- la anticadena de 5 elementos.

¿Pará que la matriz de una función de incidencia no sea triangular superior?

7.201. Muéstrase que si  $P$  es un conjunto finito parcialmente ordenado, la matriz de incidencia  $A(P)$  puede ser considerada como subálgebra del álgebra de todas las matrices triangulares de orden  $|P|$ .

7.202. Sean  $\Delta, Z, H$  y  $M$  las matrices de la función de Kronecker, de la función zeta, de la función de cadenas y de la de Moebius provenientes de  $A(P)$ , respectivamente. Supongamos, además, que  $E$  es la matriz unidad y  $0$ , una matriz compuesta únicamente de ceros. Enúnciese la afirmación del problema 7.183 para las matrices triangulares superiores. Compruébese que  $\Delta = E$ ;  $H^k = 0$  para todo  $k > l$ , y  $M = Z^{-1}(\Delta + H)^{-1} = E - H + H^2 - H^3 + \dots + (-1)^l H^l$ , donde  $l$  es la longitud del conjunto parcialmente ordenado  $P$ . Observemos que  $l < n$ .

7.203. Sean  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado,  $\mu(x, y)$ , su función de Moebius y  $C_k(x, y)$ , el número de cadenas de longitud  $k$  entre los elementos  $x$  y  $y$  en  $P$ . Demuéstrase la fórmula de  $P. Hall$ :

$$\mu(x, y) = \begin{cases} \sum_{h=1}^l (-1)^h C_h(x, y), & \text{si } x < y; \\ 1, & \text{si } x = y; \\ 0, & \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

donde  $l$  es la longitud del conjunto parcialmente ordenado  $P$ .

7.204. Supongamos que  $A$  es un conjunto parcialmente ordenado,  $\varphi$ , el operador de clausura en  $A$ , y  $Q$ , un conjunto parcialmente ordenado de todos los elementos  $\varphi$ -cerrados de  $A$ . Demuéstrase el teorema de Rota:

$$\sum_{z \in A: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \begin{cases} {}^{1Q} \mu(\varphi(x), \varphi(y)), & \text{si } x = \varphi(x); \\ 0, & \text{si } x < \varphi(x). \end{cases}$$



7.205. Supongamos que  $\mathcal{P}(S)$  es un booleano sobre el conjunto finito  $S$ ;  $\varphi$  es el operador de clausura definido en  $\mathcal{P}(S)$ , y  $Q$ , un conjunto de todos los subconjuntos  $\varphi$ -cerrados del conjunto  $S$ , con la particularidad de que  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ . Demuéstrase que si  $r_k$  es el número de  $k$ -subconjuntos  $X$  del conjunto  $S$ , para los cuales  $\varphi(X) = S$ , entonces

$$\mu_Q(0, 1) = \sum_{k=1}^{|S|} (-1)^k r_k.$$

El problema que sigue, en el que están formulados los resultados del teorema de P. Hall (Hall P. "Proc. London Math. Soc.", 1934, 36 (2), p. 29 —95) es de gran importancia desde el punto de vista teórico, pues establece la relación entre la propiedad de la función de Moebius de ser distinta de cero y las propiedades del retículo de ser puntual o con complementos.

7.206. Sea  $L$  un retículo finito. Demuéstranse las afirmaciones de P. Hall:

a) si  $0$  no es una intersección de los coátomos del retículo  $L$ , o bien si  $1$  no es una unión de los átomos del retículo  $L$ , entonces  $\mu(0, 1) = 0$ ;

b) si  $x, y \in L$ ,  $x \leq y$ , e  $y$  no son una unión de elementos que cubren  $x$ , o si  $x$  no es una intersección de los elementos que se cubren por  $y$ , entonces  $\mu(x, y) = 0$ .

7.207. Sea  $L$  un retículo finito. ¿Serán válidas las siguientes afirmaciones:

a) si  $\mu(0, 1) \neq 0$ , entonces  $L$  es un retículo con complementos;

b) si  $\mu(x, y) \neq 0$  para cualesquiera  $x, y \in L$ ,  $x \leq y$ , entonces  $L$  es un retículo con complementos relativos;

c) si  $L$  es un retículo semimodular y si  $\mu(0, 1) \neq 0$ , entonces  $L$  es un retículo geométrico;

d) si  $L$  es un retículo con complementos (relativos), entonces  $\mu(0, 1) \neq 0$ ;

e) si  $L$  es un retículo geométrico, entonces  $\mu(x, y) \neq 0$  para cualesquiera  $x, y \in L$  y  $x \leq y$ .

7.208. Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) si  $L$  es un retículo distributivo, entonces

$$\mu(0, 1) = \begin{cases} (-1)^{r(L)}, & \text{si } L \text{ es un retículo geométrico;} \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$$

b) si  $L$  es un retículo modular indesarrollable, entonces

$$\mu(0, 1) = \begin{cases} (-1)^{r(L)} q^{\binom{r(L)}{2}}, & \text{si } L \text{ es un retículo geométrico} \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

donde  $q$  es la potencia de cierto número primo.

7.209. Sea  $L$  un retículo finito y supongamos que  $a \in L$  y  $a^\perp$  es un conjunto de todos los complementos de  $a$  en  $L$ . Demuéstrese el teorema de Crapo:

$$\mu(0, 1) = \sum_{w, z \in a^\perp} \mu(0, w) \zeta(w, z) \mu(z, 1).$$

7.210. Sea  $L$  un retículo finito y supongamos que  $x, y, z \in L$  y  $x \leq z \leq y$ . Demuéstrese la fórmula de Weisner:

$$\sum_{t \in L: t \vee z = y} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{si } z = x, \\ 0, & \text{si } z \neq x. \end{cases}$$

7.211. Sea  $L$  un retículo finito. Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

a) si  $a \in L$  y  $a > 0$ , entonces para todo  $b \in L$

$$\sum_{t \in L: t \vee a = b} \mu(0, t) = 0;$$

b) si  $a \in L$  y  $a < 1$ , entonces para todo  $b \in L$

$$\sum_{t \in L: t \wedge a = b} \mu(t, 1) = 0.$$

7.212. Sea  $L$  un retículo finito. Demuéstrese que son válidas las siguientes afirmaciones:

a) si  $L$  carece de complementos, entonces  $\mu(0, 1) = 0$ ;

b) si  $L$  es modular, entonces  $\mu(0, 1) = \mu(0, a) \times \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z)$ ,

para todo  $a \in L$ ;

c) si  $L$  es un retículo geométrico,  $x, y \in L$  y  $x \leq y$ , entonces  $\mu(x, y) \neq 0$ , con la particularidad de que  $\mu(x, y) > 0$ , si  $r(y) - r(x)$  es par, y  $\mu(x, y) < 0$ , si  $r(y) - r(x)$  es impar;

d) si  $L$  es distributivo,  $x, y \in L$  y  $x \leq y$ , entonces

$$\mu(x, y) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{si } y \text{ es igual a la unión de } n \text{ elementos} \\ & \text{diferentes que cubren } x; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Sean  $P$  y  $L$  los conjuntos parcialmente ordenados. Un par  $(\sigma, \tau)$  de aplicaciones  $\delta: P \rightarrow L$  y  $\tau: L \rightarrow P$  se llama correspondencia de Galois entre  $P$  y  $L$ , si para cualesquiera  $x, y \in P$  y cualesquiera  $a, b \in L$  se cumplen las siguientes condiciones:

a) si  $x \leq y$  en  $P$ , entonces  $\sigma(x) \geq \sigma(y)$  en  $L$ ;

b) si  $a \leq b$  en  $L$ , entonces  $\tau(a) \geq \tau(b)$  en  $P$ ;

c)  $x \leq \tau\sigma(x)$  para cualesquiera  $x \in P$  y  $a \leq \sigma\tau(a)$  para todo  $a \in L$ .

7.213. Sea  $R$  una relación binaria,  $R \subseteq S \times T$ . Definamos la aplicación  $\sigma: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(T)$  del modo siguiente:

$$\sigma(A) = \begin{cases} \{z \in T \mid (x, z) \in R \text{ para todo } x \in A, \text{ si } A \neq \emptyset; \\ T, & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$

De un modo análogo definamos la aplicación  $\tau: \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ . Demuéstrase que  $(\sigma, \tau)$  es la correspondencia de Galois entre los booleanos  $\mathcal{P}(S)$  y  $\mathcal{P}(T)$ .

7.214. Sea  $(\sigma; \tau)$  una correspondencia de Galois entre los conjuntos parcialmente ordenados  $P$  y  $L$ . Demuéstrase que:

a)  $\sigma\tau\sigma = \sigma$  y  $\tau\sigma\tau = \tau$ ;

b)  $\tau\sigma$  y  $\sigma\tau$  son operadores de clausura sobre  $P$  y  $L$ , respectivamente.

7.215. Sean  $P$  y  $L$  conjuntos finitos parcialmente ordenados ( $P$  posee 0, y  $L$  posee tanto 0 como 1), en tanto que  $(\sigma, \tau)$  es una correspondencia de Galois entre  $P$  y  $L$  tal que

a)  $\tau(a) = 0$  cuando y sólo cuando  $a = 1$ ;

b)  $\sigma(0) = 1$ .

Demuéstrase que si  $\mu_P$  y  $\mu_L$  son funciones de Moebius de los conjuntos parcialmente ordenados  $P$  y  $L$ , entonces

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(\sigma(x), 0) = \sum_{x \in P: \sigma(x) = 0} \mu_P(0, x)$$

7.216. Sean  $f: P \rightarrow L$ ,  $g: L \rightarrow P$  unas funciones que conservan el orden entre  $P$  y  $L$  (el conjunto parcialmente ordenado  $P$  posee 1, y  $L$ , tanto 0, como 1), tales que

a)  $g(a) = 1$  cuando y sólo cuando  $a = 1$ ;

b)  $f(1) = 1$ ;

c)  $fg(a) \geq a$  para todo  $a \in L$  y  $gf(x) \leq x$  para todo  $x \in P$ .

Demuéstrase que en este caso

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P: x < 1} \mu_P(x, 1) \zeta_L(f(x), 0) = \sum_{x \in P: f(x) = 0} \mu_P(x, 1).$$

7.217. Demuéstrase que si  $(\sigma, \tau)$  es una correspondencia de Galois entre los conjuntos parcialmente ordenados  $P$  y  $L$ , entonces para todo  $x \in P$  y todo  $y \in L$  se verifica la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \sum_{z \in P: \sigma(z) = y} \mu_P(x, z) &= \sum_{u \in L: \tau(u) = x} \mu_L(y, u) = \\ &= \begin{cases} \mu_P(x, \tau(y)), & \text{si } x = \tau\sigma(x) \text{ e } y = \sigma\tau(y); \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

#### § 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados

7.218. Está dado un alfabeto  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . ¿Cuántas palabras de longitud  $2n$  pueden formarse a partir de él, con la particularidad de que las palabras han de contener una letra exactamente dos veces y, además, no debe haber al lado dos letras iguales?

7.219. Supongamos que se tiene un stock ilimitado de cuentas de vidrio que tienen colores distintos. ¿Cuántos collares diferentes pueden confeccionarse a partir de  $n$  cuentas? Los collares se consideran

iguales, si se obtienen uno de otro por desplazamiento cíclico de las cuentas.

7.220. A una mesa redonda han de sentarse  $n$  cónyuges. ¿De cuántos modos puede hacerse, si se requiere que los varones y las mujeres se alternen y que ningún marido se sitúe al lado de su esposa.

7.221. Sea  $L(G)$  un conjunto de todos los subgrafos del grafo  $G$  obtenidos a partir de  $G$  haciendo encoger cierto subconjunto de sus aristas. Diremos que  $H \leq T$  en  $L(G)$ ,  $H, T \in L(G)$ , si  $H$  es un subgrafo del grafo  $T$ . Demuéstrese que  $(L(G), \leq)$  es un retículo geométrico.

7.222. Sea  $L(G)$  un conjunto de todos los subgrafos del grafo  $G$  que se obtienen de  $G$  por contracción de cierto subconjunto de sus aristas (véase el problema 7.221). Demuéstrese que

$$P(G; \lambda) = \sum_{H \in L(G): H \leq G} |\lambda|^{V(H)} \mu(H, G),$$

donde  $V(H)$  es el conjunto de vértices del grafo  $H$ ;  $\mu(H, G)$  es la función de Moebius del retículo geométrico  $L(G)$ .

Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado con 0, 1 y la función de rango  $r$ . El polinomio  $\chi(P; x) = \sum_{a \in P} \mu(0, a) x^{r(1)-r(a)}$  se llama *polinomio característico del conjunto parcialmente ordenado*  $P$ .

7.223. Hállense los polinomios característicos:

a) para un booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ ;

b) para un conjunto parcialmente ordenado  $\mathcal{D}(n)$  de divisores de un número natural ordenados según la divisibilidad.

7.224. Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado con 0 y 1 que cuenta con una función de rango  $r$ . Demuéstrese que si  $P = P_1 \times P_2$ , entonces  $\chi(P; x) = \chi(P_1; x) \chi(P_2; x)$ .

7.225. Hállense los polinomios característicos para los conjuntos parcialmente ordenados estudiados en el § 1 de este capítulo.

En vista de los razonamientos evidentes (véase el problema 7.222),  $P(G, \lambda)$  se denomina *polinomio cromático del grafo*  $G$ . La relación existente entre los polinomios cromáticos y característicos, así como también los polinomios característicos para el caso en que  $P$  es un retículo geométrico, se analizarán detalladamente en el capítulo VIII. Sea  $V_n$  un espacio vectorial de  $n$  dimensión sobre el campo  $GF(q)$ ;  $G(n, q)$ , el número de Galois (el número de todos los espacios de  $V_n$ ) y  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q$ , el coeficiente  $q$ -binomial de Gauss (el número de espacios de  $k$ -dimensiones de  $V_n$ ) (véase la solución del problema 7.33).

7.226. Compruébese la validez de las siguientes relaciones:

a)  $|V_n| = q^n$ ;

b)  $G(n, q) = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q$ ;

$$c) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \frac{\prod_{i=1}^n (q^i - 1)}{\prod_{i=1}^k (q^i - 1) \prod_{i=1}^{n-k} (q^i - 1)}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n;$$

$$d) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \left[ \begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix} \right]_q, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n;$$

$$e) \left[ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right]_q < \left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right]_q < \dots < \left[ \begin{matrix} n \\ \frac{n}{2} \end{matrix} \right]_q > \left[ \begin{matrix} n \\ \frac{n}{2} + 1 \end{matrix} \right]_q > \dots > \left[ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right]_q, \text{ si}$$

$n$  es par, y

$$\left[ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right]_q < \left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right]_q < \dots < \left[ \begin{matrix} n \\ \frac{n-1}{2} \end{matrix} \right]_q = \left[ \begin{matrix} n \\ \frac{n+1}{2} \end{matrix} \right]_q > \dots > \left[ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right]_q,$$

si  $n$  es impar;

$$f) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q + q^k \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_q, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n;$$

$$g) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \frac{q^{n-k}}{q^{k-1}} \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n;$$

$$h) \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \left[ \begin{matrix} 2m \\ r \end{matrix} \right]_q = (1-q)(1-q^3) \dots (1-q^{2m-1});$$

$$i) \sum_{r=0}^{2m+1} (-1)^r \left[ \begin{matrix} 2m+1 \\ r \end{matrix} \right]_q = 0;$$

$$j) G(n+1, q) = 2G(n, q) + (q^n - 1)G(n-1, q);$$

$$k) 1 = \sum_{h=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ h \end{matrix} \right]_q G(h, q) (-1)^{n-h} q^{\binom{n-h}{2}}.$$

7.227. Sea  $a$  un átomo arbitrario (hiperplano en  $V_n$ ) en el retículo  $L(V_n)$  de los subespacios de un espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V_n$  sobre el campo  $GF(q)$ . ¿Cuán grande puede ser el número de subespacios  $x$  de  $V_n$  con las propiedades  $a \wedge x = 0$  y  $r(x) \neq 0$  en  $L(V_n)$ ? Recordemos que en los retículos modulares la función de rango coincide con la dimensión.

7.228. ¿Cuán grande puede ser el número de subespacios disjuntos dos a dos del espacio  $V_n$  de dimensión  $k$ ? ¿Cómo puede ser de grande este número si la condición es que la dimensión de una intersección no es inferior a  $l$ ?

7.229. Si  $d_1, \dots, d_m$  son divisores distintos del número  $N$ , entre los cuales cualesquiera dos tienen divisor común superior a la unidad, ¿Cuán grande puede ser  $m$ ?

7.230. Supongamos que  $\mathcal{B}(S_n)$  es un belliano sobre el  $n$ -conjunto  $S_n$ ,  $\pi, \sigma \in \mathcal{B}(S_n)$ ,  $\pi \leq \sigma$  y  $b(\sigma)$  es el número de bloques en la partición  $\sigma$ . Demuéstrese que  $|\pi\sigma| \cong \prod_{i=1}^{b(\sigma)} \mathcal{B}(S_{m_i})$  para ciertos números no negativos  $m_i$  tales que  $\sum_{i=1}^{b(\sigma)} m_i = b(\pi)$ . En particular,

$[\pi, 1] \cong \mathcal{B}(S_{b(\pi)})$  y  $[0, \pi] \cong \prod_{i=1}^{b(\pi)} \mathcal{B}(S_{n_i})$ , donde  $\pi = (A_1, \dots, A_{b(\pi)}) \in \mathcal{B}(S_n)$  y  $|A_i| = n_i$ ;  $i = 1, \dots, b(\pi)$ .

El problema 7.230 permite introducir para cualesquiera  $\pi, \sigma \in \mathcal{B}(S_n)$  de un modo formal el concepto de tipo del intervalo  $[\pi, \sigma]$  y de tipo del elemento  $\pi$ :

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  es el tipo del intervalo  $[\pi, \sigma]$ ,

$$\text{si } [\pi, \sigma] = \prod_{i=1}^n [\mathcal{B}(S_i)]^{\alpha_i},$$

y

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  es el tipo de la partición  $\pi$ ,

$$\text{si } [0, \pi] \cong \prod_{i=1}^n [\mathcal{B}(S_i)]^{\alpha_i},$$

es decir, si  $\pi$  contiene exactamente  $\alpha_i$  bloques de potencia  $i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

7.231. ¿Cuántos elementos del tipo fijo  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  están contenidos en un belliano  $\mathcal{B}(S_n)$ ?

7.232. Sea  $\pi = (A_1, \dots, A_{b(\pi)}) \in \mathcal{B}(S_n)$ ,  $|A_i| = n_i$  para  $i = 1, 2, \dots, b(\pi)$  y  $\sum_{i=1}^{b(\pi)} n_i = n$ . Hállense  $|\{0, \pi\}|$  y  $|\{\pi, 1\}|$ .

Supongamos que  $\mathcal{B}(S_n)$  es un belliano sobre el  $n$ -conjunto  $S_n$ ;  $B(n)$  es el número de Bell (el número de todas las particiones de  $\mathcal{B}(S_n)$ ), y  $S(n, k)$ , el número de Stirling de segundo genero (número de todas las particiones de  $\mathcal{B}(S_n)$  con  $k$  bloques exactamente).

7.233. Demuéstrese la validez de las siguientes identidades:

a)  $B(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ ;

b)  $S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ ;

c)  $S(n+1, k) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} S(j, k-1)$ ;

d) existe un  $k$  tal que

$$S(n, 0) < S(n, 1) < \dots < S(n, k-1) \leq S(n, k) > S(n, k+1) > \dots \\ \dots > S(n, n);$$

$$e) B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k);$$

$$f) 1 = \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} (k-1)! \times$$

$$\times \sum_{\substack{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = h}} \frac{n! B(1)^{\alpha_1} \dots B(n)^{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}}$$

7.234. Demuéstrese que el número de grafos conexos simples con vértices  $\{1, 2, \dots, n\}$  es igual a

$$\sum_{(b_1, \dots, b_n): \sum_{i=1}^n i b_i = n} (-1)^{\sum_{i=1}^n b_i - 1} \left( \left( \sum_{i=1}^n b_i \right) - 1 \right)! 2^{\sum_{i=2}^n (b_i \binom{i}{2})}$$

Sea  $K$  un retículo distributivo con 0 y 1. Una función real  $\mu$ , definida en  $K$ , recibe el nombre de *función submodular*, si para cualesquiera  $x, y \in K$

$$\mu(x) + \mu(y) \geq \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y).$$

Si para cualesquiera  $x, y \in K$  se verifica la igualdad

$$\mu(x) + \mu(y) = \mu(x \vee y) + \mu(x \wedge y),$$

$\mu$  será *función modular*.

7.235. Dense ejemplos de funciones modulares y submodulares.

7.236. Sean  $L$  un subretículo del retículo distributivo  $K$ ,  $\mu$ , una función submodular en  $K$  y,  $a, b \in L$  tales que

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

Demuéstrese que para todo  $x \in [a \wedge b, a \vee b]$  se verifican las siguientes igualdades:

$$a) \mu(x) + \mu(a) = \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a);$$

$$b) \mu(x) + \mu(b) = \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b);$$

$$c) \mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(x) + \mu(a \wedge b);$$

$$d) \mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) = \mu(a \vee b) + \mu(x).$$

7.237. Sea  $L$  un subretículo del retículo distributivo  $K$  tal que para cualesquiera  $a, b \in L$  se verifica la desigualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b).$$

Demuéstrase que si  $a, a', b, b' \in L$  y  $[a, a'] \sim [b, b']$ , entonces

$$\mu(x) - \mu(\pi(x)) = \mu(a) - \mu(b) = \mu(a') - \mu(b')$$

para todo  $x \in [a, a']$  en  $K$ , donde  $\pi$  es un isomorfismo natural de  $[a, a']$  en  $[b, b']$ , condicionado por la proyectividad de los intervalos.

Supongamos que  $\mu$  es una función submodular sobre  $K$ ;  $L$ , un subretículo del retículo  $K$  con un elemento minimal  $a^-$  y en elemento maximal  $a^+$ ;  $a^- = a_0, a_1, \dots, a_n = a^+$ , y  $a^- = a'_0, a'_1, \dots, a'_m = a^+$  son cadenas máximas arbitrarias que en  $L$  van de  $a^-$  a  $a^+$  ( $n = m$ , en virtud del problema 7.109). Definamos en  $K$  dos funciones nuevas  $\mu_i$  y  $\mu'_i$  del modo siguiente:

$$\mu_i(x) = \mu(x) - \mu(a_{i-1}) \quad \text{para todo } x \in [a_{i-1}, a_i], \quad (7.3)$$

$$\mu'_i(x) = \mu(x) - \mu(a'_{i-1}) \quad \text{para todo } x \in [a'_{i-1}, a'_i], \quad (7.4)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Si los intervalos  $[0, a^-]$  y  $[a^+, 1]$  no son vacíos definamos en ellos adicionalmente las funciones  $\mu_i$  y  $\mu'_i$  de un modo igual, poniendo

$$\mu_0(x) = \mu'(x) = \mu(x) \quad \text{para } x \in [0, a^-], \quad (7.5)$$

$$\mu_{n+1}(x) = \mu'_{n+1}(x) = \mu(x) - \mu(a^+) \quad \text{para todo } x \in [a^+, 1] \quad (7.6)$$

7.238. Supongamos que  $L$  es un subretículo del retículo distributivo finito  $K$ ;  $\mu$  es una función submodular sobre  $K$ ;  $\mu_i(x)$  y  $\mu'_i(x)$  son funciones en  $K$  definidas, al igual que en (7.3) y (7.4), con ayuda de dos diferentes cadenas máximas  $a^- = a_0, a_1, \dots, a_n = a^+$  y  $a^- = a'_0, a'_1, \dots, a'_n = a^+$  del retículo  $L$ ;  $\sigma$  es la permutación de índices  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $[a_{i-1}, a_i] \sim [a_{\sigma(i)-1}, a'_{\sigma(i)}]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $\sigma$  está definida unívocamente, en virtud del problema 7.146);  $\pi$  es el isomorfismo natural de  $[a_{i-1}, a_i]$  en  $[a'_{\sigma(i)-1}, a'_{\sigma(i)}]$ , condicionado por la proyectividad de los intervalos. Demuéstrase la *condición de Jordan—Hölder para las funciones submodulares*: para todo  $x \in [a_{i-1}, a_i]$  y cualquier  $i, i = 1, \dots, n$ , la igualdad  $\mu_i(x) = \mu'_{\sigma(i)}(\pi_i(x))$  se verifica cuando y sólo cuando  $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \wedge b) + \mu(a \vee b)$ , cualesquiera que sean  $a, b \in L$ .

Un subretículo  $L$  del retículo distributivo  $K$  se denomina  $\mu$ -esqueleto, si para la función submodular  $\mu$ , definida sobre  $K$ , se verifica la igualdad

$$\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b),$$

cualesquiera que sean  $a, b \in L$ .

7.239. Sea  $\mu$  una función submodular sobre el booleano  $\mathcal{F}(S)$ . Demuéstrase que si un subretículo  $L$  del booleano  $\mathcal{F}(S)$  es un  $\mu$ -esqueleto, la familia de funciones submodulares  $\{\mu_i; i = 0, 1, \dots, n, n+1\}$  definidas según las fórmulas (7.3—7.6) no depende de la elección de las cadenas máximas en  $L$ .



Sea que  $\mu(x) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x)$ , donde  $\mu_i(x)$  son funciones submodulares sobre el retículo distributivo  $K$  y  $c_i > 0$  para todo  $i, i = 1, 2, \dots, m$ .

7.240. ¿Será la  $\mu(x)$  una función submodular sobre  $K$ ?

7.241. Sea  $\min \{\mu(x)\} = w$ . Demuéstrese que si para ciertos  $y_1, y_2 \in K$   $\mu(y_1) = \mu(y_2) = w$ , entonces  $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$ .

7.242. En el problema anterior se ha establecido que la familia  $L$  de todos los elementos del retículo distributivo  $K$ , sobre los cuales la función submodular  $\mu$  alcanza su mínimo, forma el  $\mu$ -esqueleto del retículo  $K$ . Compruébese que  $L$  es también  $\mu_i$ -esqueleto para todo  $i, i = 1, \dots, m$ .

El  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ -esqueleto obtenido  $L$  del retículo  $K$  depende no sólo de las funciones submodulares  $\mu_i$ , sino también de los coeficientes positivos  $c_i$ . Por eso denotemos el  $\mu$ -esqueleto  $L$  por  $L(c_1, \dots, \dots, c_m)$ , subrayando su dependencia de  $c_1, \dots, c_m$ . Entonces  $L(c'_1, \dots, c'_m)$  será el  $\mu'$ -esqueleto del retículo  $K$ , donde  $\mu'(x) = \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(x)$ . Es evidente que

$$L(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_m) = L(c_1, \dots, c_m) \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

7.243. Supongamos que  $y \in L(c_1, \dots, c_m)$  e  $y' \in L(c'_1, \dots, \dots, c'_m)$ , con la particularidad de que las funciones submodulares  $\mu_i(x)$  son, para  $i = 1, 2, \dots, p$ , no decrecientes y, además son no crecientes cuando  $i = p + 1, \dots, q$ , mientras que los coeficientes  $c_i$  y  $c'_i$  están ligados entre sí por las desigualdades:  $c_i \geq c'_i$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $c_i \leq c'_i$  para  $i = p + 1, \dots, q$ , y  $c_i = c'_i$ , cuando  $i = q + 1, \dots, m$ . Demuéstrese que  $y \wedge y' \in L(c_1, \dots, c_m)$ ,  $y \vee y' \in L(c'_1, \dots, c'_m)$  y  $\mu_i(y) + \mu_i(y') = \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')$  para todo  $i, i = 1, 2, \dots, m$ .

## MATROIDES

El presente capítulo está dedicado a los sistemas de conjuntos de tipo especial que llevan el nombre de matroides.

Los matroides surgen en los más diversos contextos combinatorios y algebraicos. Tales conceptos como son la independencia y la base en los espacios vectoriales, la dependencia algebraica, los ciclos en los grafos, las superficies en las geometrías proyectivas y los retículos semimodulares puntuales, se reducen todos a una misma estructura (matroidal). El hecho de que los matroides aparecen en tan variados dominios y en tan diferentes aspectos, los hace dignos de ser estudiados. Debido a la posibilidad de aplicación, al exponer la teoría de matroides, del aparato de la teoría de los retículos, de los grafos y de los espacios vectoriales, así como del lenguaje geométrico, se puso de manifiesto inesperadamente la similitud entre los resultados de las teorías de los grafos, de las transversales, de la codificación, del álgebra, la topología, la electrotecnia, la geometría y el análisis combinatorio.

## § 1. Conceptos fundamentales y ejemplos

Sea  $\mathcal{P}(S)$  un conjunto de todos los subconjuntos del conjunto finito  $S$ . Un sistema  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(S)$  de subconjuntos de  $S$  lleva el nombre de *matroide*  $M = (S, \mathcal{J})$ , y los conjuntos de  $\mathcal{J}$  se llaman *independientes*, si se cumplen las siguientes condiciones:

- (i1)  $\emptyset \in \mathcal{J}$ ;
- (i2) si  $A \subseteq B$  y  $B \in \mathcal{J}$ , entonces  $A \in \mathcal{J}$ ;
- (i3) si  $A, B \in \mathcal{J}$  y  $|A| > |B|$ , entonces existe un  $a \in A \setminus B$  tal que  $B \cup \{a\} \in \mathcal{J}$ .

Se denomina *base del matroide*  $M$  a un conjunto de  $\mathcal{J}$  que es máximo por inclusión. Un subconjunto  $A$  de  $S$  se llama *dependiente* si  $A \notin \mathcal{J}$ . Se llama *ciclo del matroide*  $M$  un subconjunto dependiente de  $S$ , mínimo por inclusión. Los conjuntos de todas las bases, de todos los ciclos y de todos los conjuntos dependientes del matroide  $M$  se designarán por  $\mathcal{B}(M)$ ,  $\mathcal{C}(M)$  y  $\mathcal{D}(M)$ , respectivamente.

Dos matroides  $M_1 = (S_1, \mathcal{J}_1)$  y  $M_2 = (S_2, \mathcal{J}_2)$  se llaman *isomorfos* (la designación es  $M_1 \cong M_2$ ), si existe una correspondencia biunívoca entre  $S_1$  y  $S_2$ , para la cual los subconjuntos independientes de un matroide corresponden a los subconjuntos independientes del otro matroide y los subconjuntos dependientes, a los dependientes.

8.1. Demuéstrase que sobre un conjunto de  $n$  elementos existen para  $n = 1, 2, 3$  exactamente  $2^n$ , y para  $n = 4$ , 17 matroides no isomorfos.

8.2. Sea  $S$  un conjunto finito,  $x, y \in S$ , y sea  $\mathcal{J}$  una familia de subconjuntos  $A$  de  $S$ , para los cuales  $|A \cap \{x, y\}| < 2$ . ¿Será el par  $(S, \mathcal{J})$  un matroide?

8.3. Supongamos que  $|S| = n$  y  $k$  es un cierto número entero tal que  $1 \leq k \leq n$  y, además,  $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid |A| \leq k\}$ . Compruébese que  $U_{k, n} = (S, \mathcal{J})$  es un matroide. Hállense  $\mathcal{P}(U_{k, n})$ ,  $\mathcal{C}(U_{k, n})$  y  $\mathcal{D}(U_{k, n})$ .

El matroide  $U_{k, n}$  del problema 8.3 se llama *homogéneo*. Si  $k = n$ , el matroide  $U_{k, n}$  se denomina libre y lo designan con  $F_n$ .

8.4. Sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y sea  $\mathcal{J}$  una familia de subconjuntos  $A$  del conjunto  $S$ , distintos de  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{1, 4, 6\}$ ,  $\{2, 3, 6\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$  y tales que  $|A| \leq 3$ . Compruébese que  $(S, \mathcal{J})$  es un matroide.

8.5. Hállense tales 6 puntos en un plano que, al numerarlos de 1 a 6, las bases del matroide del problema 8.4 se hacen precisamente conjuntos de tres puntos no colineares.

Sea  $L$  un espacio lineal sobre el campo  $F$ ,  $u_1, \dots, u_n \in L$ . La expresión de la forma  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ , donde  $\lambda_i \in F$ ,  $i = 1, \dots, n$ , lleva el

nombre de *combinación lineal de vectores*  $u_1, \dots, u_n$ . Un conjunto de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  se llama linealmente dependiente, siempre que existe una combinación lineal de los citados vectores igual al vector nulo, en la cual por lo menos uno de los coeficientes es distinto de cero. De lo contrario el conjunto de vectores se llama linealmente independiente.

8.6. Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) un conjunto de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  con un subconjunto linealmente dependiente es de por sí linealmente dependiente;

b) cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es linealmente independiente;

c) entre los vectores linealmente dependientes  $u_1, \dots, u_n$  por lo menos un vector es una combinación lineal de los demás;

d) si uno de los vectores  $u_1, \dots, u_n$  se expresa linealmente a través de los demás, entonces los vectores  $u_1, \dots, u_n$  son linealmente dependientes;

e) si un conjunto de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es linealmente independiente, mientras que  $\{u_1, \dots, u_n, u\}$  es linealmente dependiente, entonces  $u$  es una combinación lineal de vectores  $u_1, \dots, u_n$ ;

f) si un conjunto de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es linealmente independiente y el vector  $u_{n+1}$  no puede expresarse a través de ellos, entonces el conjunto  $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$  es linealmente independiente.

8.7. Sea  $S$  un conjunto finito arbitrario de vectores del espacio lineal  $L$  sobre el campo  $F$  y supongamos que  $A \subseteq S$ . Diremos que

$A \in \mathcal{J}$  cuando y sólo cuando  $A$  es un conjunto linealmente independiente de vectores de  $L$ . Compruébese que  $(S, \mathcal{J})$  es un matroide llamado vectorial.

8.8. Sea  $F^3$  un espacio lineal aritmético 3-dimensional sobre el campo  $F$ ,  $S = \{(1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1)\} \subset F^3$  y sea  $M$  un matroide vectorial en  $S$  del problema 8.7. Compruébese que si  $F$  es un campo de números reales, entonces  $M \cong F_3$ . ¿Se conservará el isomorfismo, si  $F = GF(2)$ ?

Sea  $L$  un espacio lineal sobre el campo  $F$ . La combinación lineal  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ , donde  $u_i \in L$ ,  $\lambda_i \in F$ , se denomina *combinación afín*, si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Un conjunto de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\} \subset L$  se denominará *independiente de manera afín* sobre el campo  $F$ , si de  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  se desprende que  $\lambda_i = 0$  para todo  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . De lo contrario el conjunto de vectores se llamará *dependiente de manera afín*. Notemos que la independencia afín se deduce de la independencia lineal, pero no viceversa.

8.9. Demuéstranse las siguientes afirmaciones

a) cualquier subconjunto de un conjunto independiente de manera afín de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es independiente de manera afín;  
 b) entre los vectores dependientes de manera afín  $\{u_1, \dots, u_n\}$  por lo menos un vector es una combinación afín de los demás;

c) si un conjunto de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es independiente de manera afín, entonces también será independiente de manera afín el conjunto  $\{u_1 - u, \dots, u_n - u\}$ , donde  $u$  es un vector arbitrario de  $L$ ;

d) un conjunto de vectores  $\{u_1, \dots, u_n\}$  es independiente de manera afín cuando y sólo cuando el conjunto  $\{u_1 - u_n, \dots, u_{n-1} - u_n\}$  es linealmente independiente;

e) si un conjunto de vectores  $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ , donde  $n \geq 2$ , es independiente de manera afín, entonces el conjunto  $A \setminus \{u_i\}$  es linealmente independiente para cierto  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

f) un subconjunto de vectores  $\{(x_1^1, \dots, x_n^1); \dots; (x_1^m, \dots, x_n^m)\} \subset F^n$  es independiente de manera afín cuando y sólo cuando el subconjunto de vectores  $\{(x_1^1, \dots, x_n^1, 1), \dots, (x_1^m, \dots, x_n^m, 1)\} \subset F^{n+1}$  es linealmente independiente.

8.10. Sea  $S$  un subconjunto finito arbitrario de vectores del espacio lineal  $L$  sobre el campo  $F$  y  $A \subseteq S$ . Diremos que  $A \in \mathcal{J}$  cuando y sólo cuando  $A$  es independiente de manera afín en  $L$ . Demuéstrase que  $(S, \mathcal{J})$  es un matroide que se llama *afín*.

Sea  $G$  un grupo abeliano sin torsión, es decir, todos sus elementos, salvo el cero, tienen orden infinito. Diremos que  $a \in G$  depende de los elementos de  $A \subseteq G$ , si  $ma$ , donde  $m$  es cierto número ontero, pertenece a un subgrupo del grupo  $G$ , engendrado por el conjunto  $A$ .

En otras palabras, si existen los elementos  $a_1, \dots, a_n$  de  $A$  y los números enteros  $m, k_1, \dots, k_n$  ( $m \neq 0$ ) tales que  $ma = \sum_{i=1}^n k_i a_i$ .

El subconjunto  $A \subseteq G$  se denomina *independiente*, si ningún elemento  $a$  de  $A$  depende de los elementos de  $A \setminus \{a\}$ .

8.11. Sea  $S$  un subconjunto finito del grupo abeliano  $G$  sin torsión y  $A \subseteq S$ . Diremos que  $A \in \mathcal{J}$  cuando y sólo cuando  $A$  es un subconjunto independiente en  $G$ . Compruébese que  $(S, \mathcal{J})$  es un matroide.

Sea  $K$  una extensión (dilatación) del campo  $F$ . El elemento  $a$  de  $K$  se llama algebraico sobre el campo  $F$ , si existe un polinomio  $f(x)$  no igual a cero idénticamente, con los coeficientes del campo  $F$  tales que  $f(a) = 0$ . Un elemento  $a$  de  $K$ , que no es algebraico sobre  $F$ , recibe el nombre de elemento transcendente sobre  $F$ . Un elemento  $b$  de  $K$  se llama *algebraicamente dependiente* de  $a_1, \dots, a_n$ , si  $b$  es algebraico sobre el campo  $F(a_1, \dots, a_n)$  (sobre el menor de los campos que contienen  $F$  y  $a_1, \dots, a_n$ ), es decir, si  $b$  satisface la ecuación algebraica

$$f_0(a) b^m + f_1(a) b^{m-1} + \dots + f_m(a) = 0,$$

cuyos coeficientes  $f_0(a), \dots, f_m(a)$  son polinomios de  $a_1, \dots, a_n$  con coeficientes del campo  $F$  y no todos son iguales a cero. Los elementos  $a_1, \dots, a_n$  de  $K$  se denominan *algebraicamente independientes* sobre el campo  $F$ , si ninguno de ellos es algebraicamente dependiente de los demás.

8.12. Dénse los ejemplos de números reales algebraicos y trascendentes sobre el campo de números racionales.

8.13. Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

- todo elemento  $a_i, i = 1, \dots, n$ , es algebraicamente dependiente de los elementos  $a_1, \dots, a_n$ ;
- si  $b$  depende algebraicamente de  $a_1, \dots, a_n$ , pero no de  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , entonces  $a_n$  es algebraicamente dependiente de  $a_1, \dots, a_{n-1}, b$ ;
- si un elemento  $c$  depende algebraicamente de  $b_1, \dots, b_s$  y si cada  $b_i, i = 1, \dots, s$ , depende algebraicamente de  $a_1, \dots, a_n$  entonces  $c$  es algebraicamente dependiente de  $a_1, \dots, a_n$ ;
- los elementos  $a_1, \dots, a_n$  de  $K$  son algebraicamente independientes sobre el campo  $F$  cuando y sólo cuando de  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , donde  $f$  es un polinomio con coeficientes de  $F$ , se deduce que todos los coeficientes del polinomio  $f$  son nulos.

8.14. Sea  $K$ , una extensión del campo  $F$  y  $S$ , un subconjunto finito de  $K$ ,  $A \subseteq S$  y  $A \subseteq \mathcal{J}$  cuando y sólo cuando los elementos de  $A$  son algebraicamente independientes sobre el campo  $F$ . Demuéstrase que  $\mathcal{J}$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide  $M$  en el conjunto  $S$ , el cual se llama *algebraico*.

8.15. Sea  $n = 2^p$  y  $S_1, S_2$  dos subconjuntos disjuntos de  $p$  elementos del conjunto  $S$ , donde  $p \geq 2$  y  $|S| = n$ . Demuéstrase

que si  $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid |A| \leq n - 3, S_1 \subseteq A \text{ y } S_2 \subseteq A\}$ , entonces  $(S, \mathcal{J})$  es un matroide.

8.16. Demuéstrase que cualesquiera dos bases del matroide  $M$  contienen un número igual de elementos.

8.17. Axiomas de las bases demuéstrase: si  $M$  es un matroide en el conjunto finito  $S$ , entonces para la familia  $\mathcal{B}(M)$  de sus bases son válidas las siguientes propiedades:

(b1) ningún subconjunto propio de una base es base;

(b2) si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $x \in B_1$ , entonces  $(B_1 \setminus \{x\} \cup \{y\}) \in \mathcal{B}$  para cierto  $y \in B_2$ .

Viceversa, si una familia  $\mathcal{B}$  de subconjuntos del conjunto finito  $S$  satisface las condiciones (b1) y (b2), entonces será una familia de bases del matroide  $M$ , definido unívocamente, sobre el conjunto  $S$ , que se designará por  $(S, \mathcal{B})$ . (En el matroide  $(S, \mathcal{B})$  el conjunto  $A \in \mathcal{J}$ , donde  $A \subseteq S$ , cuando y sólo cuando existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $A \subseteq B$ ).

8.18. Sea  $\mathcal{B}$  una anticadena no vacía compuesta de los subconjuntos del conjunto  $S$ . Demuéstrase que la afirmación (b2) del problema 8.17 es equivalente a la siguiente:

(b2') para cualesquiera  $X, Y \subseteq S$  tales que  $X \subseteq Y$ , de  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ,  $X \subseteq B_1, B_2 \subseteq Y$  se deduce que existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ .

8.19. Sea  $M = (S, \mathcal{J})$  un matroide sobre el conjunto  $S$ ;  $\mathcal{J}$ , una familia de sus conjuntos independientes y  $X, Y \subseteq S$ . Demuéstrase que si  $X, Y \in \mathcal{J}$  y  $|X| < |Y|$ , entonces existe un subconjunto  $Z \subseteq Y \setminus X$  tal que  $|X \cup Z| = |Y|$  y  $X \cup Z \in \mathcal{J}$ .

8.20. Sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y supongamos que la familia  $\mathcal{B}$  se compone de todos los subconjuntos del conjunto  $S$  que contienen tres elementos, a excepción de los subconjuntos  $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 6, 7\}$ . Compruébese que  $(S, \mathcal{B})$  es un matroide  $\Phi$  llamado *matroide de Fano*. En la fig. 8.1. se enumerarán los vértices de 1 a 7 de un modo tal que las bases del matroide de Fano no estén situadas en una misma curva.

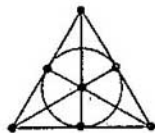


Fig. 8.1.

8.21. Sea  $S = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}$  y supongamos que cada conjunto de cuatro elementos pertenece a la familia  $\mathcal{B}$ , salvo los siguientes conjuntos:  $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}, \{a_1, a_2, c_1, c_2\}, \{b_1, b_2, c_1, c_2\}, \{b_1, b_2, d_1, d_2\}$  y  $\{c_1, c_2, d_1, d_2\}$ . Compruébese que  $(S, \mathcal{B})$  es un matroide, donde  $\mathcal{B}$  es la familia de sus bases, el cual lleva el nombre de *Vamos*. Dibújese una configuración de 8 puntos en un espacio 3-dimensional de un modo tal que las bases de  $\mathcal{B}$  del matroide de Vamos sean exactamente conjuntos de 4 puntos no coplanares.

Se denomina *función de rango* del matroide  $M = (S, \mathcal{J})$  a una función de números enteros  $r(A)$ , definida para todo  $A \subseteq S$ , tal que

$$r(A) = \max \{ |X| \mid X \subseteq A, X \in \mathcal{J} \}.$$

Por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos  $A$  del conjunto  $S$  son de una misma potencia,  $r(A)$  será la potencia del subconjunto independiente máximo de  $A$ . Por ejemplo, en el matroide de  $U_{k,n}$  (véase el problema 8.3)  $r(A) = \min \{ |A|; k \}$ .

8.22. Axiomas de rango. Demuéstrese:

Si  $M = (S, \mathcal{J})$  es un matroide sobre el conjunto finito  $S$  con función de rango  $r$ , entonces para cualesquiera  $A, B \subseteq S$  y  $a, b \in S$  se cumplen las siguientes condiciones:

$$(r1) \ 0 \leq r(A) \leq |A|;$$

$$(r2) \ \text{si } A \subseteq B, \text{ entonces } r(A) \leq r(B) \text{ (monotonía);}$$

$$(r3) \ r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B) \text{ (semimodularidad);}$$

$$(r4) \ r(\emptyset) = 0;$$

$$(r5) \ r(A) \leq r(A \cup \{a\}) \leq r(A) + 1;$$

$$(r6) \ \text{si } r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\}), \text{ entonces } r(A) = r(A \cup \{a, b\}).$$

Viceversa, sea  $r$  una función arbitraria de números enteros, definida en los subconjuntos del conjunto finito  $S$ , tal que satisface las condiciones (r1), (r2) y (r3), o bien las (r4), (r5) y (r6). Entonces la familia  $\mathcal{J}$  de subconjuntos  $A \subseteq S$ , para los cuales  $r(A) = |A|$ , forma un matroide  $(S, \mathcal{J})$  con la función de rango  $r$  (este matroide se denotará con  $(S, r)$ ).

8.23. Sea  $M$  un matroide vectorial con la función de rango  $r$  en el conjunto  $S$ . Demuéstrese que para cualesquiera subconjuntos  $A, B, C, \mathcal{D}$  del conjunto  $S$  se verifica la siguiente desigualdad:

$$r(A) + r(B) + r(A \cup B \cup C) + r(A \cup B \cup \mathcal{D}) + r(C \cup \mathcal{D}) \leq r(A \cup B) + r(A \cup C) + r(A \cup \mathcal{D}) + r(B \cup C) + r(B \cup \mathcal{D}).$$

¿Será lícita la desigualdad para el matroide de Vamos (véase el problema 8.21)?

8.24. Sea  $r(A)$  una función de rango del matroide  $M = (S, \mathcal{J})$  y sea  $k$  cierto número entero no negativo. Demuéstrese que

$$\rho(A) = \min \{ |A|; r(A) + k \}$$

es también una función de rango de cierto matroide sobre el conjunto  $S$ .

8.25. Axiomas de los ciclos. Demuéstrese: si  $M$  es un matroide en el conjunto finito  $S$ , entonces para una familia  $\mathcal{C}(M)$  de sus ciclos son válidas las siguientes propiedades:

(c1) ningún subconjunto propio de un ciclo es ciclo;

(c2) si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$ ,  $C_1 \neq C_2$  y  $x \in C_1 \cap C_2$ , entonces hay tal ciclo  $C^* \in \mathcal{C}(M)$  que  $C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ ;

(c2') si  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$ ,  $x \in C_1 \cap C_2$ ,  $y \in C_1 \setminus C_2$ , existe un ciclo  $C^* \in \mathcal{C}(M)$  tal que  $y \in C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ .

Viceversa, si la familia  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$  satisface las condiciones (c1), (c2) ó (c1), (c2'), será una familia de ciclos del matroide  $M = (S, \mathcal{J})$  definido unívocamente, en el cual  $A \in \mathcal{J}$ , donde  $A \subseteq S$  cuando y

sólo cuando  $A$  no contiene, a título de subconjuntos, los términos de  $\mathcal{C}$ .

8.26. Sea  $M = (S, \mathcal{J})$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ , y:  $\mathcal{C}(M)$ , una familia de todos los ciclos suyos. Demuéstrese que si  $A \in \mathcal{J}$ , y para cierto  $x \in S \setminus A$  el conjunto  $A \cup \{x\}$  contiene un ciclo  $C \in \mathcal{C}(M)$ , entonces  $(A \cup \{x\} \setminus \{y\}) \in \mathcal{J}$  para todo  $y \in C$ . ¿Podrá el conjunto  $A \cup \{x\}$ , donde  $A \in \mathcal{J}$  y  $x \in S$ , contener más de un ciclo del matroide  $M$ ?

8.27. Sea  $B$  una base del matroide  $M$  sobre el conjunto finito  $S$  y supongamos que  $y \in S \setminus B$ . Demuéstrese que:

a)  $B \cup \{y\}$  contiene cierto ciclo  $C$ ;

b)  $y \in C$ ;

c)  $C$  es el único ciclo en  $B \cup \{y\}$ ;

d)  $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$  es la base del matroide  $M$  si y sólo si  $x \in C$ .

Un ciclo  $C$  del matroide  $M$  que se obtiene igual que en el problema 8.27 se denomina *fundamental respecto de la base  $B$* .

8.28. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ . Demuéstrese la validez de las siguientes afirmaciones:

a) si  $C$  es un ciclo del matroide  $M$  y  $x \in C$ , entonces existe una base  $B$  del matroide  $M$  tal que  $C$  es el único ciclo en  $B \cup \{x\}$ ;

b) un elemento  $x \in S$  pertenece a toda base del matroide  $M$  cuando y sólo cuando  $x$  no yace en ningún ciclo del matroide  $M$ .

8.29. Sea  $G$  un grafo con un conjunto de vértices  $V$  y un conjunto de aristas  $E$ . Demuéstrese que la familia de todos los ciclos del grafo  $G$  es un conjunto de ciclos de cierto matroide  $M(G)$  sobre el conjunto  $E$ .

El matroide  $M(G)$  del problema 8.29 lleva el nombre de *matroide cíclico* del grafo  $G$ . Un matroide  $M$  se llama *gráfico*, si existe un grafo  $G$  cuyo matroide cíclico  $M(G)$  es isomorfo al matroide  $M$ .

8.30. Demuéstrese que un matroide homogéneo  $U_{k,n}$ , donde  $0 \leq k \leq n$ , es gráfico cuando y sólo cuando  $k = 0, 1, n - 1$ , o bien a  $n$ .

8.31. ¿Podrán los grafos no isomorfos tener matroides cíclicos isomorfos?

8.32. Sea  $A, B \subseteq S$  y  $A \Delta B$ , su diferencia simétrica (es decir,  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ). Demuéstrese que si  $A$  y  $B$  son ciclos de un matroide gráfico  $M$  sobre el conjunto  $S$ , entonces  $A \Delta B$  es o bien un ciclo, o bien una unión de los ciclos disjuntos del matroide  $M$ . ¿Podrá un matroide que no es gráfico, poseer esta propiedad? Dénse los ejemplos.

8.33. Sean  $M_1 = (S, \mathcal{J}_1)$  y  $M_2 = (S, \mathcal{J}_2)$  dos matroides sobre el conjunto  $S$  y supongamos que  $B$  es su base común. Dénse los ejemplos de matroides no isomorfos con un mismo sistema de ciclos fundamentales respecto de la base  $B$ .

8.34. Sean  $B_1$  y  $B_2$  las bases del matroide  $M = (S, \mathcal{J})$ . Demuéstrese que para cualquier  $x \in B_1$  se encontrará  $y \in B_2$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  y  $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$  son las bases del matroide  $M$ .

8.35. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  y sean  $B_1, B_2$  las



bases diferentes del matroide  $M$ . Demuéstrase la validez de las siguientes afirmaciones:

a) existe una biyección  $\pi: B_1 \rightarrow B_2$  tal que para todo  $x \in B_1$ ,  $(B_2 \setminus \{\pi(x)\} \cup \{x\})$ , es una base del matroide  $M$ ;

b) existe una biyección  $\pi': B_1 \rightarrow B_2$  tal que para todo  $x \in B_1$ ,  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{\pi'(x)\}$ , es una base del matroide  $M$ .

Supongamos que  $M = (S, \mathcal{J})$  es un matroide sobre el conjunto finito  $S$ ,  $x \in S$  y  $A \subseteq S$ . Diremos que  $x$  depende de  $A$  (la designación es  $x \sim A$ ), si o bien  $x \in A$ , o bien  $x \notin A$  y  $B \cup \{x\} \notin \mathcal{J}$  para cierto subconjunto independiente  $B$  del conjunto  $A$ .

8.36. Demuéstrase que si  $x \sim A$  y  $\mathcal{D}$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $A$ , entonces  $x \sim \mathcal{D}$ .

8.37. Axiomas de dependencia. Demuéstrase: si  $M = (S, \mathcal{J})$  es un matroide sobre el conjunto finito  $S$ , entonces para cualesquiera diferentes  $x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n \in S$  se cumplen las siguientes propiedades:

(d1)  $y_k \sim \{y_1, \dots, y_m\}$ , donde  $k = 1, 2, \dots, m$ ;

(d2) si  $m \geq 1$ ,  $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$  y  $x \not\sim \{y_2, \dots, y_m\}$ , entonces  $y_1 \sim \{x_1, y_2, \dots, y_m\}$ ;

(d3) si  $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$  e  $y_k \sim \{z_1, \dots, z_n\}$ , donde  $k = 1, 2, \dots, m$ , entonces  $x \sim \{z_1, \dots, z_n\}$ .

Vicerversa, supongamos que para los elementos del conjunto  $S$  se cumplen las condiciones (d1)–(d3). Entonces la familia  $\mathcal{J}$  de subconjuntos  $A \subseteq S$  tales que  $x \not\sim A \setminus \{x\}$  forma un matroide  $(S, \mathcal{J})$  para cualquier  $x \in A$ .

8.38. Demuéstrase que si  $x \notin A$ , entonces  $x \sim A$  cuando y sólo cuando existe un ciclo  $C$  tal que  $x \in C \subseteq A \cup \{x\}$ .

8.39. Demuéstrase que una familia  $\mathcal{J}$  de subconjuntos del conjunto  $S$  es un conjunto de conjuntos independientes del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  cuando y sólo cuando  $\mathcal{J}$  satisface las condiciones (i1), (i2) y la siguiente afirmación:

(i3') si  $A$  es un subconjunto arbitrario del conjunto  $S$ , todos los subconjuntos máximos  $B$  del conjunto  $A$  tales que  $B \in \mathcal{J}$  tienen potencias iguales.

8.40. Axiomas de clausura. Demuéstrase: supongamos que  $M = (S, r)$  es un matroide sobre el conjunto finito  $S$  con función de rango  $r$ ,  $A \subseteq S$  y  $\bar{A} = \{x \in S \mid r(A) = r(A \cup \{x\})\}$ . Compruébese que la aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$ , definida para todos los  $A \subseteq S$ , es un operador de clausura:

(cl1)  $A \subseteq \bar{A}$  para todo  $A \subseteq S$ ;

(cl2) si  $A, B \subseteq S$  y  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ ;

(cl3)  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$  para todos los  $A \subseteq S$ ;

el cual satisface el axioma de sustitución de Maclain-Steinitz:

(cl4) para cualesquiera  $x, y \in S$  y todo  $A \subseteq S$  de  $y \in \bar{A \cup \{x\}}$   $\times$   $x \notin A$  se deduce que  $x \in \bar{A \cup \{y\}}$ .

Viceversa, supongamos que la aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$ , definida para todos los  $A \subseteq S$ , satisface los axiomas (cl1) — (cl4). Entonces la familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos  $A \subseteq S$  tales que de  $x \in A$  se deduce que  $x \in \bar{A} \setminus \{x\}$ , forma un matroide  $M = (S, \mathcal{F})$  con el operador de clausura  $A \rightarrow \bar{A}$  (este matroide se denotará con  $(S, \bar{\quad})$ ).

8.41. Demuéstrase que en el matroide  $M = (S, \bar{\quad})$ ,  $x \in \bar{A}$  cuando y sólo cuando,  $x \in A$  o existe un ciclo  $C$ , para el cual  $C \setminus A = \{x\}$ .

Un conjunto  $A$  del matroide  $M$  se llama *cerrado*, si coincide con su clausura. Todo conjunto cerrado de un matroide se denominará *superficie*<sup>1)</sup>.

8.42. Sean  $X$  e  $Y$  las superficies del matroide  $M$ . Demuéstrase que  $X \cap Y$  es también una superficie del matroide  $M$ .

8.43. Dése un ejemplo de matroide en el cual la unión de superficies no es obligatoriamente una superficie.

8.44. Demuéstrase que un matroide de rango  $n$  tiene por lo menos  $2^n$  superficies.

Se denomina *geometría combinatoria* (en adelante siempre *geometría*) a un matroide, en el cual todos los subconjuntos de un solo elemento, como también el conjunto vacío, son cerrados.

La definición de una geometría sobre el conjunto  $S$  se diferencia de la definición de una topología sobre  $S$  en que para la clausura no se requiere que se cumplan las condiciones  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ , cualesquiera que sean  $A, B \in \mathcal{F}(S)$ , mas tiene lugar la propiedad de sustitución (cl4), la cual, hablando en general, puede no cumplirse para la clausura de la topología.

8.45. Sea  $G = (S, \bar{\quad})$  un matroide y sea  $L(G)$  un conjunto de todas las superficies del matroide  $G$  ordenadas por inclusión. Demuéstrase que  $L(G)$  es un retículo geométrico y en este conjunto las operaciones binarias  $\vee$  y  $\wedge$  para todos los  $A, B \in L(G)$  se definen del modo siguiente:  $A \vee B = \overline{A \cup B}$  y  $A \wedge B = A \cap B$ .

8.46. Sea  $L$  un retículo geométrico arbitrario con el conjunto de átomos  $S$  y supongamos que  $\bar{A} = \{a \in S \mid a \leq \sup A\}$  para todo  $A \subseteq S$ . Demuéstrase que  $(S, \bar{\quad})$  es una geometría y su retículo de superficies es isomorfo al retículo  $L$ .

8.47. ¿Es cierto que la afirmación del problema 8.46 es un corolario de los axiomas de clausura y de uno de los problemas 7.156, 7.157 ó 7.158?

8.48. Axiomas de los conjuntos cerrados (o de las superficies o flats). Demuéstrase: si  $M$  es un matroide sobre el conjunto finito  $S$ , entonces para una familia  $\mathcal{F}$  de todos los conjuntos cerrados del matroide  $M$  se cumplen las siguientes propiedades:

(1)  $S \in \mathcal{F}$ ;

(2) si  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ , entonces  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ ;

<sup>1)</sup> En la literatura matemática se usa también, a la par con el término «superficie», el término inglés «flat».

(f3) si  $F, F_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}$  y  $F_i \supseteq F$  para todo,  $i, i = 1, 2, \dots, k$ , entonces  $\{F_1 \setminus F, \dots, F_k \setminus F\}$  es una partición del conjunto  $S \setminus F$ .

Viceversa, supongamos que para la familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos del conjunto  $S$  se cumplen las condiciones (f1) - (f3). Entonces la familia  $\mathcal{J}$  de los subconjuntos  $A \subseteq S$  tales que para todo  $a \in A$  existe un subconjunto  $F \in \mathcal{F}$ , para el cual  $A \setminus F = \{a\}$ , forma un matroide  $(S, \mathcal{J})$  con la familia de las superficies  $\mathcal{F}$ .

Sean  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  y  $\mathcal{F} = \{A \subseteq S \mid A = \bar{A}\}$  una familia de todas las superficies del matroide  $M$ . Suele decirse que un subconjunto  $B \subseteq A$  engendra  $A$ , donde  $A \in \mathcal{F}$ , si  $\bar{B} = A$ . El subconjunto  $B$  se denomina *conjunto engendrador del matroide*, si  $\bar{B} = S$ . Los subconjuntos propios máximos (por inclusión)  $H \in \mathcal{F}$  del conjunto  $S$  llevan el nombre de *hiperplanos del matroide  $M$* .

8.49. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

a) si  $A$  es un conjunto engendrador del matroide y si  $B \cong A$ , entonces  $B$  es también un conjunto engendrador;

b) una familia de conjuntos engendrades mínimos de un matroide coincide exactamente con el conjunto de sus bases;

c) una familia de conjuntos máximos que no son engendrades coincide exactamente con el conjunto de todos los hiperplanos del matroide  $M$ .

8.50. Axiomas de los hiperplanos. Demuéstrese: si  $M$  es un matroide sobre el conjunto finito  $S$ , entonces para la familia  $\mathcal{H}$  de todos los hiperplanos del matroide  $M$  se cumplen las siguientes condiciones:

(h1)  $S \notin \mathcal{H}$ ;

(h2) ningún subconjunto propio de un hiperplano es hiperplano;

(h3) para cualesquiera  $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$  y para todo  $x \in S$  existe un hiperplano  $H$  tal que  $(H_1 \cap H_2) \cup \{x\} \subseteq H$ .

Viceversa, supongamos que para la familia  $\mathcal{H}$  de subconjuntos del conjunto  $S$  se cumplen las condiciones (h1) - (h3). Entonces la familia  $\mathcal{J}$  de subconjuntos  $A \subseteq S$  tales que para todo  $a \in A$  se encontrará un subconjunto  $H \in \mathcal{H}$ , para el cual  $A \setminus H = \{a\}$ , forma un matroide  $(S, \mathcal{J})$  con una familia de hiperplanos  $\mathcal{H}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_n\}$  una familia de subconjuntos no vacíos del conjunto infinito  $S$ . Se denomina *transversal* (o *sistema de representantes distintos*) para  $\mathcal{F}$  a un subconjunto  $A$  del conjunto  $S$  que se compone de  $n$  elementos: a un elemento de cada conjunto  $A_i$ , es decir, si existe una aplicación biunívoca  $\varphi: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $a \in A_{\varphi(a)}$  para todo  $a \in A$ . La transversal de una subfamilia arbitraria de la familia  $\mathcal{F}$  se llamará *transversal parcial* para  $\mathcal{F}$ .

8.51. ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos del conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  tienen transversales:

a)  $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$ ;

b)  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 5\}\}$ ;

c)  $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$ ;

d)  $\{\{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$ ?

8.52. Sea  $S$  un conjunto de letras en la palabra MATROIDS. ¿Cuántas transversales tiene la siguiente familia de subconjuntos de  $S$ : STAR; ROAD; MOAT; RIOT; RIDS; DAMS; MIST?

8.53. Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos no vacíos del conjunto finito  $S$ . Demuéstrase que un par  $(S, \mathcal{J})$ , donde  $\mathcal{J}$  es la familia de todas las transversales parciales para  $\mathcal{F}$ , forma un matroide  $M(S; \mathcal{F})$  en el cual  $\mathcal{J}$  es una familia de conjuntos independientes.

El matroide  $M(S, \mathcal{J})$  del problema 8.53 se denomina *matroide transversal de la familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos del conjunto  $S$* . Diremos que un matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  es *transversal*, si existe tal familia finita  $\mathcal{F}$  de subconjuntos del conjunto  $S$  que  $M = M(S, \mathcal{F})$ .

La familia  $\mathcal{F}$  se llamará en este caso *representación del matroide  $M$* .

8.54. Demuéstrase que cada matroide  $k$ -homogéneo  $U_{k,n}$  es transversal.

8.55. Demuéstrase que los matroides cíclicos de un grafo completo  $K_4$  y del grafo representado en la fig. 8.2 no son transversales.

8.56. Demuéstrase que cada matroide sobre no más de 5 elementos es transversal.

8.57. Demuéstrase que el matroide de Fano no es transversal.

8.58. Muéstrase que existen no menos de  $2^n$  y no más de  $2^{n-1}$  matroides transversales no isomorfos sobre un conjunto de  $n$  elementos.

Sea  $S$  un conjunto finito, a cada elemento  $a$  del cual se le atribuye cierto número no negativo  $w(a)$  llamado *peso del elemento  $a$* . Se denomina *peso de un subconjunto  $A \subseteq S$*  a la suma de pesos de todos los elementos de  $A$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos del conjunto  $S$ . Veamos el siguiente problema: en la familia  $\mathcal{F}$  hallar el subconjunto del peso máximo. Para resolver este problema apliquemos un algoritmo que se llama *ávido*:

a) Elijase un elemento  $a_1$  tal que  $\{a_1\} \in \mathcal{F}$  y  $w(a_1) \geq w(a)$  para todos los  $a$  tales que  $\{a\} \in \mathcal{F}$ . Si tal  $a_1$  no existe, viene una parada.

b) Elijase un elemento  $a_2$  tal que  $\{a_1, a_2\} \in \mathcal{F}$  y  $w(a_2) \geq w(a)$  para todos aquellos  $a \neq a_1$  que  $\{a_1, a\} \in \mathcal{F}$ . Si tal  $a_2$  no existe, tiene lugar una parada.

c) Elijase tal elemento  $a_k$ , distinto de  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ , que  $\{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\} \in \mathcal{F}$  y  $w(a_k)$  es máximo entre todos los  $a$  tales que  $a \neq a_i$ , siendo  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , y  $\{a_1, \dots, a_{k-1}, a\} \in \mathcal{F}$ . Si tal  $a_k$  no existe, tiene lugar una parada.

Es evidente que el algoritmo ávido finaliza su trabajo asegurando el subconjunto de  $\mathcal{F}$ , máximo por inclusión.

8.59. Aplíquese el algoritmo ávido para los siguientes sistemas ponderados:

a)  $S = \{a, b, c\}$ ,  $w(a) = 3$ ,  $w(b) = w(c) = 2$  y  $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ ;

b)  $S = \{a, b, c, d\}$ ,  $w(a) = 4$ ,  $w(b) = w(c) = 3$ ,  $w(d) = 1$  y  $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{d\}, \{c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$ ;

c)  $S = \{a, b, c, d\}$ ,  $w(a) = 4$ ,  $w(b) = 3$ ,  $w(c) = 2$ ,  $w(d) = 2$  y  $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$ ;

d)  $S = \{a, b, c, d\}$ ,  $w(a) = 6$ ,  $w(b) = 3$ ,  $w(c) = 2$ ,  $w(d) = 2$  y  $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}\}$ .

¿Es cierto que como resultado del algoritmo ávido se ha obtenido un conjunto de  $\mathcal{F}$  que tiene peso máximo?

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de subconjuntos del conjunto finito  $S$ , a cuyos elementos se les atribuyen los pesos no negativos. Supongamos que los elementos de cada subconjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in \mathcal{F}$  están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos, es decir, que  $w(a_1) \geq w(a_2) \geq \dots \geq w(a_k)$ . Diremos que  $B \in \mathcal{F}$  es *óptimo* en  $\mathcal{F}$ , si  $|A| \leq |B|$  para todos los  $A \in \mathcal{F}$  y  $w(a_i) \leq w(b_i)$  para todo  $i$ , donde  $a_i \in A$ ,  $b_i \in B$  y  $i = 1, 2, \dots, |A|$ . Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \in \mathcal{F}$  y  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in \mathcal{F}$ , con la particularidad de que los elementos de los conjuntos  $A$  y  $B$  están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Diremos que  $A$  es *lexicográficamente mayor* que  $B$ , si existe tal  $k$  que  $w(a_i) = w(b_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, k-1$  y  $w(a_k) > w(b_k)$ , o bien si  $w(a_i) = w(b_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $m > n$ . El conjunto  $A \in \mathcal{F}$  que es lexicográficamente no inferior a cualquier otro conjunto de  $\mathcal{F}$  se denomina *lexicográficamente máximo* en  $\mathcal{F}$ .

8.60. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ , a cuyos elementos  $a$  se les atribuyen los pesos no negativos  $w(a)$ . Demuéstrese que para una base  $B$  del matroide  $M$  son equivalentes las siguientes condiciones:

a)  $B$  es óptimo en la familia  $\mathcal{I}$  de conjuntos independientes del matroide  $M$ ;

b)  $B$  es la base de peso máximo;

c)  $B$  es el máximo lexicográfico de la familia  $\mathcal{B}$  de bases del matroide  $M$ ;

d) para todo  $a \in B$  el conjunto  $\{a' \in B \mid w(a') > w(a)\}$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $\{a' \in S \mid w(a') > w(a)\}$ .

8.61. Demuéstrese que la aplicación de un algoritmo ávido a la familia  $\mathcal{I}$  de conjuntos independientes de un matroide sobre el conjunto finito  $S$ , a cuyos elementos  $a$  se les atribuyen los pesos no negativos  $w(a)$ , proporciona un subconjunto de  $\mathcal{I}$  que tiene peso máximo.

8.62. Sea  $\mathcal{F}$  tal familia de subconjuntos del conjunto finito  $S$  que si  $A \in \mathcal{F}$  y  $B \subseteq A$ , entonces  $B \in \mathcal{F}$ . Demuéstrese que la aplicación a  $\mathcal{F}$  de un algoritmo ávido nos da un subconjunto de  $\mathcal{F}$  que tiene peso máximo, cuando y sólo cuando  $\mathcal{F}$  es una familia de conjuntos independientes del matroide sobre  $S$ .

8.63. Muéstrase que si por medio del algoritmo ávido están

elegidos  $k$  elementos, el subconjunto formado tiene peso máximo entre todos los conjuntos independientes que constan de  $k$  o menos elementos.

8.64. En un ordenador se necesita realizar un conjunto de tareas. Todas las tareas requieren para su realización un tiempo igual. A toda tarea se le atribuye el plazo de tiempo extremal para su realización. Por una tarea no realizada en el plazo de tiempo establecido se debe pagar una multa. Demuéstrese que el juego de todos los subconjuntos de tareas que pueden realizarse según el horario forma un conjunto de todos los conjuntos independientes del matroide. ¿En qué orden hace falta realizar las tareas, para que la multa total sea mínima?

8.65. Sea  $M$  un matroide, a cuyos elementos están atribuidos los pesos no negativos. Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

a) ningún elemento de la base de peso máximo tiene peso mínimo en ningún ciclo del matroide  $M$ .

b) cada elemento de la base de peso máximo tiene peso máximo por lo menos en un cociclo del matroide  $M$ ;

Sea  $S$  un conjunto finito y sea  $n$  un número natural. Una totalidad  $\mathcal{F}$  de subconjuntos del conjunto  $S$  se llama  $n$ -partición del conjunto  $S$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

a) si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $|A| \geq n$ ;

b) cada subconjunto de  $n$  elementos del conjunto  $S$  se contiene en un y sólo un subespacio de  $\mathcal{F}$ .

Observemos que la 1-partición es partición de un conjunto en el sentido habitual.

8.66. Supongamos que  $\mathcal{F}$  es una  $n$ -partición del conjunto  $S$  y  $|\mathcal{F}| \geq 2$ . Demuéstrese que existe un matroide  $M(S, \mathcal{F})$  sobre el conjunto  $S$ , cuyos coátomos (hiperplanos) son exactamente subconjuntos de  $\mathcal{F}$  y sólo ellos.

Un matroide  $M$  se llama *matroide de recubrimiento*, si para cierta  $n$ -partición  $\mathcal{F}$  con  $|\mathcal{F}| \geq 2$  es isomorfo al matroide  $M(S, \mathcal{F})$  del problema 8.66. Notemos que el matroide de recubrimiento inducido por la  $n$ -partición tiene el rango  $n + 1$ .

8.67. Déense ejemplos de matroides de recubrimiento.

Supongamos que el conjunto finito  $S$ , cuyos elementos se llaman *puntos*, satisface junto con las familias  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{F}$ , cuyos elementos se llaman *curvas* y *superficies*, respectivamente, las condiciones siguientes:

(G1) cualesquiera  $n + 1$  puntos diferentes están situados en una curva única y cada curva contiene no menos de  $n + 1$  diferentes puntos;

(G2) cualesquiera  $n + 2$  puntos diferentes, que no yacen en una misma curva, están situados en una única superficie, y cada superficie contiene por lo menos  $n + 2$  puntos diferentes que no se encuentran en una misma curva.

(G3) junto con cualesquiera  $n + 1$  puntos diferentes pertenece a

la superficie y también toda la curva definida por los puntos mencionados;

(Un conjunto  $A \subseteq S$  se llama subespacio, si contiene todas las curvas y superficies que pasan por cualesquiera  $n + 1$  ó  $n + 2$  puntos de  $A$ , y si se definen por las condiciones (G1) y (G2). Es evidente que la intersección de los subespacios es también un subespacio. Por consiguiente, la aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$ , donde  $\bar{A}$  es el subespacio mínimo que contiene  $A$  es un operador de clausura sobre  $S$ ).

(G4) si dos superficies se disponen en la clausura de un subconjunto de  $(n + 3)$  elementos de  $S$ , la intersección de ellas contiene al menos  $n + 1$  puntos diferentes.

La estructura de incidencia  $(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$  que satisface, para cierto número entero no negativo  $n$ , los axiomas (G1) — (G4) junto con el operador de clausura definido más arriba, lleva el nombre de *geometría de Wille de grado  $n$*  y se denota por  $G(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$ . Indiquemos que para  $n = 0$  la geometría de Wille es una geometría proyectiva (véase el capítulo 7, § 2).

8.68. Supongamos que  $G(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$  es una geometría de Wille de grado  $n$ ,  $A \neq B$  son subespacios y  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A \cap B$ . Demuéstrese que

$$A \vee B = \overline{A \cup B} = \bigcup_{a \in A, b \in B} \overline{\{a_1, \dots, a_n, a, b\}}.$$

8.69. Demuéstrese que cada geometría de Wille  $G(S, \mathcal{K}, \mathcal{F})$  de grado  $n$  es un matroide y que para todos los subespacios  $A$  de rango igual a  $n$  se cumple la condición: en el retículo de los subespacios de la geometría de Wille el intervalo  $[0, 1]$  es distributivo, y el  $[A, 1]$ , modular.

8.70. Demuéstrese que un matroide  $M$  sobre el conjunto finito  $S$  es isomorfo a la geometría de Wille de grado  $n$  cuando y sólo cuando  $\bar{\emptyset} = \emptyset$ ,  $\bar{a} = a$  para todo  $a \in S$  (en el caso en que  $n \geq 1$ ), mientras que el intervalo  $[0, A]$  en el retículo de superficies del matroide  $M$  es distributivo, y el  $[A, 1]$ , modular para todas las superficies  $A$  del matroide  $M$  tales que  $r(A) = n$ .

8.71. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  tal que  $A \subseteq S$ , y supongamos que  $X \in \mathcal{I}$ , si  $X$  es un conjunto independiente en  $M$  y  $X \cap A \neq \emptyset$ . Demuéstrese que  $(S, \mathcal{I})$  es un matroide sobre el conjunto  $S$ .

Sea  $M$  un matroide sobre un conjunto finito  $S$  con la familia  $\mathcal{I}$  de conjuntos independientes. El elemento  $x \in S$  se denomina *bucle* (lazo) del matroide  $M$ , si  $\{x\} \notin \mathcal{I}$ . Los elementos  $x_1, \dots, x_r \in S$  se llaman *paralelos* en  $M$ , si ninguno de ellos es un bucle y si cada par de ellos  $\{x_i, x_j\} \notin \mathcal{I}$ .

8.72. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$  con la función de rango  $r$  y el operador de clausura  $(-)$ . ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen más abajo:

- a) el elemento  $x \in S$  es un bucle cuando y sólo cuando  $x \in \bar{\emptyset}$ ;

- b)  $x \in S$  es un bucle cuando y sólo cuando  $r(\{x\}) = 0$ ;
- c) si  $x$  es un bucle y si  $x \in A$ , entonces  $A$  es un conjunto dependiente del matroide  $M$ ;
- d) si  $x$  es un bucle, entonces  $x \in \bar{A}$  para todo  $A \subseteq S$ ;
- e) el elemento  $x$  es un bucle cuando y sólo cuando  $\{x\}$  es un ciclo del matroide  $M$ ;
- f) el elemento  $x$  es un bucle en aquel y sólo en aquel caso en que  $x$  no está contenido en ningún base del matroide  $M$ .

8.73. Demuéstrese que para cada matroide  $M$  sobre el conjunto finito  $S$  el bucle pertenece a cada superficie del matroide  $M$ , y el conjunto vacío es cerrado en  $M$  cuando y sólo cuando  $M$  no contiene bucles.

8.74. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$  con el operador de clausura  $(-)$  y supongamos que  $x, y, z \in S$ . Compruébese la validez de las siguientes afirmaciones:

- a) los elementos distintos  $x, y \in S$  son paralelos cuando y sólo cuando  $\{x, y\}$  es un ciclo del matroide  $M$ ;
- b) si el elemento  $x$  es paralelo a  $y$ , el elemento  $y$  es paralelo a  $z$ , y  $x \neq z$ , entonces  $x$  es paralelo a  $z$ ;
- c) si  $x \neq y$ , entonces  $x$  es paralelo a  $y$  cuando y sólo cuando  $x \in \bar{y}$ ,  $y \in \bar{x}$ , y  $x, y$  no son bucles del matroide  $M$ ;
- d) si  $x \in \bar{A}$  para cierto subconjunto  $A$  de  $S$ , y si  $y$  es paralelo a  $x$ , entonces  $y \in \bar{A}$ ;
- e) si  $A$  contiene dos elementos paralelos del matroide  $M$ , entonces  $A$  es un conjunto dependiente en  $M$ .

8.75. Sea  $G$  un grafo no orientado con un conjunto de aristas  $S$ . Demuéstrese que la familia de todos los cortes mínimos (por inclusión) del grafo  $G$  es precisamente familia de ciclos de cierto matroide  $M^*(G)$  sobre el conjunto  $S$ .

El matroide  $M^*(G)$  del problema 8.75 se denomina *matroide de los cortes* del grafo  $G$ . El matroide  $M$  se llama *cográfico*, si existe un grafo  $G$  cuyo matroide de los cortes  $M^*(G)$  es isomorfo a  $M$ .

8.76. ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen:

- a) los matroides de los cortes de los grafos  $K_5$  (de un grafo completo sobre 5 vértices) y  $K_{3,3}$  (de un grafo bipartido completo sobre 6 vértices, a 3 en cada capa) no son gráficos (véase la fig. 8.3);
- b) los matroides cíclicos de los grafos  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son cográficos;
- c) un matroide cíclico de cualquier grafo planario es cográfico;
- d) un matroide de los cortes de un grafo planario arbitrario es gráfico;
- e) el matroide de Fano  $\Phi$  no es gráfico, ni tampoco cográfico?

8.77. Supongamos que  $G(V, S)$  es un grafo con el conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de aristas  $S$ ,  $a, b \in V$  y  $A \subseteq S$ . Diremos que los vértices  $a$  y  $b$  son *A-conexos*, si existe una sucesión de aristas (camino)  $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  de  $A$  tal que  $x_0 = a$  y  $x_n = b$ . Para todo  $A \subseteq S$  definamos  $\bar{A}$ : la arista  $(a, b) \in \bar{A}$  cuando



y sólo cuando los vértices  $a$  y  $b$  son  $A$ -conexos. Demuéstrase que el conjunto de aristas del grafo con operador  $A \rightarrow \bar{A}$  forman el matroide  $M(G(V, S))$ .

8.78. Sea  $M(G(V, S))$  un matroide del grafo  $G(V, S)$  del problema 8.77. Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a)  $A \subseteq S$  es independiente en  $M$  cuando y sólo cuando  $G(V, A)$  es un bosque en  $G$ ;

b)  $B \subseteq S$  es una base del matroide  $M$  si y sólo si  $G(V, B)$  es un bosque engendrador, es decir, el bosque  $G(V, B)$  y el grafo  $G(V, B)$  tienen un mismo número de componentes conexos;

c)  $C \subseteq S$  es un ciclo en  $M$  cuando y sólo cuando  $C$  es un conjunto de aristas del ciclo en el grafo  $G(V, S)$ ;

d)  $H \subseteq S$  es un coátomo en  $M$  siempre que  $G(V, H)$  tiene el número de componentes conexos exactamente en una unidad mayor que  $G(V, S)$ , y es un subgrafo máximo con esta propiedad, y viceversa:

e)  $r(A) = |V| - k(A)$ , donde  $k(A)$  es el número de componentes conexos en el subgrafo  $G(V, A)$ ?

Las aristas de un grafo se llaman *independientes*, si no tienen vértices comunes. Una *combinación de pares* es un conjunto de aristas independientes del grafo. El vértice del grafo  $G$  se denomina *saturado* en la combinación de pares  $P$ , si es un vértice terminal de la arista de  $P$ .

8.79. Sea  $G$  un grafo no orientado con un conjunto de vértices  $V$ . Demuéstrase que si  $\mathcal{J}$  es una familia de todos aquellos subconjuntos  $A \subseteq V$  en que los elementos de  $A$  se saturan en cierta combinación de pares del grafo  $G$ , entonces  $\mathcal{J}$  es una familia de los conjuntos independientes de cierto matroide sobre el conjunto  $V$ , el cual lleva el nombre de *matroide de las combinaciones de pares*.

8.80. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ ;  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{H}$  son las familias de sus ciclos, conjuntos independientes, bases e hiperplanos, respectivamente;  $(-)$  es el operador de clausura del matroide  $M$ , y  $r$ , su función de rango. Demuéstrase la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(c3) si  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $|C| \geq 3$ ;

(i4) para todos los  $x, y \in S$  el conjunto  $\{x, y\} \in \mathcal{J}$ ;

(b3) para todos los  $x, y \in S$  existe una base  $B \in \mathcal{B}$  tal que

$$\{x, y\} \subseteq B;$$

(cl5)  $\bar{\emptyset} = \emptyset$  y  $\bar{x} = x$  para cada  $x \in S$ ;

(r7) para todo  $X \subseteq B$ , si  $|X| \leq 2$ , entonces  $r(X) = |X|$ ;

(h4) para cualesquiera  $x, y \in S$ ,  $x \neq y$ , existe un hiperplano  $H \in \mathcal{H}$  tal que  $x \in H$ ,  $y \notin H$ .

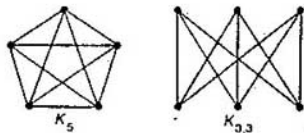


Fig. 8.3.

En el problema 8.80 están enunciadas las condiciones equivalentes para que un matroide sea geometría combinatoria.

8.81. Sea  $S$  un conjunto arbitrario. Agreguemos a cada sistema de axiomas del matroide uno más de los siguientes:

(c4) si  $X \subseteq S$ ,  $|X| = \infty$ , existe un ciclo  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $C \subseteq X$ ;

(i5) para cada  $A \subseteq \mathcal{I}$ ,  $|A| < \infty$ ;

(b4) para cada  $B \in \mathcal{B}$ ,  $|B| < \infty$ ;

(ci6) si  $X \subseteq S$ , existe  $X' \subseteq X$ ,  $|X'| < \infty$ , tal que  $\overline{X'} = \overline{X}$ ;

(r8) si  $X \subseteq S$ , existe un subconjunto  $X' \subseteq X$ ,  $|X'| < \infty$ , tal que  $r(X') = r(X)$ ;

(h5) si  $X \subseteq S$  y si para cada hiperplano  $H \in \mathcal{H}$  se tiene  $X \not\subseteq H$ , se encontrará un subconjunto  $X' \subseteq X$ ,  $|X'| < \infty$ , tal que para cada hiperplano  $H \in \mathcal{H}$  tenemos  $X' \subseteq H$ .

Obtendremos una generalización de los conceptos de matroide y de geometría combinatoria sobre los conjuntos infinitos. Demuéstrese la equivalencia de los conceptos obtenidos en este caso.

8.82. Demuéstrese que el subconjunto  $A \subseteq B$  de la geometría combinatoria  $G$  sobre el conjunto  $S$  puede ser representado como una unión de los ciclos cuando y sólo cuando para todos los conjuntos cerrados  $B$  el conjunto  $A \setminus B$  no se compone de un solo punto.

## § 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides

8.83. Sea  $\mathcal{B}$  una familia de bases del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrese que  $\mathcal{B}^* = \{S \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$  es un conjunto de bases del matroide  $M^*$  sobre el conjunto  $S$ .

El matroide  $M^*$  del problema 8.83 se denomina *dual con relación a  $M$* . Es fácil ver que  $M$  es el matroide dual con relación a  $M^*$ . Por eso diremos que  $M$  y  $M^*$  son *matroides duales*. La base del matroide  $M^*$  se llama *cobase* del matroide  $M$ . Análogamente, el ciclo del matroide  $M^*$  se llama *cociclo* del matroide  $M$ ; el bucle de  $M^*$ , *cobucle* (istmo) en  $M$ ; la función de rango de  $M^*$ , *función de corranjo* en  $M$ , etc. La función de rango del matroide  $M^*$  se designará por  $r^*$ ; la familia de sus bases, por  $\mathcal{B}^*$ , la familia de ciclos, por  $\mathcal{C}^*$ , etc.

8.84. Sean  $M$  y  $M^*$  los matroides duales sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrese que para todos los  $A \subseteq S$  tiene lugar la relación

$$r^*(A) = |A| + r(S \setminus A) - r(S),$$

donde  $r$  y  $r^*$  son funciones de rango de los matroides  $M$  y  $M^*$ , respectivamente.

8.85. Muéstrese que un matroide dual con relación a una geometría combinatoria no es forzosamente geometría combinatoria.

8.86. ¿Podrá un conjunto ser a la vez un ciclo y un coátomo en el matroide  $M$ ?

8.87. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  con la función de rango  $r$ . Demuéstrese que  $M^{**} = M$  y  $r^*(S) = |S| - r(S)$ .

8.88. Sean  $M$  y  $M^*$  los matroides duales sobre el conjunto  $S$ . Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) si  $A \subseteq S$  es un conjunto independiente del matroide  $M$ , entonces  $S \setminus A$  contiene la cobase del matroide  $M$ ;

b) si  $A^* \subseteq B$  es un conjunto independiente del matroide  $M^*$ , entonces  $S \setminus A^*$  contiene la base del matroide  $M$ ;

c) cualquier base  $B$  del matroide  $M$  tiene una intersección no vacía con cada cociclo del matroide  $M$ ;

d) cualquier cobase  $B^*$  del matroide  $M$  tiene una intersección no vacía con cada ciclo del matroide  $M$ ;

e) para cualquier conjunto independiente  $A$  del matroide  $M$  existe un cociclo  $C^*$  tal que  $|A \cap C^*| = 1$ ; además, si  $|A| < r(S)$ , entonces existe un cociclo  $C_1^*$  tal que  $|A \cap C_1^*| = \emptyset$ .

8.89. Sean  $M$  y  $M^*$  los matroides duales sobre el conjunto  $S$  y supongamos que  $A$  y  $A^*$  son unos subconjuntos del conjunto  $S$  tales que  $A \cap A^* = \emptyset$ , y  $A$  es independiente en  $M$ , mientras que  $A^*$  es independiente en  $M^*$ . Demuéstrase que existe una base  $B$  del matroide  $M$  tal que  $A \subseteq B$  y  $A^* \subseteq B^*$ .

8.90. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$ . Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) el subconjunto  $B \subseteq S$  es la base del matroide  $M$  cuando y sólo cuando  $B$  es el subconjunto mínimo que tiene intersección no vacía con cada cociclo del matroide  $M$ ;

b) el subconjunto  $B^* \subseteq S$  es una cobase del matroide  $M$  cuando y sólo cuando dicho subconjunto es mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada ciclo del matroide  $M$ ;

c) el subconjunto  $C \subseteq S$  es un ciclo del matroide  $M$  cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada base del matroide  $M^*$ ;

d) un subconjunto  $C^* \subseteq S$  es un cociclo del matroide  $M$  cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo, que tiene una intersección no vacía con cada base del matroide  $M$ .

8.91. Demuéstrase que si  $C^*$  es un cociclo del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$ , entonces el conjunto  $(S \setminus C^*) \cup \{x\}$  contiene la base  $B$  del matroide  $M$  para cualquier  $x \in C$ .

8.92. Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}^*$  las familias de ciclos y coátomos, respectivamente, del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$ . Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) el subconjunto  $X \subseteq S$  es un ciclo del matroide  $M$  cuando y sólo cuando es un subconjunto mínimo con  $|X \cap C^*| \neq 1$  para cualquier cociclo  $C^* \in \mathcal{C}^*$ ;

b) un subconjunto  $X^* \in \mathcal{C}^*$  cuando y sólo cuando  $X^*$  es tal subconjunto mínimo que  $|X^* \cap C| \neq 1$  para cada ciclo  $C \in \mathcal{C}$ .

8.93. Sea  $C$  un ciclo del matroide  $M$  y supongamos que  $x$  e  $y$  son elementos diferentes de  $S$ . Demuéstrase que existe un cociclo  $C^*$  que contiene  $x$  e  $y$ , pero no contiene ningún otro elemento de  $C$ .

8.94. Sea  $C$  un matroide sobre el conjunto  $S$ , y  $x, y, z$ , elementos diferentes de  $S$ . Demuéstrase que si existen los ciclos  $C_1$ , que con-

tiene  $x$  e  $y$ , y  $C_2$ , que contiene  $y$  y  $z$ , existe también el ciclo  $C_3$  que contiene  $x$  y  $z$ .

8.95. Muéstrese que un matroide, dual con relación al matroide transversal, no es forzosamente transversal.

8.96. Demuéstrese que para cualquier grafo  $G$ , su matroide de cortes  $M^*(G)$  es dual con relación al matroide cíclico  $M(G)$ , es decir, que  $M^*(G) = (M(G))^*$ .

Recordemos que el grafo  $G^*$  es dual con relación al grafo  $G$ , si entre las aristas de los grafos  $G$  y  $G^*$  existe una correspondencia biunívoca que posee la propiedad de que un subconjunto de aristas de  $G$  forma un ciclo en  $G$  cuando y sólo cuando el correspondiente subconjunto de aristas de  $G^*$  forma un corte en  $G^*$ . Un grafo será planario cuando y sólo cuando poseo un grafo dual.

8.97. Demuéstrese que si un grafo  $G^*$  es dual con relación a  $G$ , entonces el matroide cíclico  $M(G^*)$  del grafo  $G^*$  es isomorfo al matroide  $(M(G))^*$ , dual con relación al matroide cíclico del grafo  $G$ .

8.98. Un matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  se denomina euleriano, si  $S$  puede representarse en forma de una unión de ciclos disjuntos. Un matroide se llama bipartido, si todo su ciclo contiene un número par de elementos. Demuéstrese que el matroide  $M$  es bipartido cuando y sólo cuando el matroide  $M^*$  es euleriano.

8.99. Sea  $G(S)$  un geometría sobre el conjunto  $S$  con el operador de clausura  $(-)$ . Demuéstrese que  $\mathcal{J}_{[A, B]}(C) = \overline{(C \cup A \cap B)} \setminus A$  es un operador de clausura, pero sobre el conjunto  $B \setminus A$ , donde  $A, B \subseteq S$ .

8.100. Demuéstrese que el subconjunto  $B \subseteq S$ , provisto para todo  $C \subseteq B$  de la relación  $C \rightarrow \mathcal{J}(C)$ , donde  $\mathcal{J}(C) = \overline{C} \cap B$  ( $\overline{-}$  significa en geometría un operador de clausura) forma la geometría  $G(B)$ , llamada *subgeometría* de la geometría  $G(S)$ .

8.101. Demuéstrese que un conjunto  $S \setminus A$ , provisto para todo  $C \subseteq S \setminus A$  de la relación  $C \rightarrow \mathcal{J}(C)$ , donde  $\mathcal{J}(C) = \overline{(C \cup A)} \setminus A$ , forma una pregeometría que se denotará por  $G/A$  y se llamará *contracción* de la geometría  $G(S)$ .

Sea  $\mathcal{J}$  una familia de todos los conjuntos independientes del matroide  $M$  sobre  $S$ ,  $B \subseteq S$ . Designemos con  $\mathcal{J}(M|B)$  un conjunto  $\{X: X \subseteq B, X \in \mathcal{J}\}$ , y con  $\mathcal{J}(M.B)$ , una familia de tales  $X \subseteq B$ , para los cuales existe un subconjunto independiente máximo  $Y$  de  $S \setminus B$  en  $M$  tal que  $X \cup Y \in \mathcal{J}$ .

8.102. Demuéstrese que  $\mathcal{J}(M|B)$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide  $M|B$  sobre el conjunto  $B$ , que se denomina *contracción* de  $M$  en  $B$ . (Compárese  $M|B$  con el matroide  $G(B)$  del problema 8.100).

8.103. Demuéstrese que  $\mathcal{J}(M.B)$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide  $M.B$  sobre el conjunto  $B$  que se llama *contracción de  $M$  con ayuda de  $B$* . Muéstrese que  $M.B \equiv M/(S \setminus B)$ , donde  $M/(S \setminus B)$  es una contracción del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  definida en el problema 8.101.

8.104. Sea  $M | A$  un submatroide del matroide  $M$  y sean  $r, r_A$  las funciones de rango de los matroides  $M$  y  $M | A$ , respectivamente. Demuéstrese que para todo  $B \subseteq A$ .

- $B$  es independiente en  $M | A \Leftrightarrow B$  independiente en  $M$ ;
- $B$ , que es la base del submatroide  $M | A \Leftrightarrow B$ , es la base del conjunto  $A$  en  $M$ ;
- $B$ , que es un ciclo en  $M | A \Leftrightarrow B$ , es un ciclo en  $M$ ;
- $r_A(B) = r(B)$ .

8.105. Sea  $M/A$  una contracción del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  y supongamos que  $r, r_{S/A}$  son funciones de rango de los matroides  $M$  y  $M/A$ , respectivamente. Demuéstrese que para todo  $X \subseteq S \setminus A$  son válidas las siguientes afirmaciones:

- un conjunto  $X$  es independiente en  $M/A$  cuando y sólo cuando  $X \cup Y$  es independiente en  $M$  para todos los subconjuntos independientes  $Y \subseteq A$ ;
- $X$  es una base del matroide  $M/A$  cuando y sólo cuando  $X \cup B$  es la base del matroide  $M$  para todas las bases  $B$  del conjunto  $A$ ;
- $X$  es un ciclo en  $M/A$  cuando y sólo cuando  $X = C \setminus A = \emptyset$ , donde  $C$  es el ciclo del matroide  $M$  y  $X$  es el conjunto mínimo con tal propiedad;
- $r_{S/A}(X) = r(X \cup A) - r(A)$ .

8.106. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  y supongamos que  $B \subseteq A \subseteq S$ . Demuéstrese las siguientes relaciones:

- $(M | A) | B = M | B$ ;
- $M.B = (M.A).B$ ;
- $(M | A).B = (M.(S \setminus (A \setminus B))) | B$ ;
- $(M.A) | B = (M | (S \setminus (A \setminus B))).B$ .

8.107. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  y  $A \subseteq S$ . Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

- $(M | A)^* = M^* \setminus (S \setminus A)$ ;
- $(M \setminus A)^* = M^* | (S \setminus A)$ .

8.108. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  con el operador de clausura  $\bar{\phantom{x}}$ . Entonces el par  $(S, \mathcal{I}_{[A, B]})$  se denominará *menor del matroide  $M$* . ¿Será matroide cualquier menor del matroide  $M$ ? Argumentétese la respuesta.

Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$ . Muy a menudo para mayor comodidad el submatroide  $M | (S \setminus \{a\})$ , donde  $a \in S$ , se denota por  $M - a$  y suele decirse que se obtiene del matroide  $M$  por exclusión del elemento  $a$ . Análogamente, un submatroide  $M | (S \setminus A)$ , donde  $A \subseteq S$ , del matroide  $M$  se designa por  $M - A$ . En este caso resulta natural llamar menor del matroide a una sucesión arbitraria de contracciones y exclusiones.

8.109. Demuéstrese que si  $\bar{r}$  es una función de rango del menor  $(M/A) - B$  del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  con la función de rango  $r$ , entonces para cada  $\mathcal{Z} \subseteq S \setminus (A \cup B)$  se verifica la relación

$$\bar{r}(\mathcal{Z}) = r(\mathcal{Z} \cup A) - r(A).$$

8.110. Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

a) todo menor de un matroide gráfico es gráfico;

b) cada submatroide de un matroide transversal es transversal.

8.111. Sean  $M_1 = (S_1, \mathcal{J}_1)$  y  $M_2 = (S_2, \mathcal{J}_2)$  los matroides sobre los conjuntos  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, y  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Pongamos  $S = S_1 \cup S_2$  y  $\mathcal{J} = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{J}_1, B \in \mathcal{J}_2\}$ . Demuéstrese que  $M = (S, \mathcal{J})$  es un matroide.

El matroide citado en el problema 8.111 se denomina *suma directa de matroides* y se designa por  $M_1 \oplus M_2$ .

8.112. Sea  $M_i = (S_i, \mathcal{J}_i)$  un matroide sobre el conjunto  $S_i$  con una familia de conjuntos independientes  $\mathcal{J}_i$ , donde  $i = 1, 2$ , y  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Para cada  $A \subseteq S = S_1 \cup S_2$  y  $A_i \subseteq S_i$  ( $i = 1, 2$ ) demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(1)  $M = M_1 + M_2$ ;

(2)  $r(A_1 \cup A_2) = r(A_1) + r(A_2)$ ;

(3)  $r(M) = r(M_1) + r(M_2)$ ;

(4)  $r(S) \geq r(S_1) + r(S_2)$ ;

(5)  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{J}$  cuando y sólo cuando  $A_i \in \mathcal{J}_i$  para cada  $i = 1, 2$ ;

(6)  $A_1 \cup A_2$  es un conjunto engendrador del matroide  $M$  cuando y sólo cuando  $A_i$  es un conjunto engendrador del matroide  $M_i$ , donde  $i = 1, 2$ ;

(7)  $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ ;

(8)  $A_1 \cup A_2$  es un conjunto dependiente en  $M$  cuando y sólo cuando  $A_1$  es un conjunto dependiente en  $M_1$  ó  $A_2$  es un conjunto dependiente en  $M_2$ ;

(9)  $A$  es un hiperplano del matroide  $M$  cuando y sólo cuando  $A = S_1 \cup A_2$  y  $A_2$  es un hiperplano del matroide  $M_2$ , o bien  $A = A_1 \cup S_2$  y  $A_1$  es hiperplano del matroide  $M_1$ ;

(10)  $\overline{S_1 \cup A} = \overline{S_1} \cup \overline{A}$ ;

(11)  $\overline{S_1 \cap A} = \overline{S_1} \cap \overline{A}$ ;

(12)  $S_1 \cup K$  es cerrado para todos los conjuntos cerrados  $K$  de  $M$ ;

(13) todos los hiperplanos del matroide  $M$  contienen o bien el conjunto  $S_1$ , o bien el complemento de éste;

(14)  $C$  es un ciclo del matroide  $M$  cuando y sólo cuando  $C = A_1 \cup A_2$ , con la particularidad de que o bien  $A_1$  es un ciclo en  $M_1$  y  $A_2 = \emptyset$ , o bien  $A_2$  es un ciclo en  $M_2$  y  $A_1 = \emptyset$ ;

(15) si  $B$  es una base del matroide  $M$ , entonces  $B \cap S_1$  será también una base, pero en el matroide  $M_1$ ;

(16) si  $B \cap S_1$  es una base del matroide  $M$  y  $B \setminus S_1$ , una base del matroide  $M - S_1$ , entonces  $B$  es la base del matroide  $M$ ;

(17) si  $A_1$  es un conjunto independiente en el matroide  $M_1$  y  $A_2$ , un conjunto independiente en  $M - S_1$ , entonces  $A_1 \cup A_2$  es un conjunto independiente en  $M$ ;

(18)  $r(M - S_1) = r(M/S_1)$ ;

(19)  $M - S_1 = M/S_1$ .

8.113. Sea  $M = M_1 \oplus M_2$ . Demuéstrese que para todos los  $A_i \subseteq S_i$  ( $i = 1, 2$ ) son válidas las siguientes afirmaciones:

$$a) (M_1 - A_1) \oplus (M_2 - A_2) = M_1/A_1 \oplus M_2/A_2;$$

$$b) M/(A_1 \cup A_2) = M_1/A_1 \oplus M_2/A_2;$$

$$c) M^* = M_1^* \oplus M_2^*.$$

Si  $M = M_1 \oplus M_2$ , los matroides  $M_1$  y  $M_2$  llevan el nombre de *separadores* del matroide  $M$ . Un matroide privado de separadores se llama *conexo*.

8.114. Supongamos que  $M$  es un matroide sobre el conjunto  $S$  y  $p \in S$ . ¿Serán ciertas las afirmaciones que siguen:

a)  $p$  es un separador cuando y sólo cuando  $p$  es un bucle del matroide  $M$ ;

b) un matroide conexo es o bien un bucle, o bien no tiene bucles.

8.115. Demuéstrase que  $M = M_1 \oplus M_2$  cuando y sólo cuando el retículo  $L(M)$  de superficies del matroide  $M$  es igual al producto directo de los retículos de las superficies de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ , es decir,  $L(M) = L(M_1) \times L(M_2)$ .

8.116. Supongamos que  $M$  es un matroide conexo sobre el conjunto  $S$  y  $p \in S$ . Demuéstrase que en este caso o  $M - p$ , o bien  $M/p$  es un matroide conexo.

8.117. Demuéstrase que si  $M'$  es el menor de un matroide conexo  $M$ , entonces existe una sucesión de matroides  $M_1, M_2, \dots, M_n, M_{n+1}$  tal que  $M = M_1, M' = M_{n+1}$  y para cualquier  $i, i = 1, 2, \dots, n, M_{i+1} = M_i - p_i$ , o bien  $M_{i+1} = M_i/p_i$ .

8.118. Dese la definición de la suma directa  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  de cualquier número finito de matroides  $M_i$ . Demuéstrase para  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  las afirmaciones análogas a las citadas en los problemas 8.111 y 8.115.

8.119. Sea  $f$  una función semimodular monótona creciente de números enteros, definida sobre los subconjuntos de un conjunto finito  $S$ ;  $f(\emptyset) = 0$  y  $\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid \text{tales que para cada } B \subseteq A \text{ tiene lugar la desigualdad } |B| \leq f(B)\}$ . Demuéstrase que  $\mathcal{J}$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide cuya función de rango  $r(A)$  se calcula, para todos los  $A \subseteq S$ , según la fórmula

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\}.$$

8.120. Sea  $M_i = (S, r_i)$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$  con la función de rango  $r_i$  y una familia de conjuntos independientes  $\mathcal{J}_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Demuéstrase que

$$\mathcal{J} = \{A \subseteq S \mid A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \text{ donde } A_i \in \mathcal{J}_i\}$$

es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide cuya función de rango  $r$  se define por la relación siguiente:

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i(B) + |A \setminus B| \right\}.$$

El matroide del problema 8.120 se llama unión (reunión) de matroides  $M_i$  y se designa por  $\bigcup_{i=1}^n M_i$ .

8.121. Sea  $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ , donde  $M_i$  es un matroide sobre el conjunto  $S$  con la función de rango  $r_i$ . Demuéstrese que para todos los  $A \subseteq S$  son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) el conjunto  $A$  es independiente en  $M$ ;

b)  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , donde  $A_i$  es un conjunto independiente del matroide  $M_i$  para cada  $i$ ;

c)  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , donde  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para cualquier  $i \neq j$  y  $A_i$  es un conjunto independiente del matroide  $M_i$  para cualesquiera  $i$ .

8.122. Sean  $M_1 = (S, \mathcal{J}_1)$  y  $M_2 = (S, \mathcal{J}_2)$  matroides sobre el conjunto  $S$  con las funciones de rango  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente. Demuéstrese que el número máximo de elementos del conjunto  $A_1 \cup A_2$  tal que  $A_1 \in \mathcal{J}_1$  y  $A_2 \in \mathcal{J}_2$  es igual a

$$\min_{A \subseteq S} \{r_1(A) + r_2(S \setminus A)\}.$$

8.123. Sean  $M_1$  y  $M_2$  los matroides sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrese que la potencia máxima del conjunto independiente en ambos matroides es  $\min_{A \subseteq S} \{r_1(A) + r_2(S \setminus A)\}$ .

8.124. Sean  $B_1$  y  $B_2$  las bases del matroide  $M$ , y  $X_1 \cup Y_1$ , una partición de la base  $B_1$  en subconjuntos no vacíos disjuntos. Demuéstrese que existe tal partición  $X_2 \cup Y_2$  de la base  $B_2$  en la que  $X_1 \cup Y_2$  y  $X_2 \cup Y_1$  también son bases del matroide  $M$ .

8.125. Sean  $S$  y  $T$  las bases del matroide  $M$  y  $S = \bigcup_{i=1}^h S_i$ , una partición de la base  $S$ . Demuéstrese que existe una partición correspondiente de la base  $T = \bigcup_{i=1}^h T_i$  tal que  $(S \setminus S_i) \cup T_i$  es la base del matroide  $M$  para cualquier  $i = 1, 2, \dots, h$ .

Se llama extensión unipuntual del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  mediante el punto  $a \notin S$ , tal matroide  $M'$  sobre el conjunto  $S \cup \{a\}$  que  $r(M') = r(M)$  y  $M = M' - a$ .

8.126. Demuéstrese que para cada matroide existe una extensión unipuntual.

Suele decirse que un par de superficies  $(A, B)$  es modular, si  $C \cup A \cap B = C \cup (A \cap B)$  para todas las superficies  $C \subseteq B$ . En términos de la función de rango  $r$  un par de superficies  $(A, B)$  es modular cuando y sólo cuando  $r(A \cup B) + r(A \cap B) = r(A) + r(B)$ .



8.127. Sean  $A, B$  unas superficies de la geometría  $G$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Demuéstrase que el par  $(A, B)$  es no modular cuando y sólo cuando existe un ciclo  $K$  tal que

$$K \equiv (A \cup B) \setminus \bar{\emptyset}, \quad K \cap A = \emptyset, \quad K \cap B \neq \emptyset.$$

8.128. Sean  $A, B$  unas superficies de la geometría  $G$ . Demuéstrase que el par  $(A, B)$  es modular si y sólo si el par  $(A \setminus (A \cap B), B \setminus (A \cap B))$  es modular en la contracción  $G/A \cap B$ .

Se denomina *filtro modular*  $\mathcal{M}$  de la pregeometría  $G(S)$  a una familia  $\mathcal{M}$  de subconjuntos del conjunto  $S$  tal que

a) si  $A \in \mathcal{M}$  y  $A \subseteq B$ , entonces  $B \in \mathcal{M}$ ;

b) si  $A, B \in \mathcal{M}$  y  $(A, B)$  es un par modular, entonces  $A \cap B \in \mathcal{M}$ .

8.129. Sea  $G(S \cup \{p\})$  una pregeometría sobre el conjunto  $S \cup \{p\}$ ,  $p \notin S$ , con el operador de clausura  $\mathcal{J}$  y la función de rango  $r$ . Demuéstrase que el conjunto  $\mathcal{M} = \{A \subseteq S : p \in \mathcal{J}(A)\}$  forma un filtro modular de la subpregeometría  $G(S)$ .

8.130. Demuéstrase que si  $\mathcal{M}$  es un filtro modular de la pregeometría  $G(S)$ , entonces existe una única extensión unipuntual  $G(S \cup \{p\})$  tal que  $\mathcal{M} = \{A \subseteq S : p \in \mathcal{J}_{S \cup \{p\}}(A)\}$ .

8.131. Supongamos que  $\mathcal{M}$  es un filtro modular de la pregeometría  $G(S)$  y  $G(S \cup \{p\})$ , la extensión  $G(S)$  construida con ayuda de  $\mathcal{M}$ .

Demuéstrase que de superficies en  $G(S \cup \{p\})$  sirven todos los subconjuntos  $S \cup \{p\}$  de los siguientes tipos:

a)  $A \cup \{p\}$ , si  $A$  es una superficie de la pregeometría  $G(S)$  y  $A \in \mathcal{M}$ ;

b)  $A$ , si  $A$  es una superficie de la pregeometría  $G(S)$  y  $A \notin \mathcal{M}$ ;

c)  $A \cup \{p\}$ , si  $A$  es una superficie de la pregeometría  $G(S)$  y  $A$  no se dispone en  $\mathcal{M}$  y no se cubre en  $G(S)$  por ninguna superficie de  $\mathcal{M}$ .

8.132. Compruébese que las extensiones unipuntuales de la pregeometría  $G(S)$ , ordenadas según la inclusión de sus filtros modulares en  $G(S)$ , forman un retículo.

8.133. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$  y sea  $\mathcal{J}$  una familia de sus conjuntos independientes;  $r$  es su función de rango y  $k$ , un número positivo entero tal que  $k \leq r(S)$ . Demuéstrase que la familia  $\mathcal{J}_k = \{A \subseteq S \mid A \in \mathcal{J} \text{ y } |A| \leq k\}$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide  $M_k$  sobre el conjunto  $S$  con la función de rango  $r_k(A) = \min\{k, r(A)\}$ .

El matroide  $M_k$  citado en el problema 8.133 recibe el nombre de *k-truncamiento del matroide  $M$* . Observemos que el retículo de superficies  $M_k$  se obtiene del retículo  $L(M)$  de superficies del matroide  $M$  al borrar todas las superficies de rango  $\geq k$  y al sustituirlas por un nuevo elemento maximal del retículo.

8.134. Hállese el truncamiento de un matroide cíclico del grafo completo sobre cuatro vértices.

8.135. Dense los ejemplos de matroides gráficos no isomorfos cuyos truncamientos son isomorfos.

8.136. ¿Podrá ser no gráfico el truncamiento de un matroide gráfico? ¿Podrá ser gráfico el truncamiento de un matroide no gráfico? Dense ejemplos.

Si el matroide  $M$  sobre un conjunto  $S$  es isomorfo a  $(r(H) - 1)$ -truncamiento del matroide  $H$  sobre el conjunto  $S$ , se dice que el matroide  $H$  es el *incremento del matroide  $M$* . Sin perder la generalidad podemos considerar que el retículo de superficies del matroide  $H$  se obtiene a partir del retículo de superficies del matroide  $M$  incluyendo el nivel de nuevos coátomos, situado más arriba de los coátomos iniciales y por debajo del elemento unitario del retículo.

8.137. ¿Existe un incremento para todo matroide?

8.138. Sea  $M$  un matroide definido sobre el conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , de cuyas bases intervienen los subconjuntos de  $S$  que contienen tres elementos, a excepción del subconjunto  $\{1, 2, 3\}$ . ¿Existe un incremento de este matroide?

Sean  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{F}$  dos anticadenas del booleano  $\mathcal{P}(S)$ . Diremos que la anticadena  $\mathcal{H}$  es *menor* que la  $\mathcal{F}$ , si para todo  $A \in \mathcal{H}$  existe un elemento  $B \in \mathcal{F}$  tal que  $A \subseteq B$ . En el caso cuando tal elemento  $B \in \mathcal{F}$  es único, se dice que  $\mathcal{F}$  *parte* la anticadena  $\mathcal{H}$ .

8.139. Demuéstrese que los diferentes incrementos (o, con mayor precisión, las familias de coátomos en los retículos de superficies de los incrementos) del matroide  $M$  sobre el conjunto finito  $S$ , ordenados como anticadenas del booleano, forman el retículo completo  $E(G)$ , cuyo elemento minimal se denomina *incremento libre del matroide  $M$* .

8.140. Demuéstrese que cada erección de la geometría  $G$  sobre el conjunto  $S$  parte la anticadena de todas las bases de la geometría  $G$ .

8.141. Demuéstrese que si el incremento libre de la geometría  $G$  sobre el conjunto finito  $S$  se conoce, todas los demás incrementos de esta geometría pueden obtenerse mediante la partición del incremento libre.

8.142. Demuéstrese que un matroide homogéneo  $U_{3,7}$  tiene 171 diferentes incrementos.

8.143. ¿Podrá incrementarse el matroide de Vamos (véase el problema 8.21)?

8.144. Constrúyase un matroide de rango 3 que no tenga incrementos.

8.145. (?). La superficie  $A$  de un matroide  $M$  se denomina *esencial*, si  $M|A$  tiene un incremento no trivial. Se puede mostrar que sólo las superficies esenciales junto con sus rangos definen unívocamente un matroide. Ofrézcase el método para identificar las superficies esenciales de un matroide.

Se llama *aplicación fuerte* de un retículo geométrico  $L_1$  en el retículo geométrico  $L_2$  la función  $\sigma: L_1 \rightarrow L_2$  que satisface las condiciones siguientes:

a)  $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$  para todos los  $x, y \in L_1$ ;

b) si  $p$  es un átomo del retículo  $L_1$ , entonces  $\sigma(p)$  es un átomo o cero del retículo  $L_2$ .

8.146. Densé ejemplos de las siguientes aplicaciones  $\varphi$  del retículo geométrico  $L_1$  en el retículo geométrico  $L_2$ :

- $\varphi$  no es una aplicación fuerte;
- $\varphi$  es una aplicación fuerte;
- $\varphi$  es un homomorfismo (véase el problema 7.87) que no es una aplicación fuerte;
- $\varphi$  es una aplicación fuerte que no constituye un homomorfismo.

8.147. Sea  $L_1$  un retículo geométrico de superficies de un matroide gráfico y supongamos que  $\sigma: L_1 \rightarrow L_2$  es una aplicación fuerte. ¿Está obligada a ser  $\sigma(L_1)$  un retículo de superficies de cierto matroide gráfico?

8.148. Sea  $\sigma$  una aplicación fuerte del retículo geométrico  $L_1$  en el retículo geométrico  $L_2$ . Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

- si  $x \prec y$  en  $L_1$ , entonces  $\sigma(x) \leq \sigma(y)$  en  $L_2$ ;
- $r_2(\sigma(x)) \leq r_1(x)$  para cualquier  $x \in L_1$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son funciones de rango de los retículos  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente;
- si  $y \in L_2$ , existe un  $x \in L_1$  tal que  $\sigma(x) = y$ , y  $r_2(y) = r_1(x)$ , es decir, para cada elemento de imagen se encontrará una preimagen de rango igual.

8.149. Demuéstrase que la aplicación  $\sigma: L_1 \rightarrow L_2$  es un isomorfismo cuando y sólo cuando  $\sigma$  es una aplicación fuerte «sobre» y  $r(L_1) = r(L_2)$ .

Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$ . Unamos a cada matroide  $M$  un elemento nulo  $0$  que corresponde al conjunto vacío en el siguiente sentido: sea  $0 \in S$  y supongamos que  $M_0$  es la suma directa  $M \oplus \{0\}$  sobre el conjunto  $S \cup 0$ , donde  $\{0\}$  es un matroide de rango  $0$  sobre el conjunto de un solo elemento  $\{0\}$ . Emplearemos un mismo símbolo  $0$  para denotar los elementos no nulos de cada uno de los matroides  $M_0$ .

Se denomina *aplicación fuerte* del matroide  $M(S)$  en el matroide  $N(T)$  a una función  $\sigma: S \cup 0 \rightarrow T \cup 0$  tal que  $\sigma(0) = 0$  y la preimagen de cualquier conjunto cerrado del matroide  $N_0$  es también cerrada en  $M_0$ .

Sean  $M(S)$  y  $N(T)$  unos matroides sobre los conjuntos  $S$  y  $T$ , respectivamente;  $L(M)$  y  $L(N)$ , retículos de superficies de los matroides  $M$  y  $N$ , respectivamente y  $\sigma: S \cup 0 \rightarrow T \cup 0$ . Emplearemos para denotar las superficies en el retículo y en el matroide una misma letra: minúscula en el primer caso y mayúscula, en el segundo, subrayando con ello que en el retículo la superficie es un elemento, y en el matroide, un subconjunto. Definamos la aplicación  $\sigma^*: L(M) \rightarrow L(N)$  del modo siguiente: si  $x \in L(M)$ , entonces  $\sigma^*(x) \in L(N)$  y le corresponde en el matroide  $N$  la superficie  $\sigma(X)$ .

8.150. Supongamos que  $M(S)$  y  $N(T)$  son matroides sobre los conjuntos  $S$  y  $T$ , respectivamente y que  $\sigma: S \cup 0 \rightarrow T \cup 0$  es una función tal que  $\sigma(0) = 0$ . Demuéstrase la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- a) para todo subconjunto  $A \subseteq S$  tenemos  $\sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{\sigma(A)}$ ;  
 b)  $\sigma$  es una aplicación fuerte de  $M(S)$  en  $M(S/X)$ ;  
 c)  $\sigma^*$  es una aplicación fuerte de  $L(M)$  en  $L(N)$ .

8.151. Supongamos que  $X \subseteq S$  y la aplicación  $\sigma: S \cup 0 \rightarrow (S \setminus X) \cup 0$  está definida del modo siguiente:

$$\sigma(a) = \begin{cases} a, & \text{si } a \in S \setminus X; \\ 0, & \text{si } a \in X \cup 0. \end{cases}$$

Demuéstrese que  $\sigma$  induce la aplicación fuerte desde el matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  en su contracción  $M/X$ .

La aplicación fuerte  $\sigma: M(S) \rightarrow M(S/X)$  del problema 8.151 se llama *aplicación de contracción* (o, simplemente, *contracción*).

8.152. Supongamos que  $M$  es un matroide en el conjunto  $S$ ,  $T \subseteq S$  y  $\sigma(a) = a$  para todo  $a \in T \cup 0$ . Compruébese que  $\sigma$  induce la aplicación fuerte del matroide  $M$  en un submatroide  $M|T$ , denominada *encaje*.

8.153. Supongamos que  $M$  es un matroide sobre el conjunto  $S$  de rango  $n$  y  $M_k$ , su  $k$ -truncamiento. Compruébese que una función idéntica sobre el conjunto  $S \cup 0$  induce la aplicación fuerte del matroide  $M$  en  $M_k$ , llama  $(n - k)$ -truncamiento.

Los 1-truncamientos del matroide  $M$  de rango  $n$  en el matroide  $M_{n-1}$  se llamarán simplemente *truncamientos* del matroide  $M$ .

Sean  $M$  y  $N$  los matroides sobre un mismo conjunto  $S$  tales que  $\sigma(a) = a$  induce para todo  $a \in S \cup 0$  la aplicación fuerte de  $M$  en  $N$ . Entonces  $N$  se denomina *factor del matroide  $M$* , y  $M$ , *elevador (lift) del matroide  $N$* .

8.154. Sean  $M$  y  $N$  dos matroides sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- a)  $N$  es un factor del matroide  $M$ ;  
 b) si el conjunto  $X$  es cerrado en  $N$ , entonces  $X$  es también cerrado en  $M$ ;  
 c) para cualquier subconjunto  $A \subseteq S$  tenemos  $\overline{A}^M \subseteq \overline{A}^N$ ;  
 d)  $M^*$  es un factor del matroide  $N^*$ ;  
 e) cada ciclo del matroide  $M$  es una unión de ciclos del matroide  $N$ ;  
 f) para cualquier par de subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $S$  tales que  $A \subseteq B$  tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$r_M(B) - r_M(A) \geq r_N(B) - r_N(A).$$

Una aplicación fuerte del matroide  $M(S)$  en el matroide  $N(S)$  se llama *elemental*, si  $r(M) = r(N) - 1$ . En este caso  $N$  se denomina *cociente*<sup>1)</sup> (factor elemental) del matroide  $M$ , y  $M$ , *elevador (lift) elemental del matroide  $N$* .

<sup>1)</sup> En inglés se denomina *quotient*.

8.155. Sean  $M$  y  $N$  los matroides sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrase que una función idéntica sobre el conjunto  $S \cup 0$  induce la aplicación fuerte del matroide  $M$  en el matroide  $N$  cuando y sólo cuando induce también una aplicación fuerte del matroide  $N^*$  en el matroide  $M^*$ , donde los matroides  $M^*$  y  $N^*$  son duales con relación a  $M$  y  $N$ , respectivamente.

8.156. Demuéstrase que  $M$  es un factor elemental del matroide  $N$  cuando y sólo cuando  $M^*$  es un elevador elemental del matroide  $N^*$ .

8.157. Demuéstrase que cada aplicación fuerte puede ser desarrollada en una sucesión de aplicaciones fuertes elementales.

8.158. Demuéstrase que  $H$  es un factor elemental del matroide  $G$  sobre el conjunto  $S$  cuando y sólo cuando existe el único matroide  $M$  sobre el conjunto  $S \cup \{p\}$ , donde  $p$  no es ni bucle ni istmo, tal que  $G = M - p$ , y  $H = M/p$ .

8.159. Sea  $H$  un factor elemental del matroide  $G$  sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrase que  $M = \{A \subseteq S \mid A \text{ es una superficie del matroide } H \text{ y } r_G(A) - r_H(A) = 1\}$ , un filtro modular del matroide.

8.160. Demuéstrase el *teorema de desarrollo*: cada aplicación fuerte puede ser representada como un encaje con una contracción consecutiva.

Se denomina *aplicación débil*  $\tau$  del matroide  $M(S)$  en el matroide  $N(T)$  a la función  $\tau: S \cup 0 \rightarrow T \cup 0$  tal que  $\tau(0) = 0$ , y si un subconjunto  $A \subseteq S$  es de tal índole que la aplicación  $\tau/A$  es biunívoca en  $A$  y  $\tau(A)$  es un conjunto independiente en el matroide  $N_0$ , entonces  $A$  es también un conjunto independiente en el matroide  $M$ . Dicho de otro modo,  $\tau: S \cup U \rightarrow T \cup 0$  es la aplicación débil de  $M(S)$  en  $N(T)$ , si para cada  $A \subseteq S$  se verifica la siguiente desigualdad:  $r_{N_0}(\tau(A)) \leq r_M(A)$ .

8.161. Demuéstrase que cada aplicación fuerte  $\sigma: M(S) \rightarrow N(T)$  es débil.

8.162. Dése un ejemplo de aplicación débil que no sea fuerte.

8.163. Sean  $M$  y  $N$  los matroides sobre un mismo conjunto  $S$ . Demuéstrase la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) una función idéntica sobre  $S \cup 0$  induce una aplicación débil de  $M$  en  $N$ ;

b) cada conjunto independiente en  $N$  es también independiente en  $M$ ;

c) cada conjunto dependiente en  $M$  es también dependiente en  $N$ ;

d) cada ciclo del matroide  $M$  contiene un ciclo del matroide  $N$ ;

e) para cada subconjunto  $A$  de  $S$  se verifica la siguiente desigualdad:  $r_M(A) \geq r_N(A)$ .

8.164. Sea  $\mathfrak{M}$  una familia de todos los matroides sobre el conjunto  $S$ . Diremos que  $M \geq N$ , donde  $M$  y  $N \in \mathfrak{M}$ , si una función idéntica sobre  $S \cup 0$  induce una aplicación débil de  $M$  en  $N$ . Compruébese que  $m$  con la relación binaria definida en ella es un conjunto parcialmente ordenado. Indíquense los elementos maximal y minimal en este conjunto parcialmente ordenado.

Una aplicación débil de  $M$  en  $N$ , donde  $M$  y  $N \in \mathfrak{M}$ , se llama *simple*, si  $M \succ N$  en el conjunto parcialmente ordenado mencionado en el problema 8.164.

8.165. Supongamos que  $M$  y  $N$  son matroides sobre el conjunto  $S$ ;  $\mathcal{I}_1$  y  $\mathcal{I}_2$ , las familias de conjuntos independientes de  $M$  y de  $N$ , respectivamente, y que  $\mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2$ . Demuéstrese que una función idéntica sobre  $S \cup 0$  induce una aplicación fuerte de  $M$  en  $N$ , la cual en el caso general no ha de ser forzosamente fuerte.

Una aplicación débil  $\tau: M(S) \rightarrow N(S)$ , inducida por la función idéntica sobre el conjunto  $S \cup 0$ , se llamará *aplicación débil conservadora del rango*, siempre que  $r(M) = r(N)$ .

8.166. Demuéstrese que cada aplicación débil de  $M(S)$  en  $N(S)$  puede ser desarrollada unívocamente en un truncamiento seguido por una aplicación débil conservadora del rango.

8.167. Demuéstrese que si  $M$  y  $N$  son matroides sobre el conjunto  $S$ ,  $r(M) = r(N)$  y  $\tau$  es una función idéntica sobre el conjunto  $S \cup 0$ , entonces  $\tau: M \rightarrow N$  será una aplicación débil conservadora del rango cuando y sólo cuando lo es también la aplicación  $\tau: M^* \rightarrow N^*$ , donde  $M^*$  y  $N^*$  son matroides duales con relación a  $M$  y  $N$ , respectivamente.

8.168. Una aplicación débil  $\tau$  del matroide  $M(S)$  y  $N(T)$  induce una función  $\tau^*$  del retículo  $L(M)$  de superficies del matroide  $M$  en el retículo  $L(N)$  de superficies del matroide  $N$ , de la manera siguiente: si  $X$  es una superficie en  $M(S)$ , entonces  $\tau^*(X) = \tau(X)$ . Dése un ejemplo de que a diferencia de las aplicaciones fuertes, para las débiles puede no verificarse la relación  $(0 \cdot \tau)^* = 0^* \cdot \tau^*$ .

8.169. Sea  $M(S)$  un matroide sobre el conjunto  $S$ ,  $X \subseteq S$ . Compruébese que la función  $\tau: S \cup 0 \rightarrow X \cup 0$ , definida de la siguiente manera

$$\tau(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \in S \setminus X \text{ ó } a = 0; \\ a, & \text{si } a \in X, \end{cases}$$

induce la aplicación débil  $\tau$  del matroide  $M(S)$  en su submatroide  $M|X$ , que se denomina *retracto*.

8.170. Supongamos que  $\tau$  es un retracto del matroide  $M(S)$  en su submatroide  $M|X$ , donde  $X \subseteq S$  y  $X$  es un conjunto cerrado en  $M$ . Demuéstrese que para cualquier conjunto cerrado  $Y$  del matroide  $M$  tiene lugar una correlación:  $\tau^*(Y) = Y \cap X$ .

8.171. Sea  $M(S)$  un matroide sobre  $S$  y  $X \subseteq S$ . Muéstrese que la suma directa  $M/X \oplus M|X$  es una imagen del matroide  $M$  para cierta aplicación débil.

8.172. Muéstrese que las aplicaciones débiles conservadoras del rango conservan separadores.

8.173. Supongamos que una función idéntica sobre el conjunto  $S \cup 0$  induce la aplicación débil conservadora del rango de  $M(S)$  en  $N(S)$  y  $K$  es el menor del matroide  $M$  definido sobre el subconjunto  $E \subseteq S$ . Demuéstrese que existe un menor  $L$ , definido sobre  $E$ ,

tal que la función idéntica sobre  $E \cup 0$  induce una aplicación débil conservadora del rango de  $K$  en  $L$ .

8.174. Hállese un matroide que sea dual con relación al matroide de Fano (véase el problema 8.20).

### § 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides

Un matroide sobre el conjunto  $S$  se llama *representable sobre el campo  $F$* , si existen el espacio lineal  $V$  sobre el campo  $F$  y la aplicación  $\varphi: S \rightarrow V$ , para la cual  $A \subseteq S$  es independiente en  $M$  cuando y sólo cuando  $\varphi|_A$  es biunívoca y  $\varphi(A)$  es un conjunto linealmente independiente de vectores en  $V$ . La aplicación  $\varphi$  se llama en este caso *coordinatización* del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ .

Sea  $GF(q)$  un campo finito de la característica  $q$ . Un matroide representable sobre el campo  $GF(2)$  o  $GF(3)$  se llama *binario* o *ternario*, respectivamente. Los matroides que pueden ser representables sobre cada campo se denominan *unimodulares* (o *regulares*).

8.175. Sea  $V$  un espacio lineal sobre el campo  $F$ ,  $U \subseteq V$ . El número máximo de vectores linealmente independientes de  $U$  se llama *rango lineal* del conjunto  $U$  y se designa con el símbolo  $\dim U$ . Demuéstrese que el matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  con función de rango  $r$  es *representable sobre el campo  $F$*  cuando y sólo cuando existen el espacio lineal  $V$  sobre el campo  $F$  y la aplicación conservadora de rango  $\varphi: S \rightarrow V$ , es decir, tal aplicación  $\varphi$  que  $\dim \varphi(A) = r(A)$  para cualquier  $A \subseteq S$ .

Supongamos que  $M$  es un matroide sobre el conjunto  $S$  y  $L(M)$ , su retículo de superficies. Se llama *geometría  $G$  asociada al matroide  $M$*  tal geometría combinatoria sobre el conjunto  $S_n$  de átomos del retículo  $L(M)$  que el retículo de sus superficies  $L(G)$  es isomorfo a  $L(M)$  (véanse los problemas 8.45 y 8.46).

8.176. Demuéstrese que un matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  puede ser representado sobre el campo  $F$  cuando y sólo cuando la geometría  $G$  asociada al matroide  $M$  es representable sobre el campo  $F$ .

La coordinatización  $\varphi$  de un matroide  $M$  sobre el campo  $F$  no es, hablando en general, una aplicación biunívoca. Por ejemplo, para  $a, b \in S$  tenemos  $\varphi(a) = 0$  cada vez que  $a$  es un bucle del matroide  $M$ , y  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , siempre que  $\{a, b\}$  es un ciclo del matroide  $M$  y  $a, b$  no son bucles. Al mismo tiempo, la coordinatización  $\varphi$  de las geometrías combinatorias es una aplicación biunívoca. En virtud del problema 8.176, podemos, al estudiar la representabilidad de los matroides, limitarnos a las geometrías, lo que se realizará en adelante. En el lenguaje geométrico la afirmación del problema 8.176 significa que la coordinatización de la geometría  $G$  es un encaje de  $G$  en la geometría proyectiva de dimensión  $n - 1$  sobre el campo  $F$  para  $n \geq 4$  (véase el problema 7.169). De aquí se desprende, en

particular, que la configuración del tipo de Desargues y de Pappo (véase el capítulo V, § 3) son representables.

8.177. Sea  $\Phi$  un matroide de Fano (véase el problema 8.20) sobre el conjunto  $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  (véase la fig. 8.4). Demuéstrase que  $\Phi$  es representable sobre el campo  $GF(2)$  y no es representable sobre ningún otro campo cuya característica es distinta de 2.

8.178. Sea  $\Phi_1$  un matroide obtenido del matroide de Fano (problema 8.177) por sustitución de la recta  $\{e, f, g\}$  por 3 rectas triviales  $\{e, f\}, \{e, g\}$  y  $\{f, g\}$  (véase la fig. 8.4). Demuéstrase que el

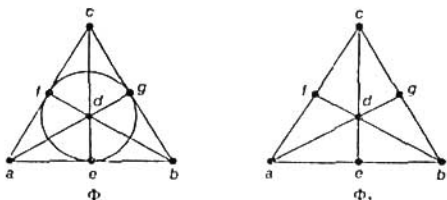


Fig. 8.4.

matroide  $\Phi_1$  es representable sobre todos los campos cuya característica es distinta de 2 y no es representable sobre el campo  $GF(2)$ .

Los matroides representables sobre los conjuntos finitos pueden cómodamente describirse con ayuda de las matrices. Supongamos que  $M$  es un matroide en el conjunto finito  $S$  representable sobre el campo  $F$ ,  $|S| = n$ , y  $\varphi: S \rightarrow V$  es su coordinatización sobre  $F$ . Entonces, una  $(k \times n)$ -matriz  $A$  con coeficientes del campo  $F$ , de cuyas columnas sirven los vectores  $\varphi(p)$ , donde  $p \in S$ , lleva el nombre de *matriz de coordinatización del matroide  $M$  sobre el campo  $F$* . Entonces, el matroide  $M(S)$  será isomorfo al submatroide  $M(A)$  del matroide vectorial del espacio lineal  $V$  (véase el problema 8.7), engendrado por las columnas de la matriz  $A$  y llamado *matroide matricial*. De este modo, los matroides representables sobre los conjuntos finitos y los matroides matriciales sobre el campo  $F$  abarcan una misma clase de matroides.

8.179. Supongamos que  $A$  es una  $(k \times n)$ -matriz arbitraria con los coeficientes del campo  $F$ ,  $B$ , una matriz cuadrada regular de orden  $k$  y  $A'$ , una matriz que se obtiene de  $A$  con ayuda de las siguientes operaciones:

1. supresión de la fila compuesta de ceros;
2. permutación de las filas o de las columnas;
3. multiplicación de una fila o columnas por  $\lambda$ , donde  $\lambda \in F$ , y  $\lambda \neq 0 \in F$ . Demuéstrase que los vectores columna de las matrices  $A$ ,  $A'$  y  $BA$  definen los matroides matriciales isomorfos.

8.180. Sea  $M$  un matroide en el conjunto  $S$  representable sobre el campo  $F$  y sea  $B = \{e_1, \dots, e_k\}$  su base arbitraria. Demuéstrase



que existe una aplicación conservadora de rango 0:  $S \rightarrow F^k$  tal que  $\theta(e_i) = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \\ i \end{pmatrix}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ .

8.181. Sea  $M$  un matroide en el conjunto  $S$  representable sobre el campo  $F$ ,  $|S| = n$  y sea  $B = \{e_1, \dots, e_k\}$  su base arbitraria. Demuéstrase que existe tal  $(k \times n)$ -matriz  $A$  con coeficientes del campo  $F$ , cuyas  $k$  primeras columnas forman una matriz unitaria, que toda aplicación que al elemento  $e_i \in B$  le pone en correspondencia la  $i$ -ésima columna de la matriz  $A$ , conserva el rango, es decir, es una coordinatización del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ .

Una matriz  $A$  del problema 8.181 se llama *matriz estándar de representación* del matroide  $M$  sobre el campo  $F$  respecto de la base  $B$ .

8.182. Demuéstrase que un matroide homogéneo  $U_{2,4}$  puede ser representado sobre cualquier campo, salvo  $GF(2)$ .

8.183. Hállese el matroide minimal homogéneo que no sea representable sobre el campo  $GF(3)$ .

8.184. Demuéstrase que si  $M$  es un matroide sobre el conjunto  $S$  y  $r(M) \leq 2$ , entonces  $M$  es representable sobre cierto campo.

8.185. Demuéstrase que un matroide gráfico arbitrario es representable en cualquier campo, es decir, es unimodular (o regular).

8.186. Demuéstrase que si el matroide  $M$  es representable sobre el campo  $F$ , el matroide  $F^*$ , dual con relación a  $M$ , es también representable sobre  $F$ .

8.187. Sea  $M$  un matroide de rango  $k$  sobre el conjunto finito  $S$ ,  $|S| = n$ . Demuéstrase que si  $(E_k, A)$  es una matriz estándar de representación del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ , entonces  $(-AT, E_{n-k})$ , es una matriz estándar de representación del matroide  $M^*$  sobre el campo  $F$ , donde  $E_k$  es una  $(k \times k)$ -matriz unitaria.

8.188. Sea  $M$  un matroide cíclico del grafo  $G$  representado en la fig. 8.5, y sea

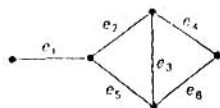


Fig. 8.5.

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Será  $A$  una matriz estándar de representación del matroide  $M$  sobre el campo  $GF(2)$  respecto de cierta base  $B$  de  $M$ ? Si es, hállese la matriz estándar de representación del matroide  $M^*$  sobre el campo  $GF(2)$  respecto de la base  $B^* = S \setminus B$ .

8.189. Sea  $M$  un matroide sobre un conjunto finito  $S$ . Demuéstrase las siguientes afirmaciones:

a) si  $M$  es representable sobre el campo  $F$ , será representable sobre  $F$  cualquier menor del matroide  $M$ ;

b) si  $M = M_1 \oplus M_2$ , entonces  $M$  es representable sobre el campo  $F$  cuando y sólo cuando  $M_1$  y  $M_2$  son representables sobre el campo  $F$ .

8.190. Dése un ejemplo de un matroide que no es representable sobre ningún campo.

8.191. Muéstrase que si  $M$  es un matroide representable sobre el campo  $F$ , el  $k$ -truncamiento del matroide  $M$  no es forzosamente representable sobre  $F$ .

8.192. Demuéstrase que cualquier menor propio del matroide de Fano  $\Phi$  es representable sobre cualquier campo.

8.193. Sea  $M(S)$  una geometría de rango 3 en 10 elementos cuya diagrama afín constituye la configuración de Desargues (véase la

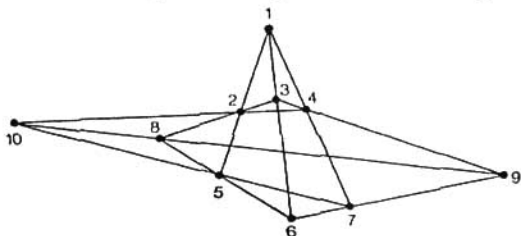


Fig. 8.6.

fig. 8.6). Hállase la matriz de representación del matroide  $M$  sobre el campo  $G(F_2)$ . Demuéstrase que el matroide  $M(S)$  es isomorfo al matroide cíclico del grafo completo  $K_5$  sobre 5 vértices.

8.194. Demuéstrase que los matroides de rango 3 que siguen más abajo no son representables sobre ningún campo  $F$ :

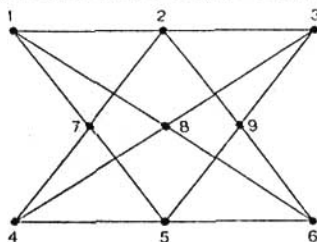


Fig. 8.7.

a) *matroide «no de Pappo»*: una geometría en 9 elementos cuyo diagrama afín está representado en la fig. 8.7 (si a la configuración en la fig. 8.7 le añadimos una recta  $\{7, 8, 9\}$ , obtendremos la configuración de Pappo [1]);

b) *matroide «no desargueano»*: una geometría en 10 elementos cuyo diagrama afín está representado en la fig. 8.8 y se obtiene a partir de la configuración de Desargues sustituyendo la recta 3-puntual  $\{10, 8, 9\}$  por tres rectas 2-puntuales  $\{10, 8\}$ ;  $\{10, 9\}$  y  $\{8, 9\}$ .

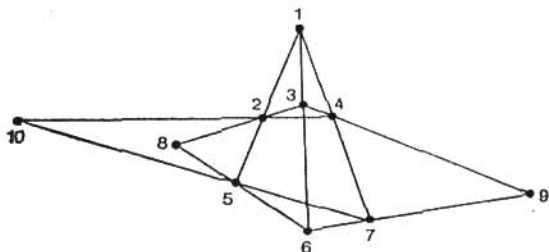


Fig. 8.8

8.195. Demuéstrase que el matroide de Vamos (véase el problema 8.21) no es representable sobre ningún campo  $F$ .

8.196. Sea  $n = pk + 1$ , donde  $p$  es un número primo y  $k$ , un número natural arbitrario. Véamos un matroide  $M_p$ , cuya matriz de representación sobre el campo  $GF(p)$  tiene la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{2em}}_{pk} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{pk}$

Demuéstrase que el matroide  $M_p$  es representable sólo sobre los campos de característica  $p$ .

El matroide  $M_p$  del problema 8.196 lleva el nombre *matroide de Lazarson*.

8.197. Constrúyase un matroide representable sobre el campo  $F$  cuando y sólo cuando la característica de este campo es igual a 1103 ó 2089.

8.198. Sea  $(E_k, A)$  una matriz estándar de representación del matroide  $M$  de rango  $k$  respecto de la base  $B$  sobre el campo  $F$ .

Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) la  $i$ -ésima columna de la matriz  $(E_k, A)$  corresponde al bucle del matroide  $M$  cuando y sólo cuando consta sólo de ceros;

b) la  $i$ -ésima columna de la matriz  $(E_k, A)$  corresponde al istmo del matroide  $M$  cuando y sólo cuando  $i = \{1, 2, \dots, k\}$  y la  $i$ -ésima fila de la matriz  $(E_k, A)$  tiene valores no nulos sólo en la  $i$ -ésima columna;

c) una matriz que se obtiene por supresión en  $(E_k, A)$  de la columna que corresponde al elemento  $p$ , es una matriz de representación del matroide  $M-p$  sobre el campo  $F$ ;

d) si  $p$  no es un bucle del matroide  $M$ , entonces la matriz de representación del matroide  $M/p$  sobre el campo  $F$  se obtiene a partir de  $(E_h, A)$  del modo siguiente: la matriz  $(E_h, A)$  se reduce, con ayuda de transformaciones especiales (véase el problema 8.179), a una matriz que en la columna correspondiente al elemento  $p$  tiene sólo una coordenada distinta de cero, y luego en la matriz obtenida tachamos la columna y la fila que corresponden a este elemento no nulo;

e) las columnas de la matriz  $(E_h, A)$  que tienen 0 en la  $i$ -ésima columna forman un hiperplano  $H$  del matroide  $M$ ;

f) cualquier cociclo del matroide  $M$  puede ser representado como un conjunto de todos los vectores columna con 1 en la primera fila de la matriz de representación del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ , siendo adecuada su selección.

8.199. ¿Serán binarios todos los matroides representados en la fig. 8.9? ¿Existe un matroide binario  $M$  de rango 2 ó 3 que no sea isomorfo a ninguno de los matroides representados en fig. 8.9?

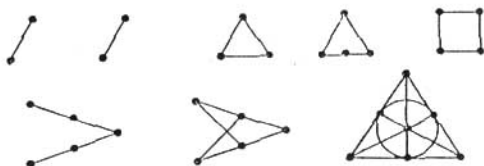


Fig. 8.9.

8.200. Hállense los valores de  $k$  y  $n$ , para los cuales un matroide homogéneo  $U_{k,n}$  es binario.

8.201. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ . Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- $M$  es un matroide binario;
- para cualquier ciclo  $C$  y todo cociclo  $C^*$  del matroide  $M$ , sus intersecciones tienen un número par de elementos, es decir,  $|C \cap C^*|$  es par;
- si  $C_1$  y  $C_2$  son ciclos diferentes del matroide  $M$ , la diferencia simétrica  $C_1 \Delta C_2$  contiene cierto ciclo  $C$ ;
- para todas las bases  $B$  y un ciclo arbitrario  $C$  del matroide  $M$ , si  $C \setminus B = \{e_1, \dots, e_q\}$  y  $C(e_i)$  es un ciclo fundamental formado por el elemento  $e_i$ , respecto de la base  $B$  (véase el problema 8.27), entonces

$$C = C(e_1) \Delta \dots \Delta C(e_q);$$

e) la diferencia simétrica de cualquier familia de diferentes ciclos del matroide  $M$  es una unión de ciclos disjuntos de  $M$ ;

f) para cualesquiera  $k$  ciclos  $C_1, \dots, C_k$  del matroide  $M$  el conjunto  $C_1 \Delta C_2 \Delta \dots \Delta C_k$  es o bien vacío o bien contiene cierto ciclo  $C$  del matroide  $M$ ;

g) para cualesquiera dos bases  $B_1$  y  $B_2$  del matroide  $M$  y para  $y \in B_2$  arbitrario existe un número impar de elementos  $x \in B_1$  tales que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  y  $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$  son las bases del matroide  $M$ ;

h) para cualesquiera dos ciclos diferentes  $C_1$  y  $C_2$  del matroide  $M$  y para  $a, b \in C_1 \cap C_2$  existe un ciclo  $C_3$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a, b\}$ ;

i) si  $C_1$  y  $C_2$  son ciclos diferentes arbitrarios del matroide  $M$  ( $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ) que forman un par modular de conjuntos en  $M$ , entonces la diferencia simétrica  $C_1 \Delta C_2$  será un ciclo de  $M$ ;

j) para cualquier ciclo  $C$  y todo cociclo  $C^*$  del matroide  $M$  la potencia de sus intersecciones  $C \cap C^*$  no es igual a 3.

8.202. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ ,  $\mathcal{C}$  una familia de sus ciclos y  $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$ . Diremos que el ciclo  $C_1$  diferencia los ciclos  $C_2$  y  $C_3$ , si  $C_2 \setminus C_1 \neq C_3 \setminus C_1$ . Demuéstrese que el matroide  $M$  es binario cuando y sólo cuando entre cualesquiera tres ciclos  $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$  tales que  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$ , existe por lo menos uno que diferencia los otros dos.

8.203. Demuéstrese el teorema de Tutte: un matroide  $M$  es binario cuando y sólo cuando ninguno de sus menores es isomorfo al matroide homogéneo  $U_{2,4}$ .

8.204. Demuéstrese que si una aplicación idéntica en el conjunto  $S \cup 0$  induce una aplicación débil conservadora del rango del matroide binario  $M$  en el matroide  $N$ , entonces  $N$  es también un matroide binario.

8.205. Supongamos que  $M$  es un matroide binario arbitrario y que una función idéntica induce una aplicación débil conservadora de rango de  $M$  en el matroide  $N$ . Demuéstrese que si  $K$  es un menor conexo del matroide  $N$ , entonces  $K$  es también un menor conexo del matroide  $M$ .

8.206. Muéstrese que si  $H$  es una familia de matroides binarios cerrados respecto de la elección de menores y sumas directas, entonces  $H$  es también cerrada respecto de las imágenes de las aplicaciones débiles conservadoras de rango.

8.207. Supongamos que  $M$  es un matroide binario sobre el conjunto  $S$  y la función idéntica en el conjunto  $S \cup 0$  induce la simple aplicación débil conservadora de rango de  $M$  en el matroide  $N$ . Demuéstrese que existe un subconjunto  $X$  del conjunto  $S$  tal que

$$N = M/X \oplus M|X.$$

8.208. Sea  $M$  un matroide binario conexo sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrese que existe una correspondencia biunívoca entre las simples aplicaciones débiles conservadoras del rango de  $M$  en  $N$  y los subconjuntos  $X \subseteq S$  tales que los matroides  $M/X$  y  $M|X$  son conexos.

8.209. Sea  $n(M)$  un número de componentes conexos del matroide  $M$ . Demuéstrase que si  $M$  es un matroide binario, entonces la aplicación débil conservadora del rango de  $M$  en  $N$  es simple, cuando y sólo cuando  $n(N) = n(M) + 1$ .

8.210. Sea  $M$  un matroide binario. Demuéstrase que una aplicación débil conservadora del rango de  $M$  en  $N$  puede desarrollarse en  $n(N) - n(M)$  aplicaciones débiles simples no triviales y cada aplicación de este género contiene exactamente  $n(N) - n(M)$  aplicaciones débiles simples.

8.211. Demuéstrase que un matroide homogéneo  $U_{2,5}$  y un matroide dual con relación al primero no son ternarios.

8.212. ¿Será ternario el matroide  $U_{2,4}$ ? Si es ternario, indíquese la matriz de su representación sobre el campo  $GF(3)$ .

8.213. Demuéstrase que un matroide  $M$  es ternario cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo  $U_{2,5}$  y al de Fano  $\Phi$ , como también a los duales con relación a estos últimos.

Supongamos que  $M$  es un matroide binario sobre el conjunto finito  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_h\}$ , una familia de todos los ciclos y  $\mathcal{C}^* = \{K_1, \dots, K_m\}$ , una familia correspondiente de todos los cociclos del matroide  $M$ . Se llama matriz de los ciclos  $C(M) = (a_{ij})$  del matroide  $M$  una  $(k \times n)$ -matriz tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } e_j \in C_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

y se llama matriz de los cociclos  $C^*(M) = (b_{ij})$  una  $(m \times n)$ -matriz tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } e_j \in K_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Es evidente que para una numeración adecuada  $C^*(M) = C(M^*)$ , donde  $M^*$  es el matroide dual con relación al matroide  $M$ .

El matroide  $M$  se llama *orientable*, si para las unidades en las matrices  $C(M)$  y  $C^*(M)$  existe tal variante de asignar los signos  $\pm$ , que

$$\tilde{C}(M) [\tilde{C}^*(M)]^T = 0,$$

donde  $\tilde{C}(M)$  y  $\tilde{C}^*(M)$  son matrices de los ciclos y cociclos, respectivamente, tras la asignación de los signos.

8.214. Compruébese la validez de las siguientes afirmaciones:

- todo matroide gráfico es orientable;
- un matroide  $M$  es orientable cuando y sólo cuando  $M^*$  es orientable;

- c) todo menor de un matroide orientable es orientable;  
 d) una suma directa de matroides orientables es orientable.

8.215. Dénse ejemplos de un matroide binario no orientable y de un matroide orientable que no sea: a) gráfico; b) cográfico; c) ni cográfico ni gráfico.

Sea  $\varphi$  una coordinatización del matroide  $M$  de rango  $n$  en el conjunto finito  $S$  sobre el campo  $F$ . Si los vectores en un espacio lineal  $V$  de dimensión  $n$  sobre el campo  $F$ , están representados en forma de vectores columna de la matriz estándar  $A$  de representación del matroide  $M$  sobre el campo  $F$  respecto de la base  $B$ , entonces para cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$  denotemos por  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  el determinante de una submatriz  $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))$  de la matriz  $A$ . Los determinantes de este tipo se llaman *paréntesis de la coordinatización*  $\varphi$  y se designan por  $[X]$ , donde  $X$  es la sucesión  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

8.216. Sea  $M$  un matroide de rango  $n$  sobre el conjunto finito  $S$ . Para cada sucesión  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_i \in S, i = 1, \dots, n$ , pongamos en correspondencia un elemento  $[X] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  (*sicigia*) del campo  $F$ . Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que exista la coordinatización  $\varphi$  del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ , tal que sus paréntesis sean exactamente iguales a las sicigias  $[X]$ , consiste en que se cumplan para las sicigias las siguientes relaciones:

a)  $[x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$  cuando y sólo cuando el conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es o bien independiente en  $M$ , o bien contiene menos de  $n$  diferentes elementos;

b)  $[x_1, x_2, \dots, x_n] = \text{sgn } \sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$  para todas las permutaciones  $\sigma$  de los elementos  $\{1, 2, \dots, n\}$  y para cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ , donde  $\text{sgn } \sigma$  es el signo de la permutación  $\sigma$ ;

c)  $[x_1, x_2, \dots, x_n] [y_1, y_2, \dots, y_n] - \sum_{i=1}^n [y_i, x_2, \dots, x_n] \times [y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n] = 0$  para cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n \in S$ .

8.217. Sean  $R_1 = (E_n, A_1)$  y  $R_2 = (E_n, A_2)$  dos matrices estándar de representación del matroide  $M$  sobre los campos  $F_1$  y  $F_2$ , respectivamente. La aplicación  $\varphi$  que transforma cada columna de la matriz  $R_1$  en la correspondiente columna de la matriz  $R_2$  es un isomorfismo de los matroides matriciales  $M(R_1)$  y  $M(R_2)$  cuando y sólo cuando el determinante sobre el campo  $F_1$  de una submatriz cuadrada arbitraria  $N_1$  de la matriz  $A_1$  es nulo, si y sólo si el determinante sobre el campo  $F_2$  de la submatriz correspondiente  $N_2$  de la matriz  $A_2$  es igual a cero. En particular, si los matroides  $M(R_2)$  y  $M(R_1)$  son isomorfos, en las matrices  $A_1$  y  $A_2$  las posiciones de los elementos nulos coinciden.

8.218. Sea  $A$  una matriz estándar de representación del matroide  $M_1$  sobre el campo  $GF(2)$ , y sea  $B$  una matriz estándar de representación del matroide  $M_2$  sobre el campo de números racionales.

¿Será cierto que los matroides  $M_1$  y  $M_2$  son isomorfos, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El matroide  $M_1$  se designará en adelante por  $R_{10}$ . Demuéstrese que  $R_{10}^* = R_{10}$ . Compruébese que todos los menores del matroide  $R_{10}$  son o bien gráficos o bien matroides cográficos.

Sea  $A$  una  $(k \times n)$ -matriz con coeficientes enteros y  $k < n$ . La matriz  $A$  se llama *totalmente unimodular*, si el determinante de cada su  $(m \times m)$ -submatriz es igual a cero o a  $\pm 1$  para cualquier  $m$ , donde  $m = 1, 2, \dots, k$ . Diremos que  $A$  es una *matriz localmente unimodular*, si el determinante de cada su  $(k \times k)$ -submatriz es igual a 0 ó a  $\pm 1$ .

8.219. Demuéstrese la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a)  $A$  es una matriz totalmente unimodular;

b) para cada vector  $x$  con los componentes 0,  $\pm 1$  existe un vector  $y$  con componentes 0,  $\pm 1$  tal que

$$y = x \pmod{2},$$

$$a_i \cdot y = \begin{cases} 0, & \text{si } a_i \cdot x = 0 \pmod{2}; \\ \pm 1, & \text{si } a_i \cdot x = 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

para todas las filas de la matriz  $A$ ;

c) cualquier menor de la matriz  $A$  es igual o bien a cero, o bien a un número impar.

8.220. Sea  $A$  una matriz arbitraria con coeficientes iguales a 0 y a  $\pm 1$ . Demuéstrese que  $A$  es una matriz totalmente unimodular cuando y sólo cuando para cualquier submatriz cuadrada  $A'$  de la matriz  $A$  indicada con las filas  $\mathcal{J}$  y columnas  $J$  y tal que para todo  $i \in \mathcal{J}$  y  $j \in J$  tenemos

$$\sum_{j' \in J} a_{ij'} = \sum_{i' \in \mathcal{J}} a_{i'j} = 0 \pmod{2}$$



tiene lugar la igualdad

$$\sum_{i \in J, j \in J} a_{ij} = 0 \pmod{4}.$$

8.221. Demuéstrase que una matriz de incidencias de cualquier grafo orientado es totalmente unimodular.

8.222. Demuéstrase que una matriz de incidencias del grafo no orientado  $G$  es totalmente unimodular cuando y sólo cuando  $G$  es un grafo bipartido.

8.223. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ . Demuéstrase la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) el matroide  $M$  posee una matriz totalmente unimodular de representación sobre el campo de números racionales;

b) el matroide  $M$  tiene una matriz localmente unimodular de representación sobre el campo de números racionales;

c) a los paréntesis para el matroide  $M$  se les pueden asignar los valores  $0$  ó  $\pm 1$  del campo de números racionales de un modo tal que se cumplan las relaciones (a) — (c) para las sigijas (problema 8.216);

d) el matroide  $M$  es representable sobre cada campo  $F$ ;

e) el matroide  $M$  es binario y ternario;

f) el matroide binario  $M$  puede ser representado sobre cierto campo  $F$ , cuya característica no es igual a 2.

8.224. Sea  $M$  un matroide unimodular de rango  $n$  sobre el conjunto finito  $S$ , y sea  $A$  una matriz localmente unimodular de representación del matroide  $M$ . Demuéstrase que el número de bases diferentes del matroide  $M$  es igual al determinante de la matriz  $A \cdot A^T$  sobre el campo de números racionales. Hállese el número de bases del matroide representado en la fig. 8.10.

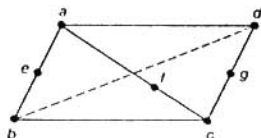


Fig. 8.10.

8.225. Demuéstrase que un matroide  $M$  es unimodular cuando y sólo cuando  $M$  es un matroide binario que no contiene menores isomorfos al matroide de Fano  $\Phi$  y al matroide dual  $\Phi^*$ .

8.226. Demuéstrase que un matroide  $M$  sobre el conjunto finito  $S$  es unimodular cuando y sólo cuando es orientable.

8.227. Compruébese que la exclusión de un elemento del matroide  $R_{10}$  lleva a la formación de un matroide cíclico del grafo bipartido completo  $K_{3,3}$ . Demuéstrase que el matroide  $R_{10}$  es unimodular.

8.228. Supongamos que  $M$  es un matroide unimodular sobre el conjunto  $S$ ,  $a \in S$ , y el matroide  $M - a$ , un isomorfo al matroide  $R_{10}$ . Demuéstrase que  $a$  es un bucle, un istmo, o un elemento paralelo.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  los matroides binarios sobre los conjuntos no vacíos  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente, con la particularidad de que los

conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  pueden intersectarse. Definamos un nuevo matroide binario  $M_1 \Delta M_2$  sobre el conjunto  $S_1 \Delta S_2 = (S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ , de cuyos ciclos servirán todos los subconjuntos  $S_1 \Delta S_2$  del tipo  $C_1 \Delta C_2$ , donde  $C_i$  es un ciclo del matroide  $M_i$ , y  $i = 1, 2$ . El matroide  $M_1 \Delta M_2$  se llamará:

- 1) 1-suma de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ , si  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ;
- 2) 2-suma de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ , si  $|S_1| \geq 3$ ,  $|S_2| \geq 3$  y  $S_1 \cap S_2 = x$ , donde  $x$  no es un bucle ni tampoco un istmo de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ ;
- 3) 3-suma de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ , si  $|S_1| \geq 7$ ,  $|S_2| \geq 7$ ,  $S_1 \cap S_2 = X$ , donde  $|X| = 3$  y  $X$  es un ciclo para cada uno de los matroides

$M_1$  y  $M_2$ , en el cual no se contiene ningún cociclo ni de  $M_1$  ni de  $M_2$ .

Observemos que la 1-suma de matroides  $M_1$  y  $M_2$  es simplemente la suma directa de estos matroides. La 2-suma representa un pegado de los matroides  $M_1$  y  $M_2$  a lo largo de su elemento común  $x$  (con la exclusión ulterior de éste), para el cual el rango del matroide  $M_1 \Delta M_2$  es máximo e igual a  $r(M_1) + r(M_2) - 1$ . Análogamente, la 3-suma es la pegadura de los matroides  $M_1$  y  $M_2$  en una recta común, para la cual el rango del matroide  $M_1 \Delta M_2$  es máximo e igual a  $r(M_1) + r(M_2) - 2$ . Las operaciones en consideración están ilustradas para los matroides gráficos en la fig. 8.11.

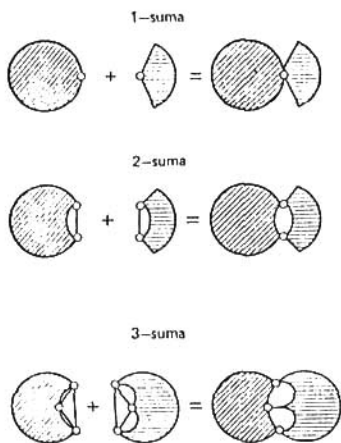


Fig. 8.11.

8.229. Demuéstrese que un matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  con función de rango  $r$  es representable como una 2-suma de dos matroides cuando y sólo cuando existe una partición  $(X_1, X_2)$  del conjunto  $S$  tal que  $|X_1| \geq 2$ ,  $|X_2| \geq 2$ , y  $r(X_1) + r(X_2) \leq r(S) + 1$ .

8.230. Demuéstrese que las 1, 2 y 3-sumas de matroides unimodulares son unimodulares.

8.231. Demuéstrese que todo matroide unimodular puede ser obtenido por medio de las 1, 2 y 3-sumas de ciertos matroides gráficos y cográficos y, además, del matroide  $R_{10}$ .

8.232. Demuéstranse los siguientes resultados de Tutte:

a) un matroide  $M$  es gráfico cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo  $U_{2,4}$ , a los matroides

de los cortes de los grafos completos  $K_6$  y  $K_{3,3}$  y al matroide de Fano  $\Phi$  o al de  $\Phi^*$ , dual respecto de  $\Phi$ ;

b) un matroide  $M$  es cográfico cuando y sólo cuando no contiene menores isomorfos al matroide homogéneo  $U_{2,4}$ , a los matroides cíclicos de los grafos completos  $K_5$  y  $K_{3,3}$ , y al matroide de Fano  $\Phi$  o al de  $\Phi^*$ , dual respecto de  $\Phi$ .

8.233. Supongamos que el conjunto  $P = \{0, 2, 3, 5, 7, \dots\}$  se compone de 0 y de todos los números primos. Un subconjunto  $K$  del conjunto  $P$  se llama *conjunto característico* del matroide  $M$ , si  $M$  es representable sobre el campo  $F$  cuando y sólo cuando la característica del campo es un elemento de  $K$ . Dense ejemplos de matroides con las siguientes características del conjunto: a)  $K = P$ ; b)  $K = \emptyset$ ; c)  $|K| = 1$ ; d)  $K = P \setminus \{2\}$ .

8.234. Supongamos que a todo punto en el interior del rectángulo  $F$  corresponde cierto matroide. ¿Será correcta la manera de expresar las relaciones entre las diferentes clases de matroides del diagrama

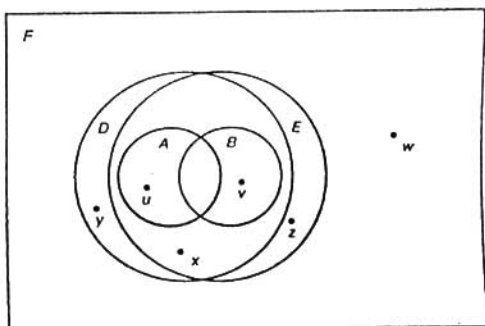


Fig. 8.12.

en fig. 8.12, si a los puntos interiores de los círculos  $A$  y  $B$  de menor radio se les ponen en correspondencia los elementos de la familia de todos los matroides gráficos y de la familia de todos los matroides cográficos, respectivamente, y a los puntos interiores de los círculos  $D$  y  $E$  de mayor radio, los elementos del conjunto de todos los matroides binarios y del conjunto de todos los matroides ternarios, respectivamente? Sean  $C = D \cap E$  y  $G = A \cap B$ . ¿Es cierto que  $C$  es una familia de todos los matroides unimodulares y  $G$ , una familia de los matroides cíclicos de todos los grafos planarios? Indíquese por lo menos un matroide para cada punto  $x, y, z, u, v$  y  $w$  del diagrama.

8.235. Demuéstrase que la suma directa de matroides  $M_1$  y  $M_2$  es gráfica (cográfica, respectivamente) cuando y sólo cuando  $M_1$  y  $M_2$  son matroides gráficos (cográficos, respectivamente).

8.236. Supongamos que  $M$  es un matroide transversal de rango  $k$  sobre el conjunto  $S$  con la representación  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ,

mientras que  $\{i_1, i_2, \dots, i_h\}$  es un subconjunto arbitrario del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  de potencia  $k$  tal que una subfamilia  $\mathcal{F}' = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_h}\}$  de la familia  $\mathcal{F}$  posee una transversal. Demuéstrase que  $\mathcal{F}'$  es también la representación del matroide  $M$ .

8.237. Sea  $M$  un matroide transversal sobre el conjunto  $S$  con la representación  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . Demuéstrase que  $S \setminus A_i$  es una superficie del matroide  $M$  para todo  $i, i = 1, 2, \dots, n$ .

8.238. Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_h\}$  una representación del matroide transversal  $M$  de rango  $k$  sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrase que existen diferentes cociclos  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_h$  tales que  $\mathcal{D}_i \subseteq A_i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, h$ , y  $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_h\}$  es también una representación del matroide  $M$ .

Diremos que la representación  $\{A_1, A_2, \dots, A_h\}$  de un matroide transversal  $M$  de rango  $k$  sobre el conjunto  $S$  es máxima, si para cualquier representación  $\{A'_1, A'_2, \dots, A'_h\}$  del matroide  $M$ , tal que  $A_i \subseteq A'_i$  para cada  $i$ , se verifican las igualdades  $A_i = A'_i$  para todos los  $i, i = 1, 2, \dots, h$ .

8.239. Supongamos que  $M$  es un matroide transversal de rango  $k$  con la representación máxima  $\{M_1, M_2, \dots, M_h\}$ , y  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_h\}$ , una familia de conjuntos tal que  $A_i \subseteq M_i$  para cada  $i, i = 1, 2, \dots, h$ . Demuéstrase que  $\mathcal{F}$  es la representación del matroide  $M$  cuando y sólo cuando

$$r(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} (S \setminus A_i)) \leq k - |\mathcal{J}| \text{ para todos los } \mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \dots, h\}.$$

8.240. Sea  $M$  un matroide de rango  $k$  sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrase que  $M$  es un matroide transversal cuando y sólo cuando existe tal familia de hiperplanos  $\{H_1, \dots, H_h\}$  que

$$a) \quad r(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} H_i) \leq k - |\mathcal{J}| \text{ para cada } \mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \dots, h\};$$

b) para cada ciclo  $C$  existe tal subconjunto  $\mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \dots, h\}$  que satisface la condición  $|\mathcal{J}| = |C| - 1$ , que

$$C \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{J}} H_i.$$

8.241. Sea  $M$  un matroide transversal de rango  $k$  con la representación máxima  $\{M_1, \dots, M_h\}$ . Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) si  $\{A_1, \dots, A_h\}$  es tal representación del matroide  $M$  que  $A_i \subseteq M_i$  y  $r(S \setminus A_i) = m_i$  para  $i = 1, 2, \dots, h$ , entonces para cualquier  $i, i = 1, 2, \dots, h$ ,  $|A_i|$  es la potencia máxima entre todos los subconjuntos del conjunto  $M_i$  cuyo rango de los complementos es igual a  $m_i$ ;

b) si  $C$  es un cociclo de potencia máxima perteneciente al conjunto  $M_1$ , entonces  $\{C, M_2, \dots, M_h\}$  no es obligatoriamente una representación del matroide  $M$ ;

c) si  $C_i$  es un cociclo de potencia máxima de  $M_i$ , entonces  $\{C_i, M_2, \dots, M_h\}$  será la representación del matroide  $M$  cuando y

sólo cuando la familia  $\{M_2 \setminus C_1, \dots, M_k \setminus C_1\}$  cuenta con una transversal.

8.242. Demuéstrese que el matroide  $M$  es transversal cuando y sólo cuando puede ser representado como una unión de matroides de rango 1.

Supongamos que  $G$  es un grafo orientado con un conjunto de vértices  $V$  y un conjunto de arcos  $E$ , y que  $A, B$  son subconjuntos arbitrarios de los vértices del grafo  $G$ . Diremos que  $A$  está *acoplado con*  $B$  en el grafo  $G$ , si para cierta biyección  $\varphi: A \rightarrow B$  existe una familia de  $\{P_x \mid x \in A\}$  caminos, que no se intersecan por los vértices, tales que el camino  $P_x$  tiene por origen el vértice  $x$  y termina en el vértice  $\varphi(x)$  para todo  $x \in A$ .

8.243. Supongamos que  $G$  es un grafo orientado con un conjunto de vértices  $V$ ,  $B \subseteq V$ , y  $\mathcal{J}(G; B)$  es una familia de todos los subconjuntos  $A$  del conjunto  $V$  que están acoplados con  $B$  en el grafo  $G$ . Demuéstrese que  $\mathcal{J}(G; B)$  es una familia de conjuntos independientes de cierto matroide  $M(G; B)$  sobre el conjunto  $V$ . Compruébese que el matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  es dual con relación a cierto matroide transversal cuando y sólo cuando existe un grafo orientado  $G$  con un conjunto de vértices  $S$  y un subconjunto  $B \subseteq S$  tal que  $M = M(G; B)$ .

El matroide  $M(G, B)$  del problema 8.243, donde  $G$  es un grafo orientado sobre el conjunto de vértices  $V$  y  $B \subseteq V$ , se denomina *hammoide rígido*, y el matroide  $M(G; B) \mid X$ , donde  $X \subseteq V$ , simplemente *hammoide*. Sea  $G$  un grafo bipartido con los conjuntos de vértices  $V_1$  y  $V_2$  en cada capa. Orientemos todas las aristas del grafo  $G$  en dirección de los vértices de  $V_1$  a los vértices de  $V_2$ . En este caso el hammoide  $M(G; V_1) \mid V_2$  será un matroide transversal sobre el conjunto  $V_2$  que coincide con el matroide de combinaciones de pares del grafo bipartido  $G$  sobre el conjunto  $V_2$  (véase el problema 8.79).

8.244. Demuéstrese las siguientes afirmaciones:

- Un matroide es hammoide cuando y sólo cuando su contracción es un matroide transversal;
- la clase de hammoides está cerrada respecto de la toma de los menores y del paso a los matroides duales;
- la unión de hammoides es un hammoide.

Un matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  se llama *ordenado por bases*, si para cualesquiera dos bases  $B_1$  y  $B_2$  de él existe una aplicación biunívoca  $\varphi: B_1 \rightarrow B_2$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{\varphi(x)\}$  y  $(B_2 \setminus \{\varphi(x)\}) \cup \{x\}$  son las bases del matroide  $M$  para todos los  $x \in B_1$ .

8.245. Demuéstrese que todo matroide transversal es ordenado por bases. ¿Será cierta la afirmación inversa?

8.246. Sea  $M$  un matroide ordenado por bases sobre el conjunto  $S$ . Demuéstrese que serán ordenados por bases también:

- el matroide  $M \mid T$  para todo  $T \subseteq S$ ;
- el matroide  $M^*$ , dual con relación a  $M$ ;
- cada menor del matroide  $M$ .

8.247. Demuéstranse las siguientes afirmaciones:

a) el truncamiento de un matroide transversal no ha de ser obligatoriamente transversal;

b) un truncamiento de un matroide ordenado por bases es ordenado por bases;

c) todo hammoide es un matroide ordenado por bases.

8.248. Demuéstrase que todo matroide transversal y cada hammoide son representables sobre el campo de números reales.

8.249. Demuéstrase que las imágenes homomorfas de los matroides transversales son transversales.

8.250. En el diagrama (véase la fig. 8.13) están representadas las relaciones entre las clases de matroides, donde  $A$  es una familia

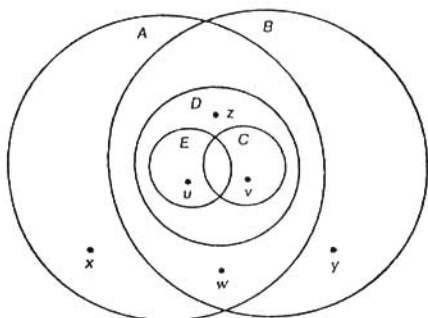


Fig. 8.13.

de todos los matroides ordenados por bases;  $B$  son todos los matroides representables sobre el campo de números reales;  $C$  es una familia de todos los matroides transversales;  $\mathcal{D}$  es una familia de todos los hammoides;  $E$  es una familia de todos los hammoides rígidos;  $x$  es un matroide de «no Pappo»;  $y$  es un matroide cíclico del grafo completo  $K_4$ ;  $u$  es el matroide del problema 8.55;  $v$  es un matroide cíclico del grafo bipartido completo  $K_{3,2}$ . Cerciórese de que el diagrama está correctamente llenado. Hállense en el diagrama los representantes para los puntos  $w$  y  $z$ .

#### § 4. Problemas mixtos en los matroides

El oráculo «independiente» es un dispositivo a cuya entrada se suministra un subconjunto arbitrario  $X$  del conjunto  $S$ , mientras que en la salida se desea obtener una respuesta a la pregunta: «¿será o no  $X$  un conjunto independiente del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$ ?». De un modo análogo se define el oráculo «base» (oráculos «ciclo» o «conjunto cerrado»), el cual nos da la respuesta a la cuestión:

«¿Será o no el subconjunto  $X$  del conjunto  $S$  una base (ciclo o conjunto cerrado, respectivamente) del matroide  $M$ ?». Dicho de otro modo, los oráculos «independiente», «base», «ciclo» y «conjunto cerrado» pueden interpretarse como aplicaciones del conjunto  $\mathcal{P}(S)$  de todos los subconjuntos del conjunto  $S$  en un conjunto de dos elementos {sí; no}. En los matroides se definen también otros oráculos, por ejemplo, «rango», «ceñidura» y «clausura», los dos primeros de los cuales se interpretan como aplicaciones de  $\mathcal{P}(S)$  en el conjunto de números naturales y el tercero, como aplicación de  $\mathcal{P}(S)$  en  $\mathcal{P}(S)$ .

Los oráculos mencionados están reunidos en la tabla siguiente:

Denominación del oráculo	Entrada	Salida
«independiente»	$X \subseteq S$	sí, siempre que $X$ sea un conjunto independiente del matroide $M$ ; no, en el caso contrario
«base»	$X \subseteq S$	sí, siempre que $X$ sea una base del matroide $M$ ; no, en el caso contrario
«ciclo»	$X \subseteq S$	sí, siempre que $X$ sea un ciclo del matroide $M$ ; no, en el caso contrario
«conjunto cerrado»	$X \subseteq S$	sí, siempre que $X$ sea una superficie del matroide $M$ ; no, en el caso contrario
«rango»	$X \subseteq S$	$r(X)$ es un rango del conjunto $X$ en $M$
«ceñidura»	$X \subseteq S$	potencia mínima de los ciclos del matroide $M$ contenidos en $X$ ; $\infty$ , si $X$ es un conjunto independiente del matroide $M$
«clausura»	$X \subseteq S$	$\bar{X}$ es una clausura del conjunto $X$ en el matroide $M$

Sea  $O$  un oráculo y sea  $A$  un algoritmo que puede dirigirse hacia el oráculo  $O$  como hacia un subprograma. Si el número de direcciones del algoritmo  $A$  hacia el oráculo  $O$  está limitado a cierto polinomio de la variable  $|S|$ , el algoritmo  $A$  se denomina *polinomial*. Diremos que un oráculo  $O_1$  es *polinomialmente reducible* al oráculo  $O_2$ , si existe un algoritmo polinomial que, empleando el oráculo  $O_2$ , tiene en la salida el oráculo  $O_1$ . Los oráculos  $O_1$  y  $O_2$  son *polinomialmente equivalentes*, si el oráculo  $O_1$  es polinomialmente reducible al oráculo  $O_2$ , y viceversa.

8.251. Demuéstrese que los oráculos «rango», «independiente» «clausura» son polinomialmente equivalentes.

8.252. Cerciórese de que los oráculos «base», «ciclo» y «conjunto cerrado» son polinomialmente reducibles a los oráculos «rango», «independiente», «clausura» y «ceñidura».

8.253. ¿Serán polinomialmente reducibles al oráculo «ceñidura» los oráculos «rango», «independiente» y «clausura»?

8.254. Sea dada una de las bases del matroide  $M$ . Demuéstrese que el oráculo «base» es polinomialmente equivalente al oráculo «independiente».

8.255. Demuéstrese que las propiedades que siguen más abajo del matroide  $M$  no pueden comprobarse en el transcurso del número polinomial de direcciones hacia el oráculo «independiente»:

- ¿Será homogéneo el matroide  $M$ ?
- ¿Será autodual el matroide  $M$ ?
- ¿Será transversal el matroide  $M$ ?
- ¿Será representable el matroide  $M$ ?
- ¿Será orientable el matroide  $M$ ?
- ¿Será binario el matroide  $M$ ?

8.256. Supongamos que  $M$  es un matroide sobre el conjunto  $S$ , y  $(X, Y, Z)$ , tal partición del conjunto  $S$  que  $|Y| = 1$ . Demuéstrese que para cualquier partición de esta índole del conjunto  $S$  existe o bien un ciclo  $C$  del matroide  $M$  tal que  $y \in C$ , donde  $\{y\} = Y$ , y  $z \notin C$  para todo  $z \in Z$ , o bien un cociclo  $C^*$  del matroide  $M$  tal que  $y \in C^*$  y  $x \notin C^*$  para todo  $x \in X$ .

Una terna  $(S, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  compuesta por el conjunto finito  $S$  y dos familias  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  de subconjuntos no vacíos del conjunto  $S$  recibe el nombre de grafoide, si se cumplen las siguientes condiciones:

- si  $C \in \mathcal{C}$  y  $D \in \mathcal{D}$ , entonces  $|C \cap D| = 1$ ;
- para cualquier partición  $(X, Y, Z)$  del conjunto  $S$  que satisface la condición  $|Y| = 1$ , o bien  $C \in \mathcal{C}$  es tal que  $y \in C$  y  $z \notin C$  para todo  $z \in Z$ , o bien  $D \in \mathcal{D}$  es tal que  $y \in D$  y  $x \notin D$  para todo  $x \in X$ ;
- ningún subconjunto propio del término  $C$  de  $\mathcal{C}$  es término de  $\mathcal{C}$ ; ningún subconjunto propio del término  $D$  de  $\mathcal{D}$  es término de  $\mathcal{D}$ .

8.257. Supongamos que  $M$  es un matroide sobre el conjunto  $S$ ;  $\mathcal{C}$  es una familia de todos los ciclos de  $M$  y  $\mathcal{C}^*$ , una familia de todos los cociclos suyos. Demuéstrese que  $(S, \mathcal{C}, \mathcal{C}^*)$  es un grafoide.

8.258. Sea  $(S, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  un grafoide. Demuéstrese que si  $B$  es un subconjunto máximo del conjunto  $S$  que no contiene elementos de  $\mathcal{C}$ , entonces el conjunto  $S \setminus B$  será un subconjunto máximo del conjunto  $S$  que no contiene elementos de  $\mathcal{D}$ .

8.259. Sea  $(S, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  un grafoide. Demuéstrese que en este caso  $\mathcal{C}$  es una familia de ciclos de cierto matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$ , y  $\mathcal{D}$  es la familia de sus cociclos.

Supongamos que  $M$  es un matroide sobre el conjunto  $S$  con la función de rango  $r$ . El polinomio característico del matroide  $M$  se define por la siguiente correlación:

$$P(M; \lambda) = \sum_{ACS} (-1)^A \lambda^{r(S)-r(A)}.$$

Sea  $G$  un grafo sin bucles y aristas múltiples. Se denomina *k-coloración regular del grafo  $G$*  tal pintado de los vértices del grafo de  $k$  colores que ningún par de vértices adyacentes queden pintados de



un mismo color. El *polinomio cromático del grafo*  $P(G; \lambda)$  se determina como una función definida sobre el conjunto de números positivos enteros, la cual para cada  $\lambda$  entero y positivo es igual al número de diferentes métodos de coloración regular del grafo en  $\lambda$  colores. Si  $M(G)$  es un matroide cíclico del grafo, entonces el polinomio cromático del grafo es

$$P(G; \lambda) = \lambda^{k(G)} P(M(G); \lambda),$$

donde  $k(G)$  es el número de componentes conexos del grafo  $G$ ;  $P(M(G); \lambda)$  es un polinomio característico del matroide cíclico  $M(G)$ . El *número cromático*  $\chi(M)$  del matroide  $M$  se define mediante la relación

$$\chi(M) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \{n: P(M; n) > 0\},$$

donde  $\mathbb{Z}$  es el conjunto de números enteros positivos.

8.260. Demuéstrese que si  $e \in S$  no es ni bucle ni cobucle (istmo) del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$ , entonces

$$P(M; \lambda) = P(M'_e; \lambda) - P(M''_e; \lambda),$$

donde  $M'_e = M | (S \setminus e)$ ,  $M''_e = M \cdot (S \setminus e)$ .

8.261. Demuéstrese que si el matroide  $M$  contiene un bucle, entonces  $P(M; \lambda) = 0$ .

8.262. Demuéstrese que si  $e$  es un bucle (istmo) del matroide  $M(S)$ , entonces  $P(M; \lambda) = (\lambda - 1) P(M'_e; \lambda)$ , aquí  $M'_e = M | (S \setminus e)$ .

8.263. Hállense los polinomios característicos de los siguientes matroides:

- del matroide de Fano  $\Phi$ ;
- de la geometría proyectiva  $PG(r, q)$  de dimensión  $r$  sobre el campo  $GF(q)$ ;
- del matroide cíclico  $M(K_n)$  del grafo completo  $K_n$ ;
- del matroide homogéneo  $U_{2,4}$ .

8.264. Hállase el número cromático del matroide de Fano  $\Phi$ .

8.265. Sea  $M$  un matroide no gráfico sobre el conjunto  $S$  y sea  $N = M | A$ , donde  $A \subseteq S$ . Demuéstrese que  $\chi(N) \geq \chi(M)$ .

8.266. Supongamos que  $M$  es un matroide no gráfico y  $\alpha$ , un número entero tal que  $\alpha > \chi(M)$ . Demuéstrese que en el caso general no es obligatorio que  $P(M; \alpha) > 0$ .

8.267. Sea  $M$  un matroide binario. Demuéstrese que  $\chi(M) \leq 2$  cuando y sólo cuando todos los ciclos de  $M$  tienen potencia par.

8.268. Demuéstrese que si un matroide  $M$  es orientable, entonces  $P(M; n) \geq 0$  para todo  $n \geq 1$ .

8.269. Demuéstrese que si un matroide  $M$  es binario, entonces  $P(M; 2^k) \geq 0$  para todo  $k \geq 1$ .

Se denomina *invariante* tal función  $f$  sobre un conjunto de matroides, con valores tomados por ella en un anillo conmutativo, que si un matroide  $M$  es isomorfo a otro matroide  $N$ , entonces  $f(M) = f(N)$ . Se llamará *invariante de Tutte-Grothendieck* el invariante

que, para cualquier  $e$  que no es ni bucle ni cobucle, satisfaco las condiciones:

$$f(M) = f(M'_e) + f(M''_e);$$

$$f(M_1 + M_2) = f(M_1) \cdot f(M_2).$$

Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$  y sean  $r$  y  $r^*$  funciones de rango de  $M$  y de  $M^*$  (dual con relación a  $M$ ), respectivamente. El polinomio de Tutte  $T(M; x, y)$  del matroide  $M$  se define mediante la correlación

$$T(M; x, y) = \sum_{A \subset S} (x-1)^{r(S)-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}.$$

8.270. Compruébese que el número  $b(M)$  ( $i(M)$ ,  $sp(M)$ , respectivamente) de bases (conjuntos independientes y conjuntos engendrados, respectivamente) del matroide  $M$  es un invariante de Tutte-Grothendieck.

8.271. Demuéstrese que  $T(M; x, y) = T(M^*; y, x)$ .

8.272. Demuéstrese que para cualquier matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  el polinomio característico tiene por expresión

$$P(M; \lambda) = (-1)^{r(S)} T(M; 1 - \lambda, 0).$$

8.273. Demuéstrese que si un matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$  tiene componentes conexos  $(S_i; i \in I)$ , entonces

$$T(M; x, y) = \prod_{i \in I} T(M | S_i; x, y).$$

8.274. Sea  $M$  un matroide sobre el conjunto  $S$ . Compruébese la validez de las siguientes relaciones:

a)  $T(M; 2, 2) = 2^{1S1}$ ;

b)  $T(M; 1, 1) = b(M)$ , donde  $b(M)$  es el número de bases del matroide  $M$ ;

c)  $T(M; 2, 1) = i(M)$ , donde  $i(M)$  es el número de conjuntos independientes del matroide  $M$ ;

d)  $T(M; 1, 2) = sp(M)$ , donde  $sp(M)$  es el número de conjuntos engendrados del matroide  $M$ ;

e)  $T(M; 0, 0) = 0$ ;

f)  $T(M; 1, 0) = (-1)^{r(S)} \mu(S)$ , donde  $\mu$  es la función de Moebius de la estructura geométrica del matroide  $M$  y  $\mu(S) = \mu(\emptyset, S)$ .

8.275. Demuéstrese que sólo los invariantes de Tutte-Grothendieck son valores del polinomio de Tutte.

8.276. Demuéstrese que los coeficientes del polinomio de Tutte de cualquier matroide son no negativos.

8.277. Muéstrese que en el caso general la suma de dos polinomios de Tutte no es un polinomio de Tutte.

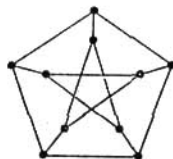
Supongamos que  $G(V, S)$  es un grafo con el conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de aristas  $S$ ;  $w$  es la orientación de las aristas del

grafo y  $H$ , un grupo abeliano. Diremos que la inyección  $\varphi: V \rightarrow H \setminus \{0\}$  es un  $H$ -flujo, si para cada vértice  $v \in V$  se verifica la relación

$$\sum_{\partial^+(v)} \varphi(e) - \sum_{\partial^-(v)} \varphi(e) = 0,$$

donde  $\partial^+(v)$ ,  $\partial^-(v)$  son conjuntos de aristas dirigidas a  $v$ , y de  $v$  para la orientación  $w$ . Suele decirse que el grafo  $G$  tiene  $k$ -flujo, si  $G$  tiene  $H$ -flujo para todos los grupos  $H$  (o sólo para un grupo) de orden  $k$ .

8.278. Sean  $w$  y  $w'$  dos orientaciones de aristas del grafo  $G$ . Muéstrase que existe una correspondencia biunívoca entre los flujos de las orientaciones  $w$  y  $w'$ . (De aquí proviene que el número  $N(H, G)$  de  $H$ -flujos en el grafo  $G$  no depende de la orientación del grafo y es una función solamente de  $H$  y  $G$ .)



$P_{10}$

Fig. 8.14.

8.279. Demuéstrase que si el arista  $e$  no es bucle ni puente del grafo  $G$ , entonces

$$N(H; G) = -N(H, G'_e) + N(H, G''_e),$$

donde  $G'_e$  y  $G''_e$  son los grafos obtenidos de  $G$  por supresión y contracción de la arista  $e$ , respectivamente.

8.280. Supongamos que  $M(G)$  es un matroide cíclico del grafo  $G$  y  $O(H)$ , el orden del grupo  $H$ . Demuéstrase que

$$\begin{aligned} N(H, G) &= (-1)^{|S| - r(S)} T(M(G); 0, O(H) - 1) = \\ &= P(M^*(G); O(H)). \end{aligned}$$

8.281. Demuéstrase que cualquier grafo sin puentes tiene el 8-flujo.

8.282. Demuéstrase que el grafo de Peterson ( $P_{10}$ ; fig. 8.14) no tiene 4-flujo.

8.283. Demuéstrase que un grafo sin puentes tiene 5-flujo.

8.284. (?) Demuéstrase que el grafo  $G$  sin puentes tiene 4-flujo cuando y sólo cuando no tiene subgrafos contraídos hacia el grafo de Peterson.

ESQUEMAS COMBINATORIOS

§ 1. Relaciones combinatorias

1.1. El número de  $k$ -muestras del  $n$ -conjunto que contienen el primer elemento es, evidentemente, igual a  $C_{n-1}^{k-1}$ , y el de las que no lo contienen es igual a  $C_{n-1}^k$ , de donde proviene a).

Para demostrar la identidad b), asignemos a su segundo miembro el siguiente sentido combinatorio:  $C_{n-1}^{k-1}$  es el número de  $k$ -muestras del  $n$ -conjunto que no contienen el primer elemento;  $C_{n-2}^{k-1}$  es el número de  $k$ -muestras que contienen el primer elemento y no contienen el segundo, etc.;  $C_{n-r-1}^{k-r}$  es el número de  $k$ -muestras que contienen los primeros  $r$  elementos y no contienen el  $(r+1)$ -ésimo elemento, etc.

1.2. El número de  $m$ -muestras del  $(n+1)$ -conjunto es igual a  $C_{n+m}^m$ . Dividamos estas muestras en clases, refiriendo a la  $(m-k)$ -ésima clase aquellas, en las que el elemento del primer tipo figura  $m-k$  veces. Los demás  $k$  lugares pueden estar ocupados por los elementos de otros tipos. Por eso el número de elementos en la  $(m-k)$ -ésima clase es igual al número de  $k$ -muestras del  $(n)$ -conjunto, es decir, a  $C_{n+k-1}^k$ . Al sumar respecto de todas las clases de particiones, obtendremos el conjunto requerido.

1.3. Fijemos un  $m$ -subconjunto del  $n$ -conjunto. El número de  $r$ -muestras del  $n$ -conjunto, a condición de que exactamente  $r-k$  elementos pertenecen al  $m$ -subconjunto y los demás  $k$  elementos, al complemento de este último, es igual a  $C_{n-m}^{r-m} C_m^{r-k}$  (se ha empleado la regla del producto). Al sumar respecto de  $k$ , obtendremos el número de todas las  $r$ -muestras del  $n$ -conjunto, o sea  $C_n^r$ . Observemos que para  $k > \min\{r, n-m\}$  los términos de la suma son nulos.

1.4. a) El número de todos los subconjuntos del  $n$ -conjunto es igual, obviamente, a  $2^n$ . Por otra parte, cada subconjunto del  $n$ -conjunto de potencia  $k$  es una  $k$ -muestra. Al sumar respecto de todos los  $k$ , obtendremos la identidad requerida.

b) Por cuanto  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ , entonces, diferenciando respecto de  $x$ ,

tenemos  $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^{k-1}$ . Suponiendo  $x=1$ , tenemos b).

c) Por cuanto  $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = \sum_{k=0}^n k \cdot k C_n^k = \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k + \sum_{k=0}^n k C_n^k$ , entonces,

por analogía con b), tenemos c).

1.5. El número de  $n$ -muestras ordenadas del  $(m)$ -conjunto es  $m^n = A^n(m)$ . Partiremos las  $n$ -muestras en clases, considerando pertenecientes a la  $k$ -ésima clase aquellas, en las cuales los elementos del primer tipo se encuentran en  $k$  lugares. El número de  $n$ -muestras en la  $k$ -ésima clase es igual a  $C_n^k (m-1)^{n-k}$ .

Al tomar la suma de todas las  $n$ -muestras respecto de todas las clases de particiones, obtendremos la fórmula requerida.

1.6. El número de todas las  $n$ -muestras ordenadas del ( $k$ )-conjunto es igual a  $k^n$ . Partiremos estas muestras en clases, atribuyendo a una clase aquellas, en las que figuran  $n_1$  elementos del primer tipo,  $n_2$  elementos del segundo tipo, etc.,  $n_h$  elementos del  $k$ -ésimo tipo. El número de tales  $n$ -muestras es igual a  $p(n_1, \dots, n_h) = n! / (n_1! \dots n_h!)$ . Por consiguiente, el número total de  $n$ -muestras del ( $k$ )-conjunto es igual a  $\sum p(n_1, \dots, n_h)$ , donde la sumación se realiza respecto de todas las particiones ordenadas de  $n$  en  $k$  sumandos, lo que se trataba de demostrar.

1.7. a) Convergamos en considerar el  $n$ -conjunto como ( $q$ )-conjunto, en el cual hay  $n_1$  elementos del primer tipo,  $n_2$  elementos del segundo tipo, etc.,  $n_q$  elementos de  $q$ -ésimo tipo  $\left( n = \sum_{i=1}^q n_i \right)$ ; distinguiremos entre sí los elementos de un mismo tipo.

Partiremos todas las  $m$ -muestras del  $n$ -conjunto en clases, considerando pertenecientes a una clase aquellas  $m$ -muestras, en las cuales figuran exactamente  $m_1$  elementos del primer tipo, etc. El número de  $m$ -muestras en esta clase es igual a  $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_q}^{m_q}$ . Al sumar respecto de todas las clases, obtendremos el resultado requerido.

b) Por analogía con a) resolvemos este problema sustituyendo el  $n$ -conjunto por el ( $n$ )-conjunto.

1.8. Por cuanto  $C_{n+1}^{r+1} = \frac{n+1}{r+1} C_n^r$  y  $C_n^r = \frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$ , entonces el primer miembro de la igualdad puede escribirse así:

$$\frac{\frac{n}{r} \left( \frac{n+1}{r+1} - 1 \right) (C_{n-1}^r)^2}{\left( \frac{n^2}{r^2} - \frac{(n+1)n}{(r+1)r} \right) (C_{n-1}^{r-1})^2} = \frac{\frac{n(n-r)}{r(r+1)}}{\frac{n(n-r)}{r^2(r+1)}} = r.$$

$$1.9. \sum_{x=1}^n \frac{C_{2n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^x} = \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(2n-x-1)!}{(n-x)!} = \frac{2n}{(2n-1) C_{2n-1}^{n-1}} \times \\ \times \sum_{x=1}^n C_{2n-x-1}^{n-1} - \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{x=1}^n C_{2n-x}^{n-1} = \frac{2n C_{2n-1}^{n-1}}{(2n-1) C_{2n-2}^{n-2}} - \frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{2}{n+1}.$$

$$1.10. \sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^x} = \frac{(n-1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(n+q-x)!}{(n-x)!} = \frac{(n+q+1)(n-1)! q!}{(n+q)!} \times \\ \times \sum_{x=1}^n C_{n+q-x}^{n-x} - \frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+1}^{n-x} = \frac{(n+q+1)(n-1)! q!}{(n+q)!} \times \\ \times C_{n+q}^{n-1} - \frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} C_{n+q+1}^{n-1} = \frac{n+q+1}{q+1} - \frac{n+q+1}{q+2} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

$$1.11. \sum_{x=0}^n \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{n! C_n^r}{(2n)!} \sum_{x=0}^n \frac{(x+r)!(2n-x-r)!}{x!(n-x)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{x=0}^n C_{x+r}^x \times \\ \times C_{2n-x-r}^{n-r} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

1.12. De acuerdo con la fórmula del binomio de Newton tenemos

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i 2^{-i}, \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^i 2^{-i},$$

entonces

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i} 2^{-2i} = \frac{(3/2)^n + (1/2)^n}{2}.$$

De un modo análogo obtenemos b).

1.13. El número de  $m$ -muestras del  $(n)$ -conjunto es igual a  $C_{n+m}^{n+m}$ . Partiremos los tipos de elementos del  $(n)$ -conjunto en dos clases respecto de  $p$  y  $n-p$  tipos, respectivamente. Luego partiremos todas las  $m$ -muestras del  $(n)$ -conjunto en clases, atribuyendo a la clase  $\chi$  aquellas que contienen  $x$  elementos del primer conjunto de tipos y  $m-x$  elementos del segundo tipo de elementos. Está claro que en la clase se contienen  $C_{p+x-1}^x C_{n+m-p-x-1}^{m-x}$  elementos. Al sumar respecto de todas las clases, obtendremos la identidad requerida.

1.14. Demostremos por inducción: para  $n=0$   $\sum_{i_0=1}^m 1 = m = C_m^1$ . Sea

$$\sum_{i_{n-1}}^{i_n} \dots \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = C_{n+i_{n-1}}^{n+i_{n-1}}. \text{ Entonces}$$

$$C_{n+m}^{n+1} = \sum_{i_n=1}^m C_{n+i_{n-1}}^{n+i_{n-1}} = \sum_{i_n=1}^m C_{n+i_{n-1}}^{i_n-1} = \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_0=1}^{i_1} 1,$$

donde la primera igualdad fue demostrada en el problema 1.2, lo que se trataba de demostrar.

1.15. Partiremos todas las permutaciones de  $m$  bolas blancas y  $n$  negras en clases. Consideraremos pertenecientes a la clase  $(k_1, \dots, k_m)$  las permutaciones en las cuales hay  $k_1$  bolas blancas aisladas,  $k_2$  pares de bolas,  $k_3$  ternas, etc.,  $k_m$  bolas que están juntas.

Es evidente que  $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$ . Calculemos el número de permutaciones de la clase  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Si  $n$  bolas negras están colocadas por orden, tendremos, pues,  $n+1$  lugares para colocar bolas blancas. Por eso, el número de permutaciones es igual a  $p(k_1, \dots, k_m, n-k_1-\dots-k_m+1)$ . El número total de permutaciones es igual a  $C_{n+m}^{n+m}$ , lo que se trataba de demostrar.

1.16. Para  $n > 0$  véase el problema 1.1. Cuando  $n < 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} &= (-1)^r C_{r-n}^r + (-1)^{r-1} C_{r-n-1}^{r-1} = \\ &= (-1)^r (C_{r-n}^r - C_{r-n-1}^{r-1}) = (-1)^r C_{r-n-1}^r = C_n^r, \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

## § 2. Muestras y ordenaciones

1.17. El número total de permutaciones es igual a  $n!$ . Sin embargo, la relación de vecindad queda intacta para las permutaciones cíclicas y para las reflexiones simétricas. Por eso hay en total  $n!(2n) = (n-1)!/2$  modos.

1.18. Los sitios para los hombres y las mujeres pueden elegirse por dos métodos. A continuación, en los lugares elegidos los hombres pueden colocarse mediante  $n!$  métodos. En los lugares restantes las mujeres pueden colocarse mediante  $n!$  métodos. En total hay  $2(n!)^2$  métodos.

1.19. a)  $C_{12}^0 - C_{18}^0$ ; efectivamente, hay en total  $C_{12}^0$  métodos de sacar 10 cartas; en  $C_{18}^0$  casos no habrá ningunas en la muestra; b)  $C_1^4 C_{18}^4$ ; c)  $C_{12}^0 - C_{18}^0 - 4C_{18}^4$ ; d)  $C_1^4 C_{18}^4$ .

1.20. Elegimos 6 ajedrecista mediante  $C_n^6$  métodos. Enumerémoslos con cifras del 1 al 6 y formemos 3 en pares: el primero—segundo; el tercero—cuarto; el quinto—sexto. Esto puede hacerse empleando 6! métodos. Por cuanto el orden de los ajedrecistas dentro de cada par y el orden de los pares no son esenciales, entonces 6 ajedrecistas pueden ser divididos en pares mediante  $6!/(2^3 3!)$  métodos. En total existen  $C_n^6 6!/(2^3 3!) = n!/(48(n-6)!)$  métodos para componer tres pares de  $n$  ajedrecistas.

1.22. Cada divisor del número  $q$  tiene por expresión  $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ , donde  $\beta_i = 0, 1, \dots, \alpha_i$ . Según la regla del producto, el número de divisores es igual a  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$ . La suma de los divisores será

$$\begin{aligned} & (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_n + \dots + p_n^{\alpha_n}) = \\ & = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}. \end{aligned}$$

En efecto, si abrimos paréntesis, entonces al reducir los términos semejantes, obtendremos una suma en la cual cada divisor  $q$  figura exactamente una vez. De aquí, el número  $q$  de divisores puede obtenerse de otro modo, a saber, en el primer miembro de la última expresión basta poner todos los  $p_i$  iguales a la unidad.

1.23. Reunamos los  $m$  elementos dados en uno. Teniendo presente que dichos  $m$  elementos pueden permutarse, obtendremos  $m!(n-m+1)!$  permutaciones en las cuales estos  $m$  elementos están al lado. Por consiguiente, el número de permutaciones buscadas es  $n! - m!(n-m+1)!$

1.24. La cantidad de números de  $n$  cifras que no contienen dos cifras iguales seguidas es igual a  $9^n$  cuando  $n > 1$ , y a 10, cuando  $n = 1$ . Este resultado se deduce de la regla del producto, si tomamos en consideración que, una vez elegidas las primeras  $k$  cifras, la cifra  $(k+1)$ -ésima puede ser elegida mediante nueve métodos. Por eso la respuesta será

$$10 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^n = (9^{n+1} - 1)/8.$$

1.25. En el método buscado de elección de seis cartas puede ocurrir que haya

a) tres cartas de un mismo palo y tres que tienen cada una otro palo diferente; habrá  $C_1^3 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3$  de tales muestras.

b) dos pares de cartas de un mismo palo y dos cartas que tienen cada una otro palo diferente. Habrá  $C_1^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^1)^2$  de tales muestras. La suma de estos números da la respuesta buscada.

1.26. Para caracterizar el número que satisface la hipótesis del problema, es suficiente decir cuántas veces se encuentran en este número las cifras: uno, dos, . . . , nueve. Por eso hay en total

$$C_{(v)}^n = C_{n+9-1}^n = C_{n+8}^n$$

de tales números.

1.27. Cada bola puede ocupar uno de  $m$  lugares. Entonces, según la regla del producto, obtendremos  $m^n$  métodos de repartición.

1.28. A cada modo de colocación le corresponde una  $n$ -muestra del  $(m)$ -conjunto. Hay en total  $C_{(m)}^n = C_{m+n-1}^n$  métodos.

1.29. a) En cada urna se debe poner una bola. Las demás bolas pueden colocarse mediante  $C_{(m)}^{n-h} = C_{n-1}^{n-h} = C_{n-1}^{h-1}$  métodos.

b)  $C_{n-h+m-2}^{n-h}$ .

c) Coloquemos en la primera urna  $a_1$  bolas; en la segunda,  $a_2$  bolas, etc., en la  $s$ -ésima urna,  $a_s$  bolas. Entonces, las demás  $n - \sum_{i=1}^s a_i$  bolas pueden distribuirse entre las  $m-s$  urnas restantes mediante

$$C_{(m-s)}^{n - \sum_{i=1}^s a_i} = C_{n - \sum_{i=1}^s a_i}^{m-s} \quad \text{métodos.}$$

$$d) C_{(m)}^{n - \sum_{i=1}^m a_i} = C_{m+n - \sum_{i=1}^m a_i}^m$$

1.30. Las bolas blancas podemos distribuir las entre las urnas mediante  $C_{(m)}^{n_1}$  métodos; las bolas negras, mediante  $C_{(m)}^{n_2}$  métodos y las azules, mediante  $C_{(m)}^{n_3}$  métodos. Pero, por cuanto las distribuciones de las bolas de distinto color no dependen una de otra, entonces, en virtud de la regla del producto, el número total de métodos de distribución será

$$C_{(m)}^{n_1} C_{(m)}^{n_2} C_{(m)}^{n_3} = C_{m+n_1-1}^{n_1} C_{m+n_2-1}^{n_2} C_{m+n_3-1}^{n_3}$$

1.31. Designemos el número de métodos de distribución de  $n$  bolas iguales entre  $i$  urnas iguales con  $A(n, i)$ . Este problema es equivalente a la distribución de  $n$  bolas iguales entre  $i$  urnas diferentes de tal modo que se verifique  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_i$ , donde  $n_m$  es el número de bolas en la  $m$ -ésima urna. Fijemos el número de bolas  $k$  en la 1<sup>ra</sup> urna, donde  $0 \leq k \leq \lfloor n/i \rfloor$ . Tomando en consideración que en cada una de las urnas restantes se encuentran no menos de  $k$  bolas, concluimos que el número de métodos para llenarlas es igual a  $A(n-ik, i-1)$ . De este modo obtenemos la siguiente relación recurrente:

$$A(n, i) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/i \rfloor} A(n-ik, i-1)$$

De aquí siguen las respuestas: a)  $\left[ \frac{n+2}{2} \right]$ ; b)  $\left[ \frac{n}{3} \right] + 1 + \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left[ \frac{n-3k}{2} \right]$ .

1.32. Coloquemos todas las bolas formando una fila y enumerémoslas. Escribamos por encima de cada bola el número de la urna en la que aquella se va a colocar. Los números de las urnas forman una permutación del  $k$ -conjunto que contiene  $n_1$  números 1,  $n_2$  números 2,  $n_k$  números  $k$ . Cada permutación de este tipo determina su método de colocación, mientras que el número de tales permutaciones es igual a  $p(n_1, \dots, n_k) = n! (n_1! \dots n_k!)$ .

1.33. a) Es un caso particular del problema 1.32. La respuesta es

$$b) \frac{n!}{(p_1!)^{m_1} (p_2!)^{m_2} \dots (p_k!)^{m_k}}$$

$$b) \frac{n!}{(p_1!)^{m_1} (p_2!)^{m_2} \dots (p_k!)^{m_k} m_1! \dots m_k!}$$

1.34. a) Este problema es equivalente a la distribución de  $k$  bolas iguales entre  $n$  urnas diferentes, a condición de que en la primera urna se encuentre no



menos de 1 bola. Aquí resulta esencial que  $k \leq 9$ . Por eso, la respuesta es como sigue (véase el problema 1.28):  $C_{(n)}^k = C_{n+k-2}^{k-1}$ ;

b)  $C_{(n)}^k = C_{n+k-1}^k$ .

1.35. Por una simple selección llegamos a que el número de cinco cifras puede estar compuesto de los siguientes juegos de cifras

7, 2, 6, 5, 5;    7, 6, 5, 2, 2;    7, 2, 2, 5, 5;  
 6, 2, 2, 5, 5;    7, 5, 2, 2, 2;    7, 6, 2, 2, 2;  
 5, 6, 2, 2, 2;    7, 2, 2, 2, 2;    5, 2, 2, 2, 2;  
 9, 2, 2, 2, 2;    5, 5, 2, 2, 2;

Por eso la cantidad total de tales números será

$$2p(1, 1, 1, 2) + 3p(1, 1, 3) + 2p(1, 2, 2) + 3p(1, 4) + p(2, 3) = 265.$$

1.36. a) Denotemos una totalidad no vacía de unidades seguidas con la letra  $E$  y de ceros, con la letra  $H$ . Entonces, de la hipótesis del problema proviene que la sucesión de ceros y unidades se dispone según uno de los dos esquemas: EHEH...EH o HEHE...HE, con la particularidad de que en cada esquema figuran  $r$  pares. Mas, existen  $C_{m-1}^m = C_{m-1}^{m-1}$  métodos para distribuir  $m$  unidades entre las totalidades no vacías. Para los ceros tenemos, por analogía,  $C_{n-1}^r = C_{n-1}^{r-1}$  métodos. Por eso el número total de sucesiones es igual a  $2C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^r$ .

b)  $C_{m-1}^r C_{n-1}^{r-1} + C_{m-1}^{r-1} C_{n-1}^r$ .

1.37. a) Notemos que el número  $S$  no satisface a ciencia cierta la hipótesis del problema, si aquél puede ser representado por dos métodos esencialmente diferentes en forma de una suma de tres sumandos distintos, cada uno de los cuales no es superior a 9, puesto que en tal caso se tiene por lo menos 12 números con una suma igual a  $S$ . Dicha representación se obtiene fácilmente para todos los números  $S$  desde 5 hasta 22. Por ejemplo,  $5 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0$ . Para  $S \leq 4$  hagamos uso del resultado del problema 1.34.

b) Resulta que sólo para  $S = 3$  existen exactamente 10 números, en cada uno de los cuales la suma de las cifras es igual a  $S$ . A todo número, cuya notación decimal se representa como  $a_1 a_2 a_3$ , se le pone biunívocamente en correspondencia el número  $9 - a_1 9 - a_2 9 - a_3$ . Si la suma de cifras del primer número es igual a  $S$ , la del segundo será  $27 - S$ . Por eso el caso en que  $23 \leq S \leq 27$  es simétrico al caso  $0 \leq S \leq 4$ , y sólo  $S = 24$  satisface la hipótesis del problema. La respuesta es:  $S_1 = 3$ ;  $S_2 = 24$ .

1.38. a) El que compra un billete elige 6 números de un total de 49. Todas las muestras posibles se consideran equiprobables. Fijemos 6 números. Entonces la probabilidad buscada será igual a la razón entre el número de muestras con  $k$  números de los 6 fijados y el número de todas las muestras. Hay en total  $C_{49}^6$  muestras. Haciendo uso de la regla del producto, llegamos a que  $k$  números de 6 contienen  $C_6^k C_{43}^{6-k}$  muestras: primero de 6 números ciertos se eligen  $k$ , y luego  $6 - k$  números se complementan empleando 43 números «infelices». De este modo, la probabilidad de adivinar  $k$  números es igual a  $C_6^k C_{43}^{6-k} / C_{49}^6$ .

b)  $\sum_{i=k}^6 (C_6^i C_{43}^{6-i}) / C_{49}^6$ .

1.39. Al igual que en el problema anterior, por probabilidad entenderemos la razón entre el número de muestras favorables y el número total de muestras. En total existen  $C_{90}^5$  métodos de sacar 5 fichas. Supongamos que el participante de la lotería haya comprado un billete con un número. Para ganar el premio es necesario que una de las 5 fichas coincida con el número en el billete. Los demás se eligen de 89 números restantes. Por eso, existen  $C_{89}^4$  resultados favorables y la probabilidad de ganar el premio es igual a  $C_{89}^4 / C_{90}^5 = 1/18$ .

Análogamente, jugando con dos números, llegamos a que la probabilidad de ganar el premio es igual a  $C_{28}^2/C_{90}^2 = 2/801$ . Jugando con tres números, tenemos  $C_{28}^3/C_{90}^3 = 1/11748$ . Jugando con cuatro números tenemos  $C_{28}^4/C_{90}^4 = 1/511038$ . Jugando con cinco números, la probabilidad será  $1/C_{90}^5 = 1/43949268$ .

1.40. Designemos con  $g(n)$  el número de sucesiones de longitud  $n$  que satisfacen las condiciones del problema. El número de sucesiones de longitud  $n$ , que comienzan con una de las cifras 1, 2, . . . ,  $k$ , es igual a  $g(n-1)$ , y el número de aquellas que comienzan con cero y satisfacen las condiciones del problema es igual a  $(k+1)^{n-1} - g(n-1)$ . Por eso resulta válida la siguiente relación recurrente:  $g(n) = (k-1)g(n-1) + (k+1)^{n-1}$ . Teniendo en cuenta que  $g(1) = k$ , podemos demostrar por inducción la fórmula siguiente:

$$g(n) = ((k+1)^n + (k-1)^n)/2.$$

1.41. *Primer método.* Por cada examen aprobado exitosamente el examinando puede tener 3, 4, 5 puntos. Designemos con  $F(k, N)$  el número de métodos por medio de los cuales se pueden acumular  $N$  puntos después de aprobar  $k$  exámenes. En este caso se verifica la relación

$$F(k, N) = F(k-1, N-3) + F(k-1, N-4) + F(k-1, N-5).$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} F(4, 17) &= F(3, 14) + F(3, 13) + F(3, 12) = \\ &= F(2, 11) + 2F(2, 10) + 3F(2, 9) + 2F(2, 8) + F(2, 7) = \\ &= 2 + 3F(2, 9) + 2F(2, 8) + F(2, 7), \end{aligned}$$

puesto que no es posible acumular 11 puntos tras dos exámenes, mientras que acumular 10 puntos se puede mediante un solo método, sacando 5 puntos en cada examen. Continuando los cálculos, obtendremos

$$F(4, 17) = 2 + 3F(1, 6) + 5F(1, 5) + 6F(1, 4) + 3F(1, 3) + F(1, 2),$$

pero  $F(1, 6) = F(1, 2) = 0$  (no se pueden obtener 6 puntos en un examen, y una calificación con un dos priva del derecho a ingresar en el instituto.  $F(1, 5) = F(1, 4) = F(1, 3) = 1$ , por lo cual  $F(4, 17) = 16$ ).

De un modo análogo se realiza el cálculo para  $F(4, 18) = 10$ ,  $F(4, 19) = 4$  y  $F(4, 20) = 1$ . Obtenemos en total  $16 + 10 + 4 + 1 = 31$  métodos para rendir exitosamente los exámenes.

*Segundo método.* Designemos con  $P(a, b, c, d, e)$  el número de métodos con cuya ayuda pueden obtenerse  $a$  quinternas,  $b$  cuaternas,  $c$  ternas, etc. 17 puntos pueden adquirirse por dos métodos esencialmente diferentes: pueden obtenerse dos quinternas, una cuaterna y una terna, o bien una quinterna y tres cuaternas. Estas calificaciones pueden distribuirse de cualquier modo entre las asignaturas aprobadas. Por cuanto

$$P(2, 1, 1) + P(1, 3) = 4!/(2!1!1!) + 4!/(3!1!) = 16,$$

entonces 17 puntos pueden ser sacados mediante 16 métodos.

De igual modo se calcula el número de métodos para obtener 18, 19 y 20 puntos.

1.42. Designemos con  $F(n_1, n_2, \dots, n_m; N)$  el número de métodos por medio de los cuales se pueden pagar  $N$  kopeks con monedas de valor diferente. De aquí proviene:

$$\begin{aligned} F(n_1, n_2, \dots, n_m; N) &= \\ &= F(n_1, n_2, \dots, n_{m-1}; N - n_m) + F(n_1, \dots, n_{m-1}; N). \quad (*) \end{aligned}$$

Esto permite reducir el problema de elección de  $m$  monedas al problema de elección de  $(m-1)$  monedas. Al repetir la operación de un modo análogo, reduz-

camos este problema al de elección de  $(m - 2)$  monedas, etc. Es evidente que para  $n_m > N$  la relación (\*) se sustituye por  $F(n_1, n_2, \dots, n_m; N) = F(n_1, \dots, n_{m-1}; N)$ .

Apliquemos este procedimiento a la resolución del problema dado:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) =$$

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 23) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23),$$

puesto que  $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 + 20 < 73$ , y, por eso, el segundo sumando es igual a cero. Luego continuamos:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23);$$

pero

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) = F(1, 2, 3; 3) = \\ = F(1, 2; 0) + F(1, 2; 3) = 1 + F(1; 3) + F(1; 1) = 2.$$

Calculemos el segundo sumando:

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10; 8) + F(1, 2, 3, 5, 10; 23) = \\ = F(1, 2, 3, 5, 10; 8), \text{ puesto que } 1 + 2 + 3 + 5 + 10 < 23.$$

$$\text{Pero } F(1, 2, 3, 5; 8) = F(1, 2, 3; 3) = 2.$$

En definitiva obtenemos

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = 4.$$

Así pues, el pago requerido puede realizarse por cuatro métodos, a saber: 1) 50, 20, 3 kopeks; 2) 50, 20, 2, 1 kopeks; 3) 50, 15, 5, 3 kopeks; 4) 50, 15, 5, 2, 1 kopeks.

1.43. Sea  $f(N)$  el número de métodos, por medio de los cuales se pueden pegar sellos de 4, 6, 10 kopeks de valor de tal modo que el valor total de estos sellos sea igual a  $N$ . Entonces, para  $f(N)$  se verifica la igualdad  $f(N) = f(N - 4) + f(N - 6) + f(N - 10)$ . En efecto, supongamos que existe cierto modo de pegar sellos con un valor total de  $N$  kopeks y que el último sello que se pega vale 4 kopeks. En este caso todas las demás sellos valen  $N - 4$  kopeks. Viceversa, al agregar a cualquier combinación de sellos de un valor de  $N - 4$  kopeks un sello de cuatro kopeks, obtenemos una combinación de sellos de  $N$  kopeks. En tal caso, a partir de distintas combinaciones que tienen un valor de  $N - 4$  kopeks se obtienen diferentes combinaciones de  $N$  kopeks. Así pues, el número de combinaciones buscadas, donde el último sello que se pega vale 4 kopeks, es igual a  $f(N - 4)$ .

De un modo análogo se demuestra que el número de combinaciones que terminan con un sello de 6 kopeks es igual a  $f(N - 6)$  y con un sello de 10 kopeks terminan  $f(N - 10)$  combinaciones. Por cuanto cualquier combinación termina con un sello de los tipos citados, resulta válida la relación que se demuestra. Esta relación permite reducir el problema de pegar sellos que valen en suma  $N$  kopeks a un problema de pegar sellos de sumas inferiores. Mas, cuando los valores de  $N$  son pequeños, el problema es fácil de resolver inmediatamente. Un simple cálculo enseña que  $f(0) = 1$  (la suma de 0 kopeks puede pagarse de un modo único: no pegando los sellos en general);  $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ ;  $f(5) = 0$ ;  $f(7) = f(9) = 0$  (estas sumas no pueden obtenerse de ningún modo con ayuda de los sellos de 4, 6, 10 kopeks);  $f(4) = 1$ ,  $f(6) = 1$ ,  $f(8) = 1$ .

Haciendo uso de los valores de  $f(N)$  para  $N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ , es fácil hallar  $f(10) = f(6) + f(4) + f(0) = 3$ . A continuación encontramos

$f(11) = f(7) + f(5) + f(1) = 0$ ,  $f(12) = f(8) + f(6) + f(2) + 2$ , etc.,  
 $f(18) = 8$ .

Así pues, los sellos pueden pegarse empleando ocho métodos: 1) (10, 4, 4); 2) (4, 10, 4); 3) (4, 4, 10); 4) (6, 4, 4, 4); 5) (4, 6, 4, 4); 6) (4, 4, 6, 4); 7) (4, 4, 4, 6); 8) (6, 6, 6).

### § 3. Particiones

1.45. *Indicaciones.* Establézcase la equivalencia de los problemas sobre el número de métodos de colocación de  $k - 1$  rayas en  $n - 1$  intervalos entre  $n$  puntos de abscisas de números enteros.

1.46. Se conoce que cada número puede ser escrito de una sola manera en el sistema binario de cálculo, es decir, en forma de una suma de varias potencias diferentes del número dos. Sea, ahora,  $n = v_1 + v_1 + \dots + v_2 + v_2 + \dots$  cualquier partición de  $n$  en sumandos impares iguales o desiguales. Supongamos que el sumando  $v_i$  figura en la partición  $m_i$  veces de tal modo que

$n = \sum_{i=1}^h m_i v_i$ . Al representar el número  $m_i$  en la forma  $m_i = 2^{a_{i1}} + 2^{a_{i2}} + \dots$ , obtenemos

$$n = 2^{a_{11}} v_1 + 2^{a_{12}} v_1 + \dots + 2^{a_{21}} v_2 + 2^{a_{22}} v_2 + \dots$$

es decir, la partición de  $n$  en sumandos pares o impares, los cuales serán, obviamente, distintos. Viceversa, si está dada una partición  $n = k_1 + k_2 + \dots$  en sumandos distintos, entonces representemos cada uno de ellos en la forma  $k_i = 2^{a_{i1}} v_i$  ( $a_i \geq 0$ ,  $v_i$  es impar) y liguemos todos los sumandos con un mismo  $v_i$ , poniendo la suma de dichos sumandos  $2^{a_{i1}} v_i + 2^{a_{i2}} v_i + \dots$  igual a  $m_i v_i$  (donde  $m_i = 2^{a_{i1}} + 2^{a_{i2}} + \dots$ ). Obtendremos  $n = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots$ , es decir, la partición de  $n$  en sumandos impares, lo que se trataba de demostrar.

1.47. Véase la demostración, por ejemplo, en [14].

1.48. Analicemos toda clase de representaciones de  $n$  en la forma  $\sum_m a + d\delta$ , con la particularidad de que  $\sum_m a$  es una suma no ordenada de  $m$  sumandos desiguales y  $d, \delta$ , unos números enteros positivos. La suma  $\sum_m a$  puede estar ausente.

Hagamos extender a todas estas representaciones la suma  $S = \sum (-1)^m d$ ; el cálculo de esta suma mediante dos métodos nos da precisamente la solución del problema.

Reuniendo al principio en la suma  $S$  los términos, para los cuales  $d\delta = p$  tiene un mismo valor, hallamos la totalidad de estos términos igual a  $S(p) \times \sum (-1)^m$ , además  $\sum (-1)^m$  se toma respecto de todas las particiones del número  $n - p$  en sumandos desiguales. Al aplicar el problema antecedente de Euler—Legendre, encontramos para  $S$  la expresión  $\sum_{h: w_h < n} x(-1)^h S(n - w_h)$ .

Con el fin de encontrar otra expresión para  $S$ , dividamos todas las representaciones de  $n = \sum_m a + d\delta$  en tres categorías: 1) representaciones en las cuales  $d$  está ausente entre los sumandos de la suma  $\sum_m a$  y, además,  $\delta > 1$ ; 2) representaciones en las cuales  $d$  se encuentra entre los sumandos de la suma

$\sum_m a$ ; 3) representaciones en las cuales  $d$  está ausente entre los sumandos de  $n = \sum_m a$ , mientras que  $\delta = 1$ . Tomemos una representación de la primera categoría  $n = \sum_m a + d\delta$ , y, al restar un  $d$  del término  $d\delta$ , agreguémoslo, como sumando, a la suma  $\sum_m a$ . La representación obtenida (la cual puede ser expresada así:  $n = \sum_{m+1} a + d(\delta - 1)$ ) pertenece, evidentemente, a la segunda categoría.

Viceversa, a partir de cada representación de la segunda categoría puede obtenerse una representación de la primera categoría. Por consiguiente, las representaciones de las categorías primera y segunda se encuentran en una correspondencia biunívoca; al notar que los términos de la suma  $S$  para las representaciones correspondientes, es decir  $(-1)^m d$  y  $(-1)^{m+1} d$ , se suprimen recíprocamente, podemos decir que la parte de la suma  $S$  extendida a las representaciones de las dos primeras categorías es igual a cero.

Examinemos una representación de la tercera categoría  $n = \sum_m a + d$ .

Por cuanto  $d$  no se encuentra entre los sumandos  $a$ , esta representación puede considerarse como una partición no ordenada de  $n$  en  $m+1$  sumandos desiguales. Viceversa, a partir de cada partición de  $n = a_1 + \dots + a_{m+1}$  obtendremos  $m+1$  representaciones de la tercera categoría, tomando  $d$  igual a  $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ . Estas representaciones darán en la suma  $S$  los términos  $(-1)^m a_1 + (-1)^m a_2 + \dots + (-1)^m a_{m+1} = (-1)^m n$ . De aquí está claro que toda la suma  $S$  es igual a  $n \sum (-1)^m$ , donde  $\sum (-1)^m$  se calcula respecto de todas las particiones no ordenadas de  $n$  en sumandos distintos, cuyo número es  $m+1$ . De acuerdo con la fórmula de Euler-Legendre (del problema 1.47),  $S = \begin{cases} (-1)^{S-1} n, & \text{lo que se trataba de demostrar.} \\ n = w_S \end{cases}$

1.49. Examinemos una suma  $S = \sum (-1)^m$  respecto de las particiones  $n = \sum_m a + \sum a^*$ , donde  $\sum_m a$  denota la suma no ordenada  $m$  de sumandos desiguales, y  $\sum a^*$ , una suma no ordenada de sumandos iguales o desiguales. Demostremos que  $S = 0$ .

Reunamos en un grupo aquellas particiones en las cuales la totalidad de sumandos  $a$  y  $a^*$  es la misma; supongamos que en ella se contienen  $k$  sumandos desiguales. Es evidente que todas las particiones del grupo a considerar se obtienen cuando a partir de los  $k$  sumandos elegimos ciertos sumandos  $m$  ( $m = 0, 1, \dots, k$ ) y los incluimos en la suma  $\sum_m a$ ; los demás sumandos los incluimos en la suma  $\sum a^*$ . La suma  $\sum (-1)^m$  formada para ellos será:  $1 - C_k^1 + C_k^2 - \dots \pm C_k^k = 0$ . Por consiguiente, también  $S = 0$ . Reunamos ahora en la suma  $S$  los términos, para los cuales  $\sum_m a = u$  y  $\sum a^* = v$  ( $u + v = n$ ). De acuerdo con la fórmula de Euler-Legendre, esta parte de la suma es igual a cero, si  $u$  es un número no pentagonal, e igual a  $(-1)^h \bar{\mu}(v)$ , si  $u = w_h$ . Por consiguiente, obtenemos la igualdad  $\sum_{h: w_h \leq n} (-1)^h \bar{\mu}(n - w_h) = 0$ , lo que se trataba de demostrar.

1.50.  $F(n - hk) = \sum_{S: w_S \leq n/h - h} (-1)^S f(n - h(k + w_S))$ . Al multiplicar adi-

cionalmente por  $\bar{\mu}(k)$  y al sumar respecto de  $k$ , obtendremos

$$\sum \bar{\mu}(k) F(n-hk) = \sum_{h, S} (-1)^S \bar{\mu}(k) f(n-h(k+w_S)).$$

Reuniendo en la última suma doble aquellos términos, para los cuales  $k+w_S=l$  tiene un mismo valor, obtendremos

$$\sum_{0 \leq l \leq n/h} f(n-hl) \sum_{h: w_S \leq l} (-1)^S \bar{\mu}(l-w_S).$$

De conformidad con el problema antecedente, la suma interior es igual a cero cuando  $l > 0$ . Por consiguiente, toda la suma es igual a  $f(n)$ .

1.51. a) la demostración es igual que en el problema 1.49. Se debe demostrar la igualdad

$$\sum_{h=\sum a + \sum b} (-1)^m = \sum_{h=2} \sum_a (-1)^m$$

y aplicar el teorema de Euler—Legendre;

b) se deduce de a) y de la fórmula de inversión del problema 1.50.

1.52. a) se demuestra por analogía con el problema 1.49. De la fórmula de Euler—Legendre se deduce

$$\sum_{n=2} \sum_{a+\sum b} (-1)^m = \begin{cases} (-1)^{n+S}, & n = w_S, \\ 0, & n \neq w_S; \end{cases}$$

b) se deduce de a) y de la fórmula de inversión del problema 1.50.

1.53. Este número es igual al coeficiente de  $x^m$  en el polinomio  $(x^l + x^{l+1} + \dots + x^n)^p = x^{lp} (1 - x^{n-l+1}) (1 - x)^{-p}$ . En virtud de la fórmula del binomio de Newton llegamos a que este coeficiente es igual a

$$\begin{aligned} & C_{m-(l-1)p-1}^{m-lp} - C_p^l C_{m-(l-1)(p-1)-n-1}^{m+l-n-1-lp} + C_p^2 C_{m-(l-1)(p-2)-2n-1}^{m+2(l-n-1)-lp} + \dots \\ & x^{lp} \left[ \sum_{h_1=0}^p (-1)^{h_1} C_p^{h_1} x^{(n-l+1)h_1} \right] \left[ \sum_{h_2=0}^{\infty} C_{p+h_2-1}^{h_2} x^{h_2} \right] = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left\{ \sum_{lp+(n-l+1)h_1+h_2=m} (-1)^{h_1} C_p^{h_1} C_{p+h_2-1}^{h_2} \right\}. \end{aligned}$$

1.54. El círculo que se obtiene cuando el  $m$ -ésimo plano corta una esfera se interseca con cada uno de los planos restantes en dos puntos y, por tanto, se divide en  $2(m-1)$  partes. Si suprimimos el  $m$ -ésimo círculo, el número de partes será  $F(2m-1)$ . Por consiguiente,  $F(m) = 2(m-1) + F(m-1) = 2 + m(m-1)$ , puesto que  $F(1) = 2$ .

1.55. A cada una de  $C_{n-hs}^k$  elecciones de  $k$  números a partir de  $n-ks$  se le hace corresponder la elección de  $k$  vértices a partir de  $n$  del modo siguiente: a la derecha del siguiente número elegido  $i$  pondremos los números  $i+1, \dots, i+s$ , y los números que van detrás los aumentamos en  $s$ . De una manera semejante encontramos  $sC_{n-hs-1}^{k-1}$  elecciones no abarcadas antes, cuando quedó elegido uno de los vértices  $n-s, n-s+1, \dots, n$ . Tenemos en total  $C_{n-hs}^k + sC_{n-hs-1}^{k-1}$  polígonos de  $k$  lados.

1.56. Sea  $V(n)$  la función buscada. Demostremos una relación recurrente

$$V(n) = \sum_{s=0}^{n-1} V(s) V(n-s-1), \quad V(0) = 1. \text{ En efecto, cualquiera que sea la}$$

partición, existe un triángulo que contiene la arista  $(n+1, n+2)$  (convengamos en considerar que los vértices del triángulo vienen enumerados con las cifras del 1 al  $n+2$ ). El tercer vértice del triángulo puede ser cualquiera de los restantes  $1, 2, \dots, n$ . Supongamos que es el vértice  $S$ . Si suprimimos el triángulo  $(n+1, n+2, s)$ , obtendremos dos polígonos con un número de vértices igual a  $s+1$  y  $n-s+2$ , los cuales pueden ser partidos en triángulos empleando  $V(s-1)$  y  $V(n-s)$  métodos, respectivamente. Al enumerar respecto de  $S = 1, \dots, n$ , obtendremos la fórmula requerida. Se puede demostrar que la solución de esta fórmula recurrente será  $V(n) = C_{2n}^n/(n+1)$ .

1.57. Sea  $V(n)$  la función buscada. Demostremos una relación recurrente  $V(k+1) = V(k) + k + 1$ ,  $V(1) = 2$ . De aquí obtenemos de una vez

$$V(n) = 2 + (2 + 3 + \dots + n) = (n^2 + n + 2)/2.$$

Sean trazadas  $k$  rectas. Tracemos adicionalmente la  $(k+1)$ -ésima recta. Ésta se interseca con las demás en  $k$  puntos y se divide en  $k+1$  partes, cada una de las cuales pertenece a una parte nueva del plano. Por consiguiente,  $V(k+1) - V(k) = k + 1$ , lo que se trataba de demostrar.

1.58. Sea  $l$  el número de pares de rectas paralelas. Si  $l = 0 = k_2 = k_3 = k_4 = \dots = k_n$ , entonces  $k_2 = n(n-1)/2$ . Examinemos el vértice  $A$  de multiplicidad  $r$ . Si desplazamos un tanto todas las rectas que pasan por  $A$ , obtendremos  $r(r-1)/2 - 1$  nuevos puntos de intersección. Por consiguiente,

$$\frac{n(n-1)}{2} = l + \sum_{r=2}^n \frac{r(r-1)}{2} k_r.$$

De aquí

$$l = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{r=2}^n \frac{r(r-1)}{2} k_r.$$

1.59. Sea  $V(n)$  la función buscada. Si todas las rectas se intersecaran en dos y cualesquiera tres de ellas no se intersecaran en un punto, tendríamos, según el problema 1.57:

$$V(n) = 2 + 2 + 3 + \dots + n = n(n-1)/2 + 1 = (n^2 + n + 2)/2.$$

Un punto de multiplicidad  $r$  provoca la disminución del número de partes en una magnitud

$$(r^2 + r + 2)/2 - 2r = (r^2 - 3r + 2)/2.$$

Si no hay rectas paralelas, entonces

$$V(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} - \sum_{r=2}^n k_r \left( \frac{r^2 + r + 2}{2} - 2r \right).$$

Si hay  $l$  pares de rectas paralelas, entonces

$$V(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} - l - \sum_{r=2}^n k_r \left( \frac{r^2 + r + 2}{2} - 2r \right).$$

Haciendo uso del resultado obtenido para el problema 1.58, obtendremos

$$V(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2} - \frac{n^2 - n}{2} + \sum_{r=2}^n k_r \frac{r^2 - r}{2} - \\ - \sum_{r=2}^n k_r \frac{r^2 - 3r + 2}{2} = n + 1 + \sum_{r=2}^n (r-1) k_r.$$

Esta fórmula puede ser obtenida también por inducción.

1.60. Supongamos que ya se han trazado  $k - 1$  planos. Tracemos el  $k$ -ésimo plano. Éste se interseca con los planos trazados anteriormente a lo largo de  $k - 1$  rectas, las cuales lo dividen en  $(k^2 - k + 2)/2$  partes. Cada una de estas partes corresponde a la nueva parte del espacio. Por eso,  $n$  planos dividen el espacio en

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 2) = \frac{1}{6} (n+1)(n^2 - n + 6)$$

partes.

1.61. Supongamos que ya se han trazado  $k - 1$  planos. Tracemos el  $k$ -ésimo plano. Éste se interseca con los planos trazados anteriormente a lo largo de  $k - 1$  líneas. Dichas líneas se cortan en un punto  $A$  y dividen el  $k$ -ésimo plano en  $2(k - 1)$  partes. Cada una de las citadas partes corresponde a una nueva parte del espacio. Por eso, el número total de partes será  $2 + \sum_{s=2}^n 2(s - 1) = k^2 - k + 2$ .

1.62. El problema es análogo al problema correspondiente sobre las rectas en un plano,  $l = C_n^2 - \sum_{s=2}^n l_s C_s^2$ .

1.63. El número total de partes es igual, de acuerdo con el problema 1.60, a  $(n + 1)(n^2 - n + 6)/6$ . Cada terna de planos que no se cortan en un mismo punto provoca la disminución en 1. El número de tales ternas es igual a  $k = C_n^3 - \sum_{s=3}^n k_s C_s^3$ . Cada punto, perteneciente a  $s$  planos, da una disminución del número de partes en

$$(s + 1)(s^2 - s + 6)/6 - (s^2 - s + 2) = (s^3 - 6s^2 + 11s - 6)/6.$$

Por consiguiente, el número total de partes (si no hay planos paralelos) es igual a

$$\frac{1}{6} (n+1)(n^2 - n + 6) - \left( C_n^3 - \sum_{s=3}^n k_s C_s^3 \right) - \sum_{s=3}^n k_s \frac{s^3 - 6s^2 + 11s - 6}{6} = \\ = \frac{n^2 + n + 2}{2} + \sum_{s=3}^n k_s \frac{s^2 - 3s + 2}{2}.$$



## § 4. Problemas mixtos

1.64. Suele decirse que la permutación de un  $n$ -conjunto tiene la *especificación*  $(k_1 k_2 \dots k_n)$ , si contiene  $k_i$  elementos de la  $i$ -ésima clase ( $i = 1, \dots, n$ ).

a) Esto es el número de permutaciones del  $2n$ -conjunto que tiene la especificación  $(2^n)$ .

b) Esto es el número de permutaciones del  $3n$ -conjunto que tiene la especificación  $(3^n)$ .

c)  $(n^2)1(n!)^n$  es el número de permutaciones del  $n^2$ -conjunto que tiene la especificación  $(n^n)$ . Demostremos que este número se divide por  $n!$ . Partamos nuestro conjunto de permutaciones en clases de equivalencia empleando el siguiente procedimiento.

Dos permutaciones del  $n^2$ -conjunto de especificación  $(n^n)$  se llamarán *equivalentes*, si existe tal sustitución  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  que los lugares ocupados en la 1<sup>ra</sup> permutación por los elementos de la primera clase, en la segunda permutación estos lugares están ocupados por los elementos de la  $i$ -ésima clase; los lugares de la primera permutación ocupados por los elementos de la segunda clase, están ocupados en la segunda permutación por los elementos de la  $i_2$ -ésima clase, etc.

Es fácil comprobar que el conjunto de permutaciones lo hemos partido de este modo en clases de equivalencia y la potencia de cada una de estas clases es igual a  $n!$ , lo que nos lleva a la solución del problema.

d)  $(kl)/(k!)(k-1)!$  es el número de permutaciones del  $kl$ -conjunto que tiene la especificación  $(k^{k-1}1)$ .

e)  $(2n!)/(n!(n+1)!) = 4C_{2n-1}^n - C_{2n+1}^n$ , lo que demuestra que el resultado es de número entero.

1.65. Demostremos al principio el siguiente lema: para que un número de la forma  $x^2 + y^2$  se divida por 49, es necesario y suficiente que  $x$  e  $y$  se dividan por 7.

*Demostración.* La suficiencia es obvia. En efecto, si  $x$  e  $y$  se dividen por 7, entonces  $x^2$  e  $y^2$ , y, por tanto,  $x^2 + y^2$  se dividen por 49.

*Necesidad.* Supongamos que  $x^2 + y^2$  se divide por 49. Demostremos que tanto  $x$  como  $y$  se dividen por 7. Cada uno de los números  $x$  e  $y$  pueden escribirse en la forma

$$x = 7x_1 + \alpha, \quad y = 7y_1 + \beta, \quad (*)$$

donde  $x_1$  e  $y_1$  son números enteros no negativos, mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  tienen uno de los valores  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ . Teniendo presentes las igualdades (\*), la expresión  $x^2 + y^2$  puede escribirse del modo siguiente:

$$x^2 + y^2 = 49(x_1^2 + y_1^2) + 14(\alpha x_1 + \beta y_1) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Dado que, por hipótesis,  $x^2 + y^2$  se divide por 49, y, por tanto, se divide por 7, y, además, por 7 se dividen los dos primeros sumandos en el segundo miembro de la igualdad, llegamos a que  $\alpha^2 + \beta^2$  se divide por 7. El valor máximo que puede asumir la suma  $\alpha^2 + \beta^2$  es igual a 18. Entre los números enteros de 0 a 18 se dividen por 7 solamente 0, 7 y 14. Quiere decir, que la magnitud  $\alpha^2 + \beta^2$  es igual o bien a 0, o bien a 7, o bien a 14. Por cuanto los valores que pueden tomar  $\alpha$  y  $\beta$  son sólo de 0, 1, 4 y 9, es fácil de convencerse de que  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , puesto que la suma de dos sumandos formados de los números 0, 1, 4 y 9 no puede ser igual a 7 ó a 14. De este modo el lema queda demostrado.

Denotemos con  $n$  el número de los números enteros positivos que son inferiores a 1000 y que se dividen por 7. Es evidente que  $n$  es igual a la parte entera del número  $1000/7$ , es decir, a 142. En este caso el número de pares diferentes de números enteros  $x$  e  $y$  ( $x \neq y$ ) del 1 al 1000, para los cuales  $(x^2 + y^2)/49$  es un número entero, es igual a  $C_{142}^2 = 10011$ . Además, hay 142 pares más de la forma  $(x, x)$ . Por consiguiente, el número de pares diferentes  $(x, y)$  es igual a 10153.

1.66. Entre los números de una serie natural del 1 al  $n$  se tienen  $n - [n/p]$  números que no se dividen por  $p$ . De éstos se pueden formar  $C_{n-[n/p]}^h$  productos que no se dividen por  $p$ . El número total de productos será igual a  $C_n^h$ . Por consiguiente,  $N = C_n^h - C_{n-[n/p]}^h$ .

$$1.67. n \sum_{k=1}^{[(n-2)/2]} [k(n-k-2) + 1], \quad n \text{ es impar,}$$

$$n \sum_{k=1}^{(n-2)/2-1} [k(n-2-k) + 1] + \frac{n}{2} \left( \left( \frac{n-2}{2} \right)^2 + 1 \right), \quad n \text{ es par.}$$

1.68. Hay en total  $C_2^2 = 10$  rectas. De cada punto salen 6 perpendiculares. Examinemos dos puntos cualesquiera  $B$  y  $C$ . Por cuanto las perpendiculares, bajadas de los puntos  $B$  y  $C$  a la recta que une otros dos puntos  $D$  y  $E$ , no se intersectan, las perpendiculares bajadas de los puntos  $B$  y  $C$  tienen  $6 \times 6 - 3 = 33$  puntos de intersección. A partir de 5 puntos pueden formarse 10 pares. Por consiguiente, existen no más que 330 puntos de intersección. Pero algunos puntos los hemos contado varias veces. En efecto, cualesquiera tres puntos de los cinco dados forman triángulos. Las alturas de estos triángulos se cortan en un punto y este último se ha contado tres veces. Hay en total  $C_3^2 = 10$  de tales triángulos. Por consiguiente, el número máximo de puntos de intersección es igual a  $330 - 20 = 310$ .

1.69. Procedimiento 1. Unamos sucesivamente los puntos tomados en la circunferencia por medio de cuerdas. Calculemos en cuántas partes se divide por diagonales el polígono de  $n$  lados obtenido. Las diagonales se trazarán de una manera sucesiva. Notemos que, una vez trazada cada diagonal, el número de partes aumenta en un número que es en la unidad superior al número de puntos de intersección, los cuales aparecen luego de trazar las diagonales. Por eso, el número de partes, en las cuales las diagonales dividen el polígono, es igual a 1 (al principio teníamos una parte: todo el polígono) más el número de diagonales, más el número de puntos de intersección de las diagonales. El número de diagonales del polígono de  $n$  lados es  $n(n-3)/2$ . El número de puntos de intersección de las diagonales del polígono es igual a  $C_n^4$  (cada punto de intersección se define por cuatro vértices). Por consiguiente, el número de partes en las que se dividirá el círculo es  $N = 1 + n(n-3)/2 + C_n^4 + n$ .

Procedimiento 2. Supongamos que entre las partes obtenidas hay  $N_3$  triángulos,  $N_4$  cuadriláteros, etc.,  $N_m$  polígonos de  $m$  lados. Se debe hallar la suma  $N = N_3 + N_4 + \dots + N_m$ . Observemos que el número de todos los vértices obtenidos de los polígonos es igual a  $3N_3 + 4N_4 + \dots + mN_m$ . Este mismo número puede hallarse de un modo distinto: cada uno de los puntos de intersección de las diagonales del polígono de  $n$  lados (hay en total  $C_n^4$  de ellos) es un vértice de cuatro polígonos, y cada vértice del polígono de  $n$  lados es el vértice de  $n-2$  polígonos, por lo cual  $3N_3 + 4N_4 + \dots + mN_m = 4C_n^4 + n(n-2)$ . La suma de ángulos de todos los polígonos obtenidos es igual a  $[N_3(3-2) + N_4(4-2) + \dots + N_m(m-2)]\pi$ . Por otra parte, esta misma suma es igual a  $2\pi C_n^4 + (n-2)\pi$ , por lo cual  $N_3(3-2) + N_4(4-2) + \dots + N_m(m-2) = 2C_n^4 + (n-2)$ . De aquí,  $3N_3 + 4N_4 + \dots + mN_m - 2N = 2C_n^4 + n - 2$ , o bien

$$2N = 2C_n^4 + (n-2)(n-1), \quad N = C_n^4 + n(n-3)/2 + 1.$$

Así pues, el círculo queda dividido en  $N + n$  partes.

1.70. Dividamos 20 equipos en dos subgrupos, de 10 equipos cada uno, y en cada uno de los subgrupos realicemos un torneo según el sistema de rueda. Se jugarán en total  $N = C_{10}^2 + C_{10}^2 = 90$  partidos. Es evidente que el torneo realizado de esta manera satisface la hipótesis del problema. Demostremos que esto es el número mínimo de partidos. Supongamos que existe un torneo que satisface la hipótesis del problema y que  $N \leq 90$ . En tal caso existe un equipo

A que jugó con los demás equipos no menos de 9 partidos. Denotemos con  $K$  los equipos que jugaron con  $A$ , y con  $Y$  los que no jugaron. Es evidente que todos los  $Y$  equipos jugaron entre sí ( $C_K^2$  partidos). Supongamos que entre  $K$  equipos  $P$  pares no jugaron entre sí, y  $C_K^2 - P$ , sí jugaron. Entonces cualquier equipo de  $Y$  ha de jugar por lo menos con un equipo en cada uno de los citados  $P$  pares. Teniendo en cuenta que cualquier equipo pertenece a lo sumo a  $K - 1$  pares de  $P$ , concluimos que deben realizarse no menos de  $(19 - K)P / (K - 1)$  partidos entre  $K$  e  $Y$ . De este modo, se han jugado no menos de  $N = C_K^2 - P + (19 - K)P / (K - 1) + C_{19-K}^2 + K$  partidos. Considerando que  $K \leq 9$ , tenemos

$$N \geq K(K-1)/2 + (19-K)(18-K)/2 + K = K^2 - 18K + 9 \cdot 19 = (K-9)^2 + 90 \geq 90.$$

1.71. La probabilidad de que las torres no se capten una a la otra es mayor. Ella es igual a  $(64 \cdot 49) / (64 \cdot 63) = 49/63$ .

1.72. Supongamos lo contrario. Hay en total 10 rectas horizontales y verticales de este tipo. No es difícil notar que cada recta corta sin falta un número par de fichas de dominó. En efecto, veamos, por ejemplo, una línea horizontal. En la mitad superior, obtenida como resultado de la división del tablero por la recta citada, se contiene un número par de casillas (el ancho del tablero es de 6 casillas). Las fichas de dominó dispuestas íntegramente en esta parte (mitad superior) también ocupan el número par de casillas (cada ficha ocupa dos casillas). Además de éstas hay algunas casillas más ocupadas por las mitades de las fichas que cortan la recta. De este modo queda demostrado que el número de dichas casillas (es decir, el número de fichas cortadas por la recta) es la diferencia entre dos números pares, o sea un número par.

Así pues, cada una de las 10 rectas corta cierto número de fichas, es decir, al menos dos. Cada ficha se corta por una sola recta, por lo cual en el tablero deben haber no menos de 20 fichas. Por otra parte, está claro que se necesitan 18 fichas para cubrir el tablero.

La contradicción obtenida muestra que, cualquiera que sea la disposición de las fichas que cubren el tablero, existe al menos una recta de las 10 que no corta ninguna ficha de dominó.

1.73. Por encima de cada vertical de un tablero de ajedrez escribamos los números 1, 2, 3, ..., 8, y a la izquierda, cerca de cada horizontal, los números 0, 8, 16, 24, ..., 56; en este caso puede considerarse que en cada casilla del tablero está escrita la suma de dos números correspondientes a sus verticales y horizontales (fig. 1.1'). Por cuanto 8 torres dispuestas en el tablero de ajedrez no se captan una a la otra, cada vertical y cada horizontal contendrán obligatoriamente una torre. Quiere decir que en la suma de los números de aquellos escaques, donde se disponen las torres, figurarán una vez todos los números 1, 2, ..., 8, correspondientes a las diferentes verticales, y una vez todos los números 0, 8, 16, ..., 56, correspondientes a las diferentes horizontales. Por eso, la suma de los números tendrá siempre un mismo valor:  $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 0 + 8 + 16 + \dots + 56 = 260$ .

1.74. El número de rectángulos de dimensión  $i \times j$  es igual a  $(n - i + 1) \times (n - j + 1)$ . Todo rectángulo se cuenta en la suma tantas veces como es su área. De aquí la suma será

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n-i+1)(n-j+1)ij = \left( \sum_{i=1}^n (n-i+1)i \right)^2 = \left( \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \right)^2.$$

1.75. La cápsula convexa de cinco puntos en un plano, mencionados en el problema, puede tener la forma de un pentágono, un cuadrilátero o un triángulo; en los primeros dos casos la afirmación es evidente. En cuanto al último caso, hay que constatar que en el interior del triángulo resulta haber dos puntos

(fig. 1.2'). Tracemos por éstos una recta y dividamos el triángulo en dos partes. En virtud del principio de Dirichlet, en una de las partes caerán dos vértices. Los últimos forman, junto con dos puntos interiores, el cuadrilátero que se busca.

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8
8	8+1							8+8
16	16+1	16+2						16+8
24								24+8
32								
40								
48								
56	56+1	56+2	56+3	...	...			56+8

Fig. 1.1'.

1.76. Por cuanto durante el paseo se encuentran  $n$  cruces y en cada una de ellas se tienen sólo dos posibilidades, entonces tendremos en total  $2^n$  caminos. En el  $k$ -ésimo cruce de la  $n$ -ésima fila podemos llegar empleando  $C_n^k$  rutas. De este modo, la probabilidad buscada es igual a  $p = C_n^k/2^n$ .

1.77. *Indicaciones.* El número de rutas que llevan a la  $n$ -ésima fila de cruces se compara con el número de rutas que llevan a la  $(n+1)$ -ésima fila.

1.78. La raíz de la ecuación  $ax = b$  es superior a uno a condición de que  $b > a$ . Examinemos los parámetros  $a$  y  $b$ , tomándolos por coordenadas cartesianas rectangulares de un punto del plano (fig. 1.3'). Por cuanto  $a$  y  $b$  son naturales, entonces  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Por eso el número de todos los resultados posibles es igual a  $mn$ .

Si  $m \leq n$ , el número de resultados no favorables para el suceso en consideración será igual a  $1 + 2 + \dots + (m-1) + m = (m+1)m/2$ . Por eso, al suceso que se considera favorecen  $mn - m \times (m+1)/2$  casos posibles, es decir,  $m(2n - m - 1)/2$ . Por eso la probabilidad se halla de la fórmula  $p = (2n - m - 1)/(2n)$ .

Si  $m > n$ , el número de resultados que favorecen al suceso en consideración será igual a  $1 + 2 + \dots + (n-1) = (n-1)n/2$ , por consiguiente,  $p = (n-1)/(2m)$ .

1.79. A cada determinado trayecto del camino le corresponde una «palabra» que consta de  $m$  letras  $a$  y  $n$  letras  $b$ , y viceversa. Por ejemplo, la «palabra»  $aabbabb$  significa que el camino consta de dos unidades por la horizontal, tres unidades por la vertical, una unidad por la horizontal y dos unidades por la vertical, a consecuencia de lo cual se alcanza el punto  $(m, n)$  (en este caso  $m = 3$ ,  $n = 5$ ). Mas, evidentemente, a partir de las letras  $a$  y  $b$ , de las cuales la primera interviene  $m$  veces y la segunda,  $n$  veces, pueden formarse  $C_{m+n}^m = (m+n)!/$

$/(m!n!)$  «palabras» que serán precisamente el número buscado de caminos diferentes.

1.80. Supongamos que el lado  $AB$  es vertical y contiene  $m$  segmentos y que el lado  $AD$  es horizontal y contiene  $km$  segmentos. Los caminos que tienen por comienzo el segmento  $AB_1$  ( $AD_1$ ), los llamaremos brevemente caminos del tipo  $AB$  (del tipo  $AD$ , respectivamente).

Tomemos un camino del tipo  $AD$ . Marquemos en éste uno de los segmentos verticales  $MN$  y traslademos todo el trozo  $D_1 \dots M$  en un retículo hacia arriba y a la derecha; obtendremos el trozo  $B_1M$ . A todo camino  $AD_1 \dots MN \dots C$  con el segmento vertical marcado  $MN$  pongámosle en correspondencia el camino  $AB_1 \dots M_1N \dots C$  con el segmento horizontal marcado  $M_1N$ . Tal correspondencia es biunívoca. Supongamos que existen en total  $b$  caminos del tipo  $AB$  y  $d$  caminos del tipo  $AD$ . Por cuanto en cada camino se tienen  $m$  segmentos verticales y  $km$  horizontales, entonces existen  $bkm$  caminos del tipo  $AB$  con

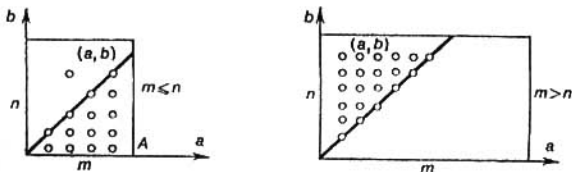


Fig. 1.3'.

el segmento horizontal marcado y  $dm$  caminos del tipo  $AD$  con el segmento vertical marcado. Según lo demostrado más arriba estos números son iguales, es decir,  $bkm = dm \Rightarrow bk = d$ .

1.81. Dividamos toda clase de rutas en dos grupos: las que pasan por el punto  $C$  y las que pasan por el punto  $D$ . No existen otros métodos para llegar al punto  $B$ . De  $A$  a  $C$  se puede llegar empleando cinco métodos, y de  $C$  a  $B$ , sólo utilizando un método. Por consiguiente, el primer grupo consta de  $5 \times 1$  rutas. De  $A$  al punto  $D$  se puede llegar a través de  $E$  o a través de  $F$ . De  $A$  e  $E$  podemos llegar empleando tres métodos, y de  $A$  a  $F$ , empleando dos métodos. Así, pues, de  $A$  a  $D$  podemos llegar empleando  $3 + 2 = 5$  métodos. Pero, de  $D$  a  $B$  se puede llegar por dos métodos y, por tanto, de  $A$  a  $B$ , llevan, a través de  $D$ ,  $5 \times 2 = 10$  rutas. De este modo, el número total de toda clase de rutas que llevan desde el punto  $A$  hasta el  $B$ , evitando el punto  $M$ , es igual a 15.

1.82. Si el punto  $A$  está elegido, entonces los dos vértices restantes del triángulo,  $B$  y  $C$ , pueden ser elegidos empleando 28 ( $8 \times 7/2$ ) métodos. Sin

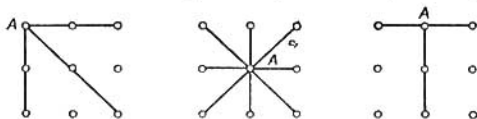


Fig. 1.4'.

embargo, en este caso puede ocurrir que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  resulten estar en una misma recta. El número de casos, cuando esto sucede, depende de la disposición del punto  $A$  (fig. 1.4'). Si  $A$  es un punto anguloso, se deben excluir tres pares de puntos  $B$  y  $C$ ; si  $A$  es un punto central, se deben excluir cuatro pares de puntos  $B$  y  $C$ , y para las posiciones restantes del punto  $A$ , dos pares de puntos  $B$  y  $C$ .

De este modo, el número total de triángulos depende de la posición del punto  $A$  y es igual a 24, 25 ó 26.

1.83. 1) Cada par de miembros de la comisión pudo encontrarse no más que en una sesión. En cada sesión hubo  $10 \times 9/2$  pares de hombres. Se trata en total de 40 reuniones, es decir, en total eran por lo menos 1800 pares de miembros de la comisión. Pero, de 60 hombres se pueden formar sólo  $60 \times 59/2 < 1800$  pares.

2) Supongamos que el número total de miembros de la comisión  $N$  no es superior a 60; entonces, por cuanto  $10 \times 40/N > 6$ , se encontrará un hombre que asistió por lo menos a siete sesiones. Todos aquellos hombres con los cuales él se encontraba son distintos y su cantidad total se calcula como  $7 \times 9 > 60$ , lo que contradice nuestra suposición.

1.84. El requisito de que ningún par de comisiones tengan más de un miembro común es equivalente a que ningún par de colaboradores intervenga más que en una comisión. El número de todos los pares es igual a  $25 \times 24/2 = 300$ , el número de pares en una comisión es igual a  $5 \times 4/2 = 10$ . El número máximo posible de miembros de la comisión es igual a  $300/10 = 30$ .

1.85. El valor máximo posible de  $C_1$  es 24. Si los primeros puestos se otorgaron a un deportista (por todos los nueve jueces), entonces  $C_1 = 9$ . Si los primeros puestos se otorgaron a dos deportistas en total, entonces uno de ellos obtuvo no menos de cinco primeros puestos, y los demás cuatro puestos obtenidos por él no son superiores al cuarto; por eso,  $C_1 \leq 5 \times 1 + 4 \times 4 = 21$ . Si los primeros puestos fueron obtenidos por tres deportistas, entonces, dado que los puestos restantes obtenidos por ellos no son superiores al cuarto (y hay en total 10 cuartos puestos), la suma de todos estos puestos de los tres deportistas citados no sobrepasa de  $1 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 72$ . Por consiguiente, al menos uno de los deportistas tiene una suma de puestos no superior a 24, es decir,  $C_1 \leq 24$ . Si tales deportistas, son cuatro, la suma de sus puestos no será superior a  $1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 9 + 4 \times 9 = 90$ , por lo cual, la suma de puntos de algunos de ellos no es superior a 22.

El caso en que los primeros puestos son obtenidos por cinco y más hombres no es posible, puesto que para ellos faltan los puestos del 1 al 4 (hay en total  $9 \times 4 = 36$  de tales puestos).

He aquí un caso en que  $C_1 = 24$ : cada uno de los tres mejores deportistas obtiene los puestos 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4; los dos siguientes: 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5 y 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, etc.

1.86. En un mismo poste puede haber dos números, cuando y sólo cuando la suma de ellos es igual a 999. Por eso, si analizamos un poste, en el cual hay sólo dos cifras diferentes, entonces, en el caso de que una de las cifras sea  $C$ , la otra será obligatoriamente  $9 - C$ . Hay en total  $2^3 = 8$  postes, en los cuales están marcados números expresados con las cifras  $C$  y  $9 - C$  (en cada uno de los primeros tres lugares puede haber una cifra:  $C$  ó  $9 - C$ ); existen en total 5 pares posibles de cifras ( $C, 9 - C$ ). Por eso, el número de todos los postes, en los cuales hay sólo dos cifras diferentes, es igual a 40.

1.87. Es obvio que el empate lo darán 9 números de cifras iguales (no hay el número 0000). Supondremos por eso que el número de «empates» tiene por lo menos dos cifras diferentes  $a$  y  $b$ ; sean  $c$  y  $d$  las cifras restantes del número. Entonces, por definición del número de «empates», las diferencias  $(b + d) - (a + c)$  y  $(b + c) - (a + d)$  tienen, como última cifra, el 0, por lo cual 0 también será la última cifra de su suma  $2(b - a)$ . Por cuanto  $b \neq a$ ,  $a$  y  $b$  se diferencian en 5. De este modo, cualesquiera dos cifras distintas del número difieren en 5. Por eso, si prefijamos una cifra, por ejemplo,  $a = 1$ , las demás cifras se definirán de una manera unívoca. En el caso dado éstas serán 1 y 6. Es fácil convencerse de que realmente los números de «empate» serán aquellos que constan de dos pares de cifras iguales. Con las cifras 1 y 6 habrá 6 tales números: 1166, 1616, 1661, 6161, 6611, 6116. Seis números pueden formarse de las cifras 2 y 7; 3 y 8; 4 y 9; 0 y 5. De este modo, la cantidad total de los números de «empate» será igual a 39 ( $6 \times 5 + 9 = 39$ ).

1.88. Está claro que el tiempo de coloración será mínimo, si se logra dis-

tribuir el trabajo de un modo tal que cada cinco segundos se pinten el número máximo de caras, es decir, tres. Esto se consigue, evidentemente, mediante varios métodos. Por ejemplo, los primeros 183 cubos se pintan por cada hombre totalmente, a continuación, mientras dos pintan por completo un cubo cada uno, el tercer hombre pinta dos caras de los tres cubos restantes, y, por fin, todos los tres pintan cuatro caras cada uno de tres cubos. En este caso tres hombres cumplen todo el trabajo en el transcurso de  $188 \times 5 \times 6/3 = 1880$  segundos.

1.89. Por cuanto ambos equipos contaban con un número igual de participantes, el número de todos los participantes es par. La suma máxima de tantos puede ser obtenida por 16 participantes y es igual a  $16 \times 9 = 144$  ( $144 < 156$ ), mientras que la suma mínima de tantos puede obtenerse por 20 participantes y ser igual a  $20 \times 8 = 160$  ( $156 < 160$ ). Se debe comprobar, además, que 18 participantes pueden obtener en suma 156 tantos, es decir, existen los números naturales  $x$  e  $y$  que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$x + y = 18, \quad 9x + 8y = 156.$$

La solución existe y es, además, única:  $x = 12$ ,  $y = 6$ .

1.90. Es fácil ver que para formar un cuadrado se necesitan no menos de siete palos. Por eso no se puede formar un cuadrado con un lado inferior a 7 cm. Por otra parte, la suma de las longitudes de todos los palos es igual a 45 cm, y, por eso, a partir de ellos resulta imposible formar un cuadrado cuyo lado sea superior a 11 cm. A partir de los palos del juego dado se pueden formar segmentos con una longitud de 7, 8, 9, 10, 11 cm mediante los siguientes métodos:

$$\begin{aligned} 7 &= 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 \\ 8 &= 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3, \\ 9 &= 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4 \\ 9 + 1 &= 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4, \\ 9 + 2 &= 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5. \end{aligned}$$

Por consiguiente, a partir del juego dado de palos pueden formarse, empleando un solo método ( $C_7^4$ ), cuadrados con lados de 7, 8, 10, 11 cm y empleando cinco métodos ( $C_8^4 = C_9^4$ ), un cuadrado de 9 cm de lado.

1.91. El número de toda clase de métodos para aprobar los exámenes es igual a  $C_{10}^3 = 10$ . Por eso, si no se encontraran cinco estudiantes que aprobaron los exámenes con iguales resultados, el número de estudiantes no sobrepasaría de  $4 \times 10 = 40$ , lo que no tiene lugar.

1.92. Hace falta hallar la posibilidad de que al distribuir 41 hombres entre 6 grupos se realice una de estas posibilidades. Con este fin basta encontrar el número total de tales distribuciones. Supongamos que los grupos están numerados. Entonces, cada método de distribución consiste en que del conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6 de números de grupos tomamos el número 41: el número de unidades tomadas en este caso corresponde al número de estudiantes en el primer grupo, etc. Dicho de otro modo, el número de métodos de distribución es exactamente igual al número de combinaciones con repetición de 6 elementos tomados de a 41, el cual es igual a  $C_{6+41-1}^{41} = C_{46}^4$ . Por eso la probabilidad buscada es igual a  $6/C_{46}^4 = 1/228\,459$ .

1.93. Calculemos la cantidad de números desde 0 hasta 999999 en cuya notación no hay unidades, es decir, cuántos números de seis cifras pueden componerse empleando las cifras 0, 2, 3, 4, ..., 9 (si el número tiene menos de seis cifras, convengamos en agregarle por la izquierda el número de ceros que le falta). En el primer lugar en tal número puede figurar cualquiera de las nueve cifras, a cada una de ellas podemos agregar por la derecha cualquiera de las mismas nueve cifras: 0, 2, 3, 4, ..., 9; así pues, se obtendrán 81 números de dos cifras a partir de las cifras 0, 2, 3, 4, ..., 9. Continuando de esta manera, obtendremos  $9^6$  números de seis cifras, de los cuales se debe excluir 000000. Se ha mostrado, pues, que entre el primer millón existen exactamente  $9^6 - 1$  números, en cuya notación no hay unidades, es decir,  $9^6 - 1 = 531\,371$ .

De este modo, entre el primer millón hay más números en cuya notación faltan las unidades.

1.94. La oración final, de la cual no se puede tachar ni una palabra, es «cuatro caminantes estuvieron esperando a que cesara la tormenta» y por lo tanto de la oración inicial es necesario tachar 6 palabras. Estas palabras se pueden tachar en cualquier orden, a excepción de una limitación: no se puede tachar la palabra «se desató» antes que la palabra «súbitamente». Así pues, el problema se reduce a lo siguiente: ¿de cuántas formas diferentes se pueden poner en fila 5 objetos, para que el primero siempre esté antes que el segundo? Este problema se resuelve fácilmente: la cantidad de procedimientos que existen para disponer los cinco objetos en fila es igual a  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ , y de ellos justamente la mitad, es decir 60, satisfacen la condición indicada. Se puede llegar a la oración final, de la cual no se puede tachar ni una palabra, mediante 60 procedimientos.

1.95. El número de toda clase de posiciones en el tablero de ajedrez es finito. Supongamos que es igual a  $n$ . Por consiguiente, una de las posiciones se repite un número infinito de veces. Más aún, existen sucesiones de jugadas de longitud tan grande como se quiera, las cuales se repetirán no menos de dos veces. En efecto, el número de sucesiones de las posiciones de longitud  $m$  no sobrepasa de  $n^m$ . Por consiguiente, una de las sucesiones se repite un número infinito de veces.

1.96. Los números  $x$  e  $y$  no pueden ser ambos primos, puesto que en este caso no se cumple la condición 1. De acuerdo con la hipótesis de Goldbach, todo número par es una suma de dos números primos. Por consiguiente,  $x + y$  no es un número par, pues, en el caso contrario no se cumple la condición 2. Ahora, si  $x + y > 53$ , resulta posible la variante  $x = 53$  e  $y = (x + y) - 53$ ; en este caso no se cumple la condición 1, puesto que si en el producto  $xy$  figura un factor simple superior a 50, la respuesta para  $A$  es unívoca.

Si  $x + y$  se representa por dos modos diferentes en la forma  $2^k + p$ , donde  $p$  es un número primo, en este caso se cumplen las condiciones 1-3 y no se cumple la condición 4.

Quedan para el número  $x + y$  las siguientes variantes: 5, 17, 29, 41, 53, 47. Por la comprobación inmediata nos convencemos de que la única solución la dan los números  $x = 13$  e  $y = 4$ .

1.97. Sea  $m$  un número natural arbitrariamente prefijado. Dividamos la fracción infinita dada en segmentos de tal modo que cada uno contenga  $m$  cifras. Habrá una infinidad de tales segmentos. Por otra parte, el número de sistemas de  $m$  cifras es igual al número de  $m$ -muestras ordenadas del (10)-conjunto,  $A_{(10)}^m = 10^m$ , es decir, un número finito. Por consiguiente, al menos uno de estos sistemas ha de repetirse un número infinito de veces.

1.98. Los números de la sucesión 1, 2, ...,  $n$  que se dividen por  $p^k$  deben tener la forma  $lp^k \leq n$ , de suerte que  $l \leq n/p^k$ , y, por consiguiente, la cantidad de tales números es igual a  $n/p^k$ . De aquí se obtiene la fórmula requerida.

De este problema se deduce que los coeficientes binomiales  $p(n_1, \dots, n_k) = n!/(n_1! \dots n_k!)$  son, por supuesto, números enteros, si calculamos cuántas veces el número primo  $p$  figura en el denominador y en el numerador y si hacemos uso de la siguiente desigualdad

$$[x + y] \geq [x] + [y].$$

En el caso general resulta válido el siguiente teorema: sean dos sistemas de formas lineales:

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k, \quad g_l(x_1, \dots, x_n) = \\ = \sum_{k=1}^n b_{lk}x_k, \quad l=1, \dots, p; \quad j=1, \dots, m,$$



con coeficientes enteros no negativos  $a_{ik}, b_{ik}$ . Para que la expresión

$$\frac{f_1(x_1, \dots, x_n)! f_2(x_1, \dots, x_n)! \dots f_m(x_1, \dots, x_n)!}{\prod_{i=1}^p g_i(x_1, \dots, x_n)!}$$

sea un número entero para cualquier sistema de valores enteros no negativos  $x_1, \dots, x_n$ , es necesario y suficiente que en todo el dominio  $0 \leq y_1 \leq 1, \dots, 0 \leq y_n \leq 1$  de valores de las variables  $y_1, \dots, y_n$  se satisfaga la desigualdad

$$\sum_{i=1}^m [f_i(y_1, \dots, y_n)] \geq \sum_{i=1}^p [g_i(y_1, \dots, y_n)].$$

1.99. Del problema 1.98 proviene que la potencia máxima del número 5 que divide el número  $3!!! = 720!$  es

$$\left[ \frac{720}{5} \right] + \left[ \frac{720}{25} \right] + \left[ \frac{720}{125} \right] + \left[ \frac{720}{625} \right] = 144 + 28 + 5 + 1 = 178,$$

y la potencia máxima del número 2 que divida  $720!$  será aún mayor, puesto que ya  $720/2 = 360$ . De aquí se deduce que el número  $3!!!$  tiene en el extremo 178 ceros.

1.100. Demostremos la fórmula recurrente  $N = N(n) = \{N(n-1) + 2\}_n$  donde la expresión encerrada entre las llaves significa el residuo positivo mínimo según el módulo  $n$ . En efecto, si se sabe  $N(n-1)$ , entonces para hallar  $N(n)$  se debe agregar un número y cambiar la numeración de tal modo que el segundo número tachado en la nueva numeración resulte ser el número 2 en la numeración antigua. Entonces está claro que el número  $N(n-1)$  en la nueva numeración representará el número  $\{N(n-1) + 2\}_n$  y será el último número no tachado.

Sea  $n_0 = 1, n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_s < \dots$  es una sucesión de números naturales, para los cuales se verifica la igualdad  $N(n_s) = 1$ . Entonces, de la fórmula recurrente se desprenden las siguientes relaciones:  $N(n) = N(n_{s-1}) + 2(n - n_{s-1})$ , siempre que  $n_{s-1} < n < n_s$ , y  $N(n_{s-1}) + 2(n_s - n_{s-1}) = n_s + N(n_s)$ . De aquí obtenemos inmediatamente  $n_s = 2n_{s-1} = 2^s$  y  $N(n) = 2n - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$ , lo que se trataba de demostrar.

# MÉTODO DE FUNCIONES GENERATRICES

## § 1. Funciones generatrices: propiedades y operaciones

$$2.1. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}.$$

$$2.2. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^N (n+1) z^n = \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{N+1} z^n \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{1-z^{N+2}}{1-z} \right) =$$

$$= \frac{1-(N+2)z^{N+1} + (N+1)z^{N+2}}{(1-z)^2}.$$

$$2.3. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)(n+2) z^n = \frac{d^2}{dz^2} \left( \sum_{n=0}^{N+1} z^n \right) =$$

$$= \frac{d}{dz} \left[ \frac{1-(N+2)z^{N+1} + (N+1)z^{N+2}}{(1-z)^2} \right] =$$

$$= \frac{2-(N+2)(N+1)z^N + 2N(N+2)z^{N+1} - (N+1)^2 z^{N+2}}{(1-z)^3}.$$

$$2.4. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

$$2.5. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n = \frac{1}{1-\alpha z}.$$

$$2.6. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha n z^n = \alpha z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = \alpha z \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) =$$

$$= \frac{\alpha z}{(1-z)^2}.$$

$$2.7. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n[(n-1)+1] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} + z \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) + z \frac{d}{dz} \times$$

$$\times \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{1-z} \right) + z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-z} \right) = z^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(1-z)^2} \right) + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2z^2 + z - z^2}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

$$2.8. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} (nz^{n-1}) = z \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} \frac{d}{dz} z^n = z \frac{d}{dz} \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} z^n \right) = z \frac{d}{dz} g^*(z),$$

donde  $g^*(z)$  es una función generatriz de la sucesión  $g(n) = n^{k-1}$ .

$$2.9. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n (\alpha z)^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} = t \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) = t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1-t} \right) = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}.$$

$$2.10. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^n \alpha^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^n (\alpha z)^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p-1)!}{n! (p-1)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p(p+1) \dots (p+n-1) t^n.$$

Esto es el desarrollo en serie de Taylor en el entorno del cero:

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

En nuestro ejemplo  $f^{(n)}(0) = p(p+1) \dots (p+n-1)$ ,  $f^{(n+1)}(0) = (p+n)f^{(n)}(0)$ . El coeficiente de la derivada es un producto de números seguidos, si se diferencia la potencia de cierta expresión. Es necesario aclarar, si es positiva o negativa dicha potencia. Si la potencia es positiva, cada factor sucesivo será inferior al antecedente:

$$d^k x^n / dx^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) x^{n-k}.$$

Si la potencia es negativa, tendremos un aumento de los factores en su valor absoluto:  $d^k x^{-n} / dx^k = (-n)(-n-1)(-n-2) \dots (-n-k+1) x^{-(n+k)} = (-1)^k n(n+1)(n+2) \dots (n+k-1) x^{-(n+k)}$ . Este segundo caso coincide con el nuestro con una exactitud de hasta el factor  $(-1)^k$ . El citado factor puede convertirse en 1 a cuenta de la diferenciación del denominador. Esto significa que la función tiene por expresión  $f(t) = 1/(a-t)^\alpha$ . En tal caso  $f'(0) = p \Rightarrow \alpha = p$ ,  $f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^p} = 1 \Rightarrow a = 1$ . De este modo,

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^p} = \frac{1}{(1-\alpha z)^p} = f^*(z).$$

$$\begin{aligned}
 2.11. f^*(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+p-2}^{n-1} \alpha^n z^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+p-2)!}{(n-1)! (p-1)!} t^n = \\
 &= t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)+p-1]!}{(n-1)! (p-1)!} t^{n-1} \stackrel{n-1=h}{=} t \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+p-1)!}{h! (p-1)!} t^h = t \frac{1}{(1-t)^p} = \\
 &= \frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^p}.
 \end{aligned}$$

$$2.12. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}.$$

Esto coincide con el desarrollo de la función  $\ln(1+x)$ , mas está ausente la alternación de los signos. Para que el desarrollo tenga el mismo signo, resulta suficiente tomar  $x = -t$ . Entonces  $F(x) = F(-t) = \ln(1-t) = -(t/1 + t^2/2 + t^3/3 + \dots + t^n/n + \dots)$ . De aquí se ve que

$$f^*(z) = -F(-t) = -\ln(1-t) = -\ln(1-\alpha z).$$

$$2.13. f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha z)^n}{n!} = e^{\alpha z} - 1.$$

$$2.14. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2h+1}}{(2h+1)!} z^{2h+1}.$$

Introduzcamos las funciones auxiliares  $\alpha(n) = \alpha^n/n!$  y  $\beta(n) = (-\alpha)^n/n!$ . Entonces  $f(n) = [\alpha(n) - \beta(n)]/2$ . Al sustituir esto en la suma, obtendremos

$$\begin{aligned}
 f^*(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha(n) - \beta(n)] z^n = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) z^n \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n z^n}{n!} \right] \stackrel{t=\alpha z}{r=-\alpha z} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} (e^t - e^r) = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{2} = \text{sh}(\alpha z).
 \end{aligned}$$

2.15.  $f(n) = [\alpha(n) + \beta(n)]/2$ , donde  $\alpha(n) = \alpha^n/n!$ ,  $\beta(n) = (-\alpha)^n/n!$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 f^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha(n) + \beta(n)] z^n = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) z^n \right] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n z^n}{n!} \right] \stackrel{t=\alpha z}{r=-\alpha z} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \right] = \frac{e^t + e^r}{2} = \text{ch}(\alpha z).
 \end{aligned}$$

$$2.16. f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(\alpha n) z^n.$$

Introduzcamos la función  $\psi(\alpha) = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$  y analicemos

$$\begin{aligned} F(z, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi^n(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos \alpha n + i \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{sen} \alpha n; \end{aligned}$$

por otra parte,

$$F(z, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [z\psi(\alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}.$$

Se puede notar que

$$\begin{aligned} f^*(z) &= \frac{1}{2i} [F(z, \alpha) - F(z, -\alpha)] = \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(1-z \cos \alpha) - iz \operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{(1-z \cos \alpha) + iz \operatorname{sen} \alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1 - z \cos \alpha + iz \operatorname{sen} \alpha - 1 + z \cos \alpha + iz \operatorname{sen} \alpha}{1 - 2z \cos \alpha + z^2 \cos^2 \alpha + z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{z \operatorname{sen} \alpha}{1 - 2z \cos \alpha + z^2}. \end{aligned}$$

2.17. Introduzcamos la función  $\psi(\alpha) = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ . Demos a conocer también otra función auxiliar

$$\begin{aligned} F(z, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(\alpha) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} [\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha]^n z^n = \frac{1 - z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{1 - z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \\ &= \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F(z, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} [z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname{sen} n\alpha. \end{aligned}$$

En tal caso podemos observar que

$$\begin{aligned} f^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha n z^n = \frac{1}{2} [F(z, \alpha) - F(z, -\alpha)] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-z(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} + \frac{1}{1-z(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1-z \cos \alpha) - iz \operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{(1-z \cos \alpha) + iz \operatorname{sen} \alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(1-z \cos \alpha)}{1 - 2z \cos \alpha + z^2 \cos^2 \alpha + z^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1 - z \cos \alpha}{1 - 2z \cos \alpha + z^2}. \end{aligned}$$

$$2.18. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\lfloor n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) z^{n-1} = z \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k = z f^*(z),$$

$$F^*(z) = z f^*(z).$$

$$2.19. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} f(k) z^k = \frac{1}{z} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^k - f(0) \right] = \frac{f^*(z) - f(0)}{z}.$$

$$2.20. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) z^n = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) z^{n+k} = \frac{1}{z^k} \sum_{i=h}^{\infty} f(i) z^i = \frac{1}{z^k} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^i - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) z^r \right] = z^{-k} f^*(z) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r) z^{r-k}.$$

$$2.21. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \alpha^n z^n \stackrel{t=\alpha z}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) t^n = f^*(t) = f^*(\alpha z).$$

$$2.22. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) z^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} [f(n) z^n] = z \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n \right) = z \frac{d}{dz} f^*(z).$$

$$2.23. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n f(i) z^n = f(0) (1+z+\dots) + f(1) (z+z^2+\dots) + f(2) (z^2+z^3+\dots) = \frac{f(0)}{1-z} + f(1) \frac{z}{1-z} + f(2) \frac{z^2}{1-z} + \dots = \frac{1}{1-z} \times \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \frac{f^*(z)}{1-z}.$$

$$2.24. F^*(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (n-k) z^n = z^k \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k) z^{n-k} \stackrel{i=n-k}{=} z^k \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^i = z^k f^*(z).$$

$$2.25. F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f(n+1) - f(n)) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = \frac{f^*(z) - f(0)}{z} - f^*(z) = \frac{(1-z) f^*(z) - f(0)}{z}.$$

$$\begin{aligned}
 2.26. F^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n f(r) g(n-r) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n f(r) z^r g(n-r) z^{n-r} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [f(0)g(n)z^n + f(1)zg(n-1)z^{n-1} + \dots + f(n)z^n g(0)] = f(0) \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^n + \\
 &+ f(1)z \sum_{n=1}^{\infty} g(n-1)z^{n-1} + \dots + f(k)z^k \sum_{n=h}^{\infty} g(n-k)z^{n-h} + \dots = f(0)g^*(z) + \\
 &+ f(1)zg^*(z) + \dots = g^*(z) \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n = g^*(z)f^*(z).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.27. F^e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n-1)}{n!} n \int_0^z t^{n-1} dt = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n-1)}{(n-1)!} \int_0^z t^{n-1} dt = \int_0^z \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n-1)}{(n-1)!} t^{n-1} \right) dt = \int_0^z \left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(r)}{r!} t^r \right) dt = \\
 &= \int_0^z f^e(t) dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.28. F^e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{(n+1)!} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{(n+1)!} \times \\
 \frac{dz^{n+1}}{dz} &= \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{(n+1)!} z^{n+1} + f(0) - f(0) \right] = \frac{d}{dz} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f(h)}{h!} z^h - \frac{d}{dz} f(0) = \\
 &= \frac{d}{dz} f^e(z).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.29. F^e(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nf(n)}{n!} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} n z^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} \frac{dz^n}{dz} = \\
 &= z \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n \right) = z \frac{d}{dz} f^e(z).
 \end{aligned}$$

$$2.30. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n f(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} (\alpha z)^n = f^e(\alpha z).$$

$$\begin{aligned}
 2.31. F^e(z) &= \sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k)}{n!} z^n = \sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k) z^n}{(n-k)! (n-k+1) \dots (n-1) n} = \\
 &= \sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k)}{(n-k)!} \int_0^z \int_0^z \dots \int_0^z t^{n-h} dt = \int_0^z \dots \int_0^z \left( \sum_{n=h}^{\infty} \frac{f(n-k)}{(n-k)!} t^{n-h} \right) dt = \\
 &= \int_0^z \dots \int_0^z f^e(t) dt.
 \end{aligned}$$

$$2.32. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n+1)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n = \\ = \frac{d}{dz} f^e(z) - f^e(z).$$

$$2.33. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^n C_n^r \frac{f(n-r)g(r)}{n!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \left( \frac{f(n-r)}{(n-r)!} z^{n-r} \right) \times \\ \times \left( \frac{g(r)}{r!} z^r \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{g(h)}{h!} z^h = f^e(z) g^e(z).$$

$$2.34. F^e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h_1, \dots, h_m \geq 0} \left( \frac{f_1(k_1)}{k_1!} z^{h_1} \right) \dots \dots \\ \dots \left( \frac{f_m(k_m)}{k_m!} z^{h_m} \right) = \left( \sum_{h_1=0}^{\infty} \frac{f_1(k_1)}{k_1!} z^{h_1} \right) \dots \left( \sum_{h_m=0}^{\infty} \frac{f_m(k_m)}{k_m!} z^{h_m} \right) = \\ = f_1^e(z) \dots f_m^e(z).$$

2.35. En el primer caso tenemos: para  $|x| < 1$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-n}{h} (-x)^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} (-x)^h = \\ = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} x^h = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^h.$$

De este modo,  $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^h$  es una función generatriz de las combinaciones con repetición ilimitada de los elementos y sin restricciones del número de apariciones de un elemento de cualquier tipo. Luego,

$$\frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^h = \\ = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^{h+n} = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} x^r = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r,$$

es decir,  $\frac{x^n}{(1-x)^n} = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r$  es la función generatriz de las combinaciones con repetición ilimitada de los elementos, siempre que exista una condición adicional de que en la combinación figura al menos un elemento de cada tipo.



2.36. Tenemos

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha^{hj}} A(\alpha^j z) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha^{hj}} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{lj} a_l z^l = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l \sum_{j=1}^n \alpha^{(l-h)j}. \quad (2.2')$$

Hagamos uso del resultado conocido consistente en que

$$\sum_{j=1}^n \alpha^{(l-h)j} = \begin{cases} n, & l \equiv h \pmod{n}, \\ 0, & l \not\equiv h \pmod{n}. \end{cases}$$

En este caso el segundo miembro de (2.2') se reducirá a la función generatriz  $nA_n^{(h)}(z)$ , lo que demuestra (2.2).

2.38. Por cuanto  $C_{n+1}(z) = (1+z)^{n+1} = (1+z)C_n(z)$ , la relación a) se deduce, por ejemplo, del resultado del problema 2.26 sobre la convolución de dos sucesiones. Las identidades b) y c) se deducen de (2.3), si ponemos  $z = 1$  y  $z = -1$ , respectivamente. Con el fin de demostrar la identidad de Vandermonde, supongamos que  $m = 1, \dots, n-1$ . Podemos escribir  $(1+z)^n = (1+z)^{n-m}(1+z)^m$ , y, entonces, d) se deduce de nuevo del problema 2.26 sobre la convolución.

Observemos que la relación recurrente a) representa un caso particular de d) para  $m = 1$ ; d) es cierta de un modo trivial también para  $m = 0$  y  $m = n$ , lo que puede verse con toda facilidad.

2.39. Pongamos  $C(z) = (1-x_1z)(1-x_2z)\dots(1-x_nz)$ . Por un lado,

$$C(z) = 1 + \sum_{m=1}^h \sigma_m(x_1, \dots, x_h)(-z)^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sigma_m(x_1, \dots, x_h) z^m.$$

Por otro lado,

$$-\ln C(z) = -\sum_{i=1}^h \ln(1-x_i z) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(x_i z)^j}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j(x_1, \dots, x_h)}{j} z^j,$$

es decir,

$$C(z) = \exp \left\{ -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j(x_1, \dots, x_h)}{j} z^j \right\}.$$

Al comparar entre sí ambas expresiones obtenidas para  $C(z)$ , obtendremos (2.4).

2.40. El primer miembro de (2.5) es

$$(a_0(1) + a_1(1)x + \dots + a_{h_1}(1)x^{h_1} + \dots)(a_0(2) + a_1(2)x^2 + \dots \\ \dots + a_{k_2}(2)x^{2k_2} + \dots) \dots (a_0(n) + a_1(n)x^n + \dots + a_{h_n}(n)x^{nh_n} + \dots) \dots$$

Hallemos los coeficientes de las potencias diferentes de  $x$  en este producto. Está

claro que el término independiente es igual a  $\prod_{j=1}^{\infty} a_0(j)$ .

Con el fin de obtener el coeficiente de  $x^n$ , donde  $n \geq 0$ , tomemos el  $k_1$ -ésimo término en el 1<sup>er</sup> factor, el  $k_2$ -ésimo término en el 2<sup>o</sup>, etc., y por fin, el  $k_n$ -ésimo término en el  $n$ -ésimo factor; en este caso los números  $k_1, k_2, \dots, k_n$  han de satisfacer la relación  $n = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n$ , es decir, definir la

partición del número  $n$ . De aquí encontramos que el coeficiente de  $x^n$ ,  $n > 0$ , en el segundo miembro de (2.5) es igual a

$$\prod_{m=n+1}^{\infty} a_0(m) \sum_{\pi(n)} a_{h_1}(1) a_{h_2}(2) \dots a_{h_n}(n),$$

y la relación (2.5) queda demostrada.

2.41. Poniendo en el problema 2.40 para cada  $j = 1, 2, \dots$  todos los  $a_h(j)$  ( $h = 0, 1, \dots$ ) iguales a 1, en virtud de (2.5) obtendremos:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} A_j(x^j) &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + x^j + x^{2j} + \dots + x^{hj} + \dots) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p(x). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + x^j + \dots + x^{hj} + \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j)^{-1},$$

lo que demuestra la relación (2.6).

2.42. Pongamos en el problema 2.40 para cada  $j = 1, 2, \dots$ ,  $a_h(j) = y^h$  ( $h = 0, 1, \dots$ ). Entonces, en virtud de (2.5), tendremos

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + yx^j + y^2x^{2j} + \dots + y^h x^{hj} + \dots) = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} y^{h(n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=1}^n y^h \sum_{\pi(n)} 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n p_{nh} y^h. \end{aligned}$$

Por otra parte, este producto es igual a  $\prod_{j=1}^{\infty} (1 - yx^j)^{-1}$ , lo que demuestra la relación (2.7).

2.43. Supongamos que en el problema 2.40  $a_h(j) = y_j^h$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $h = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces, por una parte, en virtud de (2.5)

$$\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} y_j^h x^{hj} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} y_1^{h_1} y_2^{h_2} \dots y_n^{h_n},$$

por otra parte,

$$\prod_{j=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} y_j^h x^{hj} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - y_j x^j)^{-1}.$$

Al igualar los segundos miembros de las relaciones escritas, obtenemos (2.8).

2.44. Tenemos

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{xy}{1-x} \right\} &= \exp \left\{ xy \sum_{j=0}^{\infty} x^j \right\} = \exp \left\{ y \sum_{j=1}^{\infty} x^j \right\} = \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \exp \{ yx^j \} = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} y^h \frac{x^{jh}}{h!} \right\}. \end{aligned}$$

Al suponer en el problema 2.40  $a_h(j) = y^h/(k!)^h$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ , obtenemos, empleando la fórmula (2.5):

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} y^h \frac{x^{hj}}{k!^h} \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} \frac{y^{h_1 + \dots + h_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!},$$

lo que precisamente demuestra (2.9).

2.45. Tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i \right).$$

Examinemos el  $i$ -ésimo término de la suma respecto de  $i$  del segundo miembro. Haciendo uso de la relación (2.5), en la cual  $a_h(j) = a_j(k)$ , si  $j = i$ ;  $a_h(j) = 1$ , si  $i \neq j$ , de suerte que

$$A_i(x^i) = a_i \sum_{h=0}^{\infty} k x^{ih}, \quad A_j(x^j) = \sum_{h=0}^{\infty} x^{jh} = \frac{1}{1-x^j}, \quad j \neq i,$$

obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i = \prod_{j=1}^{\infty} A_j(x^j) = \left( a_i \sum_{h=0}^{\infty} k x^{ih} \right) \prod_{j \neq i} \frac{1}{1-x^j}.$$

Pero  $\sum_{h=0}^{\infty} k x^h = \frac{x}{(1-x)^2}$ , de modo que  $\sum_{h=0}^{\infty} k x^{ih} = \frac{x^i}{(1-x^i)^2}$ . Ahora, teniendo presente (2.6), encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} a_i k_i = \left( \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^j} \right) (1-x^i) \frac{a_i x^i}{(1-x^i)^2} = \frac{a_i x^i}{1-x^i} p(x).$$

De aquí se deduce el resultado requerido.

2.46. Hagamos uso de los resultados del problema 2.44. Veamos el primer miembro de la igualdad (2.9). Tomando en consideración el resultado del problema 2.35, tenemos

$$\begin{aligned} \exp(xy(1-x)^{-1}) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{xy}{1-x} \right)^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h y^h}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{h+j-1}{j} x^j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=1}^n \frac{y^h}{k!} \binom{n-1}{h-1}. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de  $x^n$  en la última expresión y en el segundo miembro de (2.9), obtenemos el resultado necesario.

2.47. Desarrollemos la suma  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{x^j}{1-x^j}$  en una serie de potencias de  $x$  y obtengamos  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{h=1}^{\infty} x^{hj}$ . Cambiemos ahora el orden de la

sumación. Con esto fin observemos que el producto  $kj$  recorre todos los valores naturales de 1 a  $\infty$  y es igual a  $n$ , si  $j$  recorre toda clase de divisores  $n$ . Por eso,

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{j|n} a_j.$$

Así pues, podemos reescribir (2.10) en la forma

$$\sum_{n=1} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = p(x) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{j|n} a_j,$$

de donde, según la definición de  $p(x)$  (véase problema 2.41), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\pi(n)} L(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{u+v=n} p_u \sum_{d|v} a_d.$$

Al comparar los coeficientes de  $x^n$  en el primer miembro y en el segundo miembro de la última relación, obtenemos (2.12).

2.48. Pongamos en (2.12)  $a_i = i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Entonces  $L(\pi) = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n$  y (2.12) toma la forma

$$\sum_{\pi(n)} n = \sum_{u+v=n} p_u \sum_{d|v} d,$$

lo que demuestra el resultado requerido.

2.49. Se desprende inmediatamente del resultado del problema 2.47, si ponemos  $a_1 = a_2 = \dots = 1$ . Entonces  $L(\pi) = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ .

2.50. Multipliquemos ambos miembros de la fórmula (2.13) por  $x^{n-1}$  y sumemos respecto de  $n$  desde 1 hasta  $\infty$ . Tendremos como resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=0}^{n-1} p_h \sigma_{n-h}.$$

El primer miembro de esta igualdad es  $p'(x)$ , mientras que el segundo es igual a  $p(x)\sigma(x)$ . De aquí se deduce a). Luego, de a) hallamos  $p'(x)/p(x) = \sigma(x)$ , de donde

$$\ln p(x) = \int_0^x \frac{p'(u)}{p(u)} du = \int_0^x \sigma(u) du = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n u^{n-1} \right) du = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{x^n}{n},$$

de suerte que  $p(x) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{x^n}{n} \right\}$  y la relación b) queda demostrada.

La representación de c) para  $p(x)$  se desprende de la forma de la función generatriz para los polinomios  $C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . En fin, la identidad d) se obtiene, si igualamos los coeficientes de potencias iguales de  $x^n$  en la representación c) para  $p(x)$ .

2.51. Supongamos que la relación (2.14) se cumple. En tal caso, al diferenciar respecto de  $x$  los miembros primero y segundo en (2.14), obtendremos  $F'(x) = \exp\{E(x)\} E'(x) = E'(x) F(x)$ .

Al igualar los coeficientes de  $x^n$ ,  $n \geq 0$ , en los miembros primero y segundo, nos convencemos de que la igualdad (2.15) es válida. Viceversa, si tienen lugar

las igualdades (2.15), entonces, al multiplicar sus miembros primero y segundo por  $\frac{1}{n!} x^n$  y al sumar respecto de  $n$  desde 0 hasta  $\infty$ , obtendremos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} a_{j+1} b_{n-j} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left( a_{j+1} \frac{x^j}{j!} \right) \left( b_{n-j} \frac{x^{n-j}}{(n-j)!} \right) = E'(x) F(x); \end{aligned}$$

de aquí obtenemos la ecuación diferencial para  $F(x)$ :  $dF(x)/F(x) = E'(x) dx$ . Al resolverla, obtenemos  $F(x) = E(x) + C$ , de modo que  $F(x) = e^{E(x)+C}$ .

Para hallar la constante  $C$ , pongamos  $x = 0$  y, considerando que  $F(0) = b_0 = 1$  y  $E(0) = a_0 = 0$ , encontramos  $e^C = 1$ , es decir,  $C = 0$ . De aquí se deduce (2.14).

## § 2. Números especiales y funciones especiales

2.52. El subconjunto  $M_1 \subset M$  puede ser elegido empleando  $\binom{n}{r_1}$  procedimientos. Luego,  $M_2 \subset M \setminus M_1$  puede ser definido empleando  $\binom{n-r_1}{r_2}$  métodos, etc., por fin, para definir  $M_k \subset M \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_{k-1})$  nos restan  $\binom{n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \binom{r_k}{r_k} = 1$  posibilidades. Por eso

$$\begin{aligned} \sigma(r_1, r_2, \dots, r_k) &= \binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \\ &= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!} \dots \frac{(n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-\dots-r_k)!} = \\ &= \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k! 0!} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}, \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

2.53. La solución se desprende automáticamente de la afirmación del problema 2.52.

2.54. Cada partición del  $n$ -conjunto engendra cierta familia de permutaciones (sustituciones) de  $n$  símbolos. En efecto, si  $\{x_1, \dots, x_k\}$  es una de las partes de la partición, entonces a base de los símbolos  $x_1, \dots, x_k$  pueden formarse  $(k-1)!$  ciclos, ordenando de diferentes maneras dichos símbolos. Por eso, de cada partición del  $n$ -conjunto, que tiene  $k_i$  partes de dimensión  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) pueden formarse  $(0!)^{k_1} (1!)^{k_2} (2!)^{k_3} \dots ((n-1)!)^{k_n}$  permutaciones distintas que tienen  $k_i$  ciclos de longitud  $i$ . Al multiplicar  $B_n(k_1, \dots, k_n)$  por este producto, obtendremos a). La fórmula b) se deduce ahora de a) y del problema 2.53.

2.55. Supongamos que el conjunto  $M$  se compone de los elementos  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ . Veamos cualquier partición  $S$  y admitamos que un subconjunto que contiene  $a_{n+1}$  incluye también  $k$  otros elementos,  $0 \leq k \leq n$ . Si  $k$  es fijo, el número de tales particiones es igual a  $\binom{n}{k} B_{n-k}$ . En efecto, los citados  $k$  elementos pueden elegirse del conjunto  $\{a_1, \dots, a_n\}$  empleando  $\binom{n}{k}$  métodos.

mientras que el conjunto de  $n - k$  elementos restantes admite  $B_{n-k}$  particiones en clases disjuntas. Cuando  $k = n$ , no queda ningún elemento, mas el acuerdo (coordinación)  $B_0 = 1$  incluye este caso también. Al sumar los números  $\binom{n}{k} B_{n-k}$  respecto de  $k$ , obtenemos el resultado requerido.

2.56. Toda clase de particiones del  $n$ -conjunto  $M$  pueden ser ordenadas, prefijando diferentes particiones del número  $n$ , las cuales determinan la composición de los conjuntos que integran la partición  $M$ . Toda partición del número  $n$  se determina por el juego  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  de números enteros no negativos que satisfacen la relación  $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$ , donde  $k_s$  es la cantidad de partes, iguales a  $S$ , en la partición del número  $n$  ( $s = 1, \dots, n$ ). Para cada una de tales particiones  $n$ , el número de particiones del conjunto  $M$  que contienen  $k_s$   $s$ -subconjuntos es igual a  $B_n(k_1, k_2, \dots, k_n)$  (véase el problema 2.53).

2.57. a) Tenemos

$$\exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!} \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ y_n \frac{z^n}{n!} \right\} = \prod_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{h=0}^{\infty} \frac{y_j^h}{k! (j!)^h} z^{jh} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} A_j(z^j),$$

donde

$$A_j(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h(j) z^h, \quad a_h(j) = \frac{y_j^h}{k! (j!)^h}.$$

Con ayuda de (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\pi(n)} \prod_{j=1}^n \frac{y_j^{h_j}}{k_j! (j!)^{h_j}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\pi(n)} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la relación (2.18).

Un caso particular de la relación (2.18) es el resultado del problema 2.57, b). En efecto, suponiendo  $y_1 = y_2 = \dots = y_n = \dots = 1$  en la fórmula (2.18) y tomando en consideración (2.17), demostramos la fórmula (2.19).

b) Demos a conocer la demostración directa de la fórmula (2.19) que emplea los resultados del problema 2.56. De ésta obtenemos

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[ \sum_{s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n} \frac{n!}{\prod_{h=1}^n (k!)^{s_h} s_h!} \right].$$

Mostremos que el segundo miembro de esta expresión es igual a

$$\prod_{h=1}^{\infty} \left( \sum_{s_h=0}^{\infty} \frac{1}{s_h!} \left( \frac{x^h}{k!} \right)^{s_h} \right) = \prod_{h=1}^{\infty} e^{x^h/k!} = e^{e^x - 1},$$

de donde se deducirá la fórmula (2.19). Mas, el hecho de que el segundo miembro de la primera expresión es igual al primer miembro de la segunda se demuestra empleando los resultados del problema 2.40.

2.58. Tenemos

$$C_n(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} B_n(k_1, \dots, k_n) (0! y_1)^{k_1} \dots \\ \dots ((n-1)! y_n)^{k_n} = \varphi_n(0! y_1, 1! y_2, \dots, (n-1)! y_n).$$

Por consiguiente, de acuerdo con (2.18),

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(0! y_1, 1! y_2, \dots, (n-1)! y_n) \frac{z^n}{n!} = \\ = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)! y_n] \frac{z^n}{n!} \right\} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n} \right\},$$

y la relación (2.21) queda demostrada.

2.59. De acuerdo con (2.18) tenemos

$$\exp \left\{ x \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right\} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (x \cdot y_i) \frac{z^i}{i!} \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x y_1, \dots, x y_n) \frac{z^n}{n!},$$

donde, según la definición del polinomio de Bell,

$$Y_n(x y_1, \dots, x y_n) = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} B_n(k_1, \dots, k_n) (x y_1)^{k_1} \dots (x y_n)^{k_n} = \\ = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} x^{k_1+\dots+k_n} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} = \\ = \sum_{h=1}^n x^h \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=h \\ k_1+2k_2+\dots+nk_n=n}} B_n(k_1, \dots, k_n) y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} = \\ = \sum_{h=1}^n Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) x^h.$$

De aquí se deduce (2.23). Suponiendo en la última relación  $x = 1$ , obtenemos (2.24). Luego, de (2.23) llegamos a que por un lado

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=1}^n Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) x^h \frac{z^n}{n!} = \\ = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} x^h \sum_{n=h}^{\infty} Y_{n,h}(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!};$$

por otro lado,

$$\exp \left\{ x \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right\} = \sum_{h=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{z^i}{i!} \right]^h \frac{x^h}{h!},$$

de donde se deduce (2.25).

2.60. a) Esta relación recurrente es un corolario de los resultados de los problemas 2.56 y 2.57.

b) Directamente de la definición de los polinomios  $Y_n(y_1, \dots, y_n)$  (véase (2.17)) obtenemos

$$\begin{aligned} Y_n(Cy_1, \dots, C^n y_n) &= \sum_{\pi(n)} B_k(k_1, \dots, k_n) (Cy_1)^{h_1} \dots (C^n y_n)^{h_n} = \\ &= \sum_{\pi(n)} C^{h_1 + 2h_2 + \dots + nh_n} B(k_1, \dots, k_n) y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n} = \\ &= C^n \sum_{\pi(n)} B_k(k_1, \dots, k_n) y_1^{h_1} \dots y_n^{h_n} = C^n Y_n(y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

y b) queda demostrada.

c) Al diferenciar los miembros primero y segundo de la relación (2.18) respecto de  $y_j$ , encontramos

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \exp(f(z)) \frac{\partial}{\partial y_j} f(z),$$

donde

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} f(z) = \frac{z^j}{j!}.$$

Teniendo en cuenta (2.18), concluimos de aquí que

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} \right) \frac{z^j}{j!}.$$

Igualando los coeficientes de  $z^n$  en los miembros primero y segundo de la última expresión, vemos que

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial y_j} Y_n(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{j!(n-j)!} Y_{n-j}(y_1, \dots, y_{n-j}),$$

ya  $c_1$ ) queda demostrada. Como consecuencia, queda demostrada también  $c_2$ ) para  $r=1$ . Cuando  $r > 1$ ,  $c_2$ ) se demuestra por aplicación reiterada de la operación de diferenciación. En efecto, al diferenciar  $r$  veces los miembros primero y segundo de (2.18) respecto de  $y_j$ , obtenemos por analogía con lo anterior

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{\partial^r}{\partial y_j^r} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1, \dots, y_n) \frac{z^n}{n!} \right) \frac{z^j}{(j!)^r},$$

de donde se desprenden las relaciones  $c_2$ ) y  $c_3$ ).

d) Con ayuda de (2.18) encontramos

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) \frac{z^n}{n!} &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (y_n + x_n) \frac{z^n}{n!} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{z^n}{n!} \right\} \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{z^n}{n!} \right\} = \\ &= \left( 1 + \sum_{h=1}^{\infty} Y_h(y_1, \dots, y_h) \frac{z^h}{h!} \right) \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} Y_l(x_1, \dots, x_l) \frac{z^l}{l!} \right). \end{aligned}$$



Igualando los coeficientes de  $x^n/n!$ , obtenemos de aquí

$$\frac{1}{n!} Y_n (y_1 + x_1, \dots, x_n + y_n) = \sum_{h=0}^n \frac{Y_h (y_1, \dots, y_h) Y_{n-h} (x_1, \dots, x_{n-h})}{h! (n-h)!},$$

de donde se deduce precisamente d).

e) En virtud de c), tenemos, evidentemente:

$$\begin{aligned} & \left( y_1 + \sum_{s=1}^n y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s} \right) Y_n = y_1 Y_n + \sum_{s=1}^{\infty} y_{s+1} \frac{\partial}{\partial y_s} Y_n = y_1 Y_n + \\ & + \sum_{s=1}^n \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s} (y_1, \dots, y_{n-s}) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} y_{s+1} Y_{n-s} (y_1, \dots, y_{n-s}), \end{aligned}$$

lo que, de acuerdo con a), es igual a  $Y_{n+1}$ , y c) está demostrada.

2.51. Las relaciones para los coeficientes de la función generatriz  $B_H(x)$  se deducen inmediatamente de los resultados del problema 2.57, si ponemos en él  $y_j = 1$  para  $j \in H$  e  $y_j = 0$  para  $j \notin H$ . El sentido combinatorio de los números  $B_n(H)$  se pone de manifiesto por analogía con el problema 2.56 para los números de Bell  $B_n$ .

2.52. a) La afirmación está clara: las relaciones  $S(n, 1) = 1$ ,  $S(n, n) = 1$  se comprueban de un modo directo, y la relación  $\sum_{k=0}^n S(n, k) = B_n$  se deduce de la definición del número de Bell (problema 2.55) y de los números de Stirling de 2º género.

b) Analicemos los conjuntos  $\mu_{n-1} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  y  $\mu_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Cualquiera partición de  $\mu_n$  en  $k$  partes pueden obtenerse de las particiones de  $\mu_{n-1}$  en  $k$  y  $k-1$  partes agregando a  $\mu_{n-1}$  el elemento  $x_n$ . Si está dada la partición de  $\mu_{n-1}$  en  $k$  partes, el elemento  $x_n$  puede formar parte de uno de los conjuntos que constituyen dicha partición, lo que nos dará como resultado  $k$  diferentes particiones de  $\mu_n$  en  $k$  partes. Si, en cambio, está dada una partición de  $\mu_{n-1}$  en  $k-1$  partes, entonces, al agregar  $x_n$ , se debe formar un subconjunto que se componga de un solo elemento  $x_n$  y esto nos dará una partición más de  $\mu_n$  en  $k$  partes, diferentes de las antecedentes. Estos razonamientos demuestran precisamente b). La condición inicial no exige explicaciones.

c) Ordenemos toda clase de particiones del  $n$ -conjunto  $\mu$  en  $k$  partes. Con este fin prefijemos  $k$  números enteros positivos  $r_i$  de tal índole que  $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ , y examinemos diferentes  $(r_1, \dots, r_k)$ -particiones del conjunto  $\mu$ . El número de tales particiones se determina por la fórmula del problema 2.52. Por cuanto en cada partición de este tipo el orden del conjunto no tiene importancia alguna, obtenemos

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \sigma(r_1, \dots, r_k) = \frac{1}{k!} \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! \dots r_k!},$$

lo que demuestra c).

d) La demostración es análoga a la de la representación del problema 2.56 para el número de Bell.

e) Suponiendo en la relación b)  $k = n-1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} S(n, n-1) &= (n-1) S(n-1, n-1) + S(n-1, n-2) = \\ &= n-1 + S(n-1, n-2) = \\ &= (n-1) + (n-2) + S(n-2, n-3) = \\ &= (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

A continuación, tenemos

$$\begin{aligned} S(n, n-2) &= (n-2)S(n-1, n-2) + S(n-1, n-3) = \\ &= (n-2) \binom{n-1}{2} + S(n-1, n-3) = (n-2) \binom{n-1}{2} + (n-3) \binom{n-2}{2} + \\ &+ S(n-2, n-4) = (n-2) \binom{n-1}{2} + (n-3) \binom{n-2}{2} + \dots \\ &\dots + (n-(n-1)) \binom{n-(n-2)}{2} = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) \binom{n-i}{2}. \end{aligned}$$

2.63. Multiplicando los miembros primero y segundo de la relación b) del problema 2.62 por  $y^h$  y sumando respecto de  $k$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S(n, k) y^k &= \sum_{k=0}^n k S(n-1, k) y^k + \sum_{k=1}^n S(n-1, k-1) y^k = \\ &= y \left[ \sum_{k=1}^n k S(n-1, k) y^{k-1} + \sum_{k=1}^n S(n-1, k-1) y^{k-1} \right] \end{aligned}$$

o bien, lo que es lo mismo,  $P_n(y) = y [dP_{n-1}(y)/dy + P_{n-1}(y)]$ , y (2.30) queda demostrada. La equivalencia de las relaciones (2.30) y (2.31) se deduce de que

$$e^y \neq 0, \quad \frac{d}{dy} (e^y P_{n-1}(y)) = e^y \frac{d}{dy} P_{n-1}(y) + e^y P_{n-1}(y).$$

2.64. Observemos que de la definición de polinomios de Bell se desprende que, cuando  $n \geq 1$ , en virtud del problema 2.62 d) tenemos:

$$\begin{aligned} Y_n(y, \dots, y) &= \sum_{h_1+2h_2+\dots+nh_n=n} B_n(k_1, \dots, k_n) y^{h_1+\dots+h_n} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} y^k \sum_{\substack{h_1+2h_2+\dots+nh_n=n \\ h_1+h_2+\dots+h_n=k}} B_n(k_1, \dots, k_n) = \sum_{k=1}^{\infty} S(n, k) y^k = P_n(y). \end{aligned}$$

Por eso, al poner en los miembros primero y segundo de (2.18)  $y_1 = y_2 = \dots = y_n = y$ , obtendremos

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \frac{y^n}{n!} = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y \frac{y^n}{n!} \right\} = \exp \{y(e^y - 1)\},$$

lo que se trataba de demostrar.

2.65. Por un lado, según la definición de función generatriz, tenemos

$$S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n S(n, k) y^k \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} S(n, k) x^n \right] y^k.$$

Por otro lado, de conformidad con (2.32), encontramos

$$S(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k y^k.$$

Comparando los coeficientes de  $y^k$  en ambas expresiones obtenidas, llegamos a (2.34).

2.66. De (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Y_h(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \right] = \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1} e^x = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1} (e^x - 1 + 1) = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^k + \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1} = kY_h(x) + Y_{h-1}(x), \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

2.67. Como se ha mostrado en el problema 2.66,

$$dY_h(x)/dx = (e^x - 1)^{h-1} e^x / (k-1)! = e^x Y_{h-1}(x).$$

El coeficiente de  $x^n$  en el primer miembro de esta relación es igual a  $S(n+1, k)/n!$  y en el segundo miembro, a

$$\sum_{i+j=n, i, j \geq 0} \frac{n!}{i!j!} S(j, k-1).$$

Igualando las expresiones obtenidas, obtendremos la relación (2.36). Observemos que la resolución de este problema se realiza con facilidad empleando el mismo método que en el problema 2.62.

2.68. Por definición de los polinomios  $P_n(x)$  (problema 2.63) tenemos

$$P_{n+1}(x) = \sum_{h=1}^{n+1} S(n+1, k) x^h = x \sum_{h=0}^n S(n+1, k+1) x^h.$$

Haciendo uso de la identidad (2.36), obtenemos de aquí

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{h=0}^n x^h \left[ \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} S(l, k) \right] = \\ &= x \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left[ \sum_{h=0}^n S(l, k) x^h \right] = x \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} P_l(x), \end{aligned}$$

y (2.37) queda demostrada.

Ahora, de conformidad con la relación (2.30), tenemos  $x dP_n(x)/dx = P_{n+1}(x) - xP_n(x)$ . Haciendo uso de (2.37), encontramos de aquí

$$x \frac{d}{dx} P_n(x) = x \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} P_h(x) - xP_n(x) = x \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n}{h} P_h(x),$$

lo que demuestra (2.38).

2.69. Con ayuda de la función generatriz para los polinomios de Stirling (problema 2.64) encontramos

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \frac{x^n}{n!} &= e^{-y} e^{yx} = e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} e^{kx} = \\ &= e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!} = e^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{y^k}{k!}. \end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes de iguales potencias de  $x$  en los miembros primero y último de la cadena de igualdades escrita, obtenemos (2.39). Suponiendo en (2.39)  $y = 1$  y teniendo en cuenta que  $P_n(1) = B_n$ , obtenemos (2.40).

2.70. De acuerdo con (2.31),

$$e^x P_{n+1}(x) = x d [e^x P_n(x)] / dx.$$

Haciendo uso de la identidad (2.39), obtenemos de aquí

$$e^x P_{n+1}(x) = x \frac{d}{dx} \sum_{h=0}^{\infty} k^n \frac{x^h}{h!} = x \sum_{h=1}^{\infty} k^n \frac{x^{h-1}}{(h-1)!} = x \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^n \frac{x^s}{s!},$$

y (2.41) queda demostrada; (2.42) se desprende de (2.41), teniendo en cuenta que cuando  $x = 1$ ,  $P_{n+1}(1) = B_{n+1}$ .

2.71. Haciendo uso del problema 2.62, b), podemos escribir

$$\begin{aligned} S_h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k, k) z^n = \sum_{h=0}^{\infty} [kS(n+k-1, k) + S(n+k-1, k-1)] z^n = \\ &= k \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k-1) z^n = \\ &= kz \sum_{n=1}^{\infty} S(n+k, k) z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k-1, k-1) z^n, \end{aligned}$$

puesto que  $S(k-1, k) = 0$ . De aquí obtenemos

$$S_h(z) = kz S_h(z) + S_{h-1}(z),$$

de donde se deduce (2.44). La aplicación reiterada de la relación (2.44) conduce a (2.45).

2.72. De (2.43) y (2.45) encontramos

$$\sum_{n=h}^{\infty} S(n, k) z^n = \frac{z^h}{(1-z)(1-2z) \dots (1-kz)} = u_h(z).$$

Al poner aquí  $z = 1/t$ , obtendremos

$$u_h(1/t) = t/(t-1) \dots (t-k)$$

y el desarrollo en fracciones simples nos da

$$u_h\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{(-1)^h}{k!} t \sum_{i=0}^{h+1} \frac{(-1)^i \binom{k}{i}}{t-i}.$$

Al poner otra vez  $z = 1/t$ , tendremos

$$u_h(z) = \frac{(-1)^h}{z!} \sum_{i=0}^{h+1} \frac{(-1)^i \binom{k}{i}}{1-iz} = \frac{(-1)^h}{k!} \sum_{i=0}^{h+1} (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

El coeficiente de  $z^n$  en la última expresión es igual a

$$S(n, k) = (-1)^h \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{h+1} (-1)^i \binom{k}{i} i^n = \frac{(-1)^h}{k!} \sum_{i=0}^h (-1)^i \binom{k}{i} i^n,$$

y la representación (2.47) para los números de Stirling de 2º género queda demostrada. La fórmula (2.46) se obtiene de (2.47) por sustitución de la variable de sumación.

2.73. La función generatriz  $u_h(z)$  del problema 2.72 puede reescribirse en la forma

$$u_h(z) = z^h (1 + z + z^2 + \dots) (1 + 2z + 2^2 z^2 + \dots) \dots \dots (1 + kz + k^2 z^2 + \dots),$$

de donde viene la afirmación del problema, puesto que

$$\begin{aligned} & (1 + z + z^2 + \dots) (1 + 2z + 2^2 z^2 + \dots) \dots (1 + kz + k^2 z^2 + \dots) = \\ & = \sum_{n=h}^{\infty} z^{n-h} \sum_{l_1+l_2+\dots+l_h=n-h} 1^{l_1} 2^{l_2} \dots k^{l_h}, \\ & \sum_{l_1+l_2+\dots+l_h=n-h} 1^{l_1} 2^{l_2} \dots k^{l_h} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{n-h}=h} i_1 i_2 \dots i_{n-h}. \end{aligned}$$

2.74. 1) Por definición inicial de los números de Stirling de 2º género tomemos al principio la definición citada en el problema 2.62. En tal caso tendremos

$$e^{tx} = [1 + (e^t - 1)]^x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x(x-1) \dots (x-k+1)}{k!} (e^t - 1)^h,$$

o bien, de acuerdo con el problema 2.65 (fórmula (2.34)),

$$\begin{aligned} e^{tx} &= \sum_{h=0}^{\infty} x(x-1) \dots (x-k+1) Y_h(t) = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} x(x-1) \dots (x-k+1) \sum_{n=h}^{\infty} S(n, k) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Hallemos e igualemos entre sí los coeficientes de  $t^n$  en los miembros primero y segundo de esta relación. Obtendremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{h=0}^n x(x-1) \dots (x-k+1) S(n, k),$$

de donde se desprende (2.49).

2) Ahora por definición inicial de los números de Stirling de 2º género tomemos la relación (2.49). Pongamos, para mayor comodidad,  $S(0, 0) = 1$  y  $S(0, k) = 0$ , si  $k \neq 0$ .

Por cuanto  $x^{n-1} = \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k+1)$ , entonces para  $n > 1$  hallamos a partir de (2.49)

$$\begin{aligned} x^n &= x x^{n-1} = x \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \\ &= (x-k+k) \sum_{k=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots (x-k) + k \sum_{h=1}^{n-1} S(n-1, k) x(x-1) \dots \\
&\dots (x-k+1) = \sum_{h=1}^{n-1} [S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)] x(x-1) \dots (x-k+1).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n S(n, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \\
&= \sum_{h=1}^{n-1} [S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)] x(x-1) \dots (x-k+1).
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que para  $n > 1$ ,  $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ . Cuando  $n = 1$ , de (2.49) hallamos inmediatamente que  $S(1, 1) = 1$ . Para cualquier  $n > 0$  todos los números  $S(n, k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) se definen unívocamente por sus condiciones iniciales. Pero, con arreglo al problema 2.62, los números de Stirling de 2º género se definen por la relación recurrente del problema 2.62, b), la cual coincide con las condiciones iniciales análogas escritas más arriba. Por consiguiente, la relación (2.49) define los números que coinciden por completo con los números de Stirling de 2º género.

2.75. De conformidad con (2.19) obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{e^z} + e^{-z} - 2 &= e^{e^z - 1} e^{e^{-z} - 1} = B(z) B(-z) = \\
&= \left( \sum_{h=0}^{\infty} B_h \frac{z^h}{h!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l B_l \frac{z^l}{l!} \right).
\end{aligned}$$

De aquí, con arreglo al problema 2.26, encontramos

$$e^{e^z + e^{-z} - 2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\substack{h, l \geq 0 \\ h+l=n}} (-1)^l B_h B_l \frac{1}{k! l!},$$

de donde se deduce el resultado que se demuestra.

2.76. Estudiemos las permutaciones de  $n$  símbolos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  con  $k$  ciclos respecto a la posición del elemento  $x_n$ , el cual o bien forma o bien no forma el ciclo unidad. Si  $x_n$  forma en la permutación el ciclo unidad, a dicha permutación se le puede poner en correspondencia una permutación de  $n-1$  elementos  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  con  $k-1$  ciclos. El número de estas permutaciones es igual a  $C(n-1, k-1)$ . Si  $x_n$  no integra el ciclo unidad, el número de permutaciones buscadas será igual al número de métodos, con ayuda de los cuales el elemento  $x_n$  puede ser incluido en las permutaciones de  $n-1$  símbolos (con  $k$  ciclos cada una de ellas) sin que se forme un ciclo nuevo. Este número es igual a  $n-1$ , puesto que en cada ciclo de longitud  $r$  se tienen exactamente  $r$  diferentes posibilidades de incluir  $x_n$  y, según la suposición, la suma de longitudes de los ciclos es igual a  $n-1$ . De estos razonamientos se deduce (2.51); (2.52) se deduce de (2.51) y de la conexión de los números  $s(n, k)$  y  $C(n, k)$ .

2.77. Al multiplicar ambos miembros de (2.51) por  $x^h$  y al sumar respecto de  $k$  desde 0 hasta  $n$ , obtendremos

$$\begin{aligned}
C_n(x) &= \sum_{h=0}^n C(n-1, k-1) x^h + (n-1) \sum_{h=0}^n C(n-1, k) x^h = \\
&= x \sum_{h=1}^n C(n-1, k-1) x^{h-1} + (n-1) \sum_{h=0}^n C(n-1, k) x^h = \\
&= x C_{n-1}(x) + (n-1) C_{n-1}(x) = (x+n-1) C_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

De aquí (2.53) proviene por inducción.

La fórmula (2.53) puede demostrarse también del modo siguiente. Es evidente que  $C_n(x) = C_n(x, x, \dots, x)$ , donde  $C_n(x, \dots, x)$  se definen en el problema 2.58. Por consiguiente, de (2.21) hallamos

$$1 + \sum C_n(x) \frac{z^n}{n!} = \exp \left\{ x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right\} = \exp \{-x \ln(1-z)\} = \\ = (1-z)^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x(x+1) \dots (x+n-1) \frac{z^n}{n!},$$

de donde proviene (2.53).

2.78. En el problema 2.77 se ha mostrado que

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^k = x(x+1) \dots (x+n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Teniendo presente que  $C(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k)$  (véase problema 2.76), obtenemos (2.54).

2.79. El hecho de que los números  $(-1)^{n+k} s(n, k)$  son positivos se desprende de que  $(-1)^{n+k} s(n, k) = C(n, k)$ , donde  $C(n, k) \geq 0$  por definición (véase el problema 2.76). La representación (2.55) se desprende directamente de (2.53).

2.80. Multipliquemos ambos miembros de (2.52) por  $x^{n-1}/(n-1)!$  y, al sumar respecto de  $n$  desde 1 hasta  $\infty$ , obtendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(n, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} s(n-1, k-1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) s(n-1, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

es decir,  $dy_k(x)/dx = y_{k-1}(x) - x dy_k(x)/dx$ , de donde se deduce (2.56). La relación (2.57) se demuestra con facilidad por inducción. En efecto, por cuanto  $y_0(x) = 1$ , entonces para  $k=0$  (2.57) es válida. Supongamos, ahora, que (2.57) se cumple para  $k-1$ , y comprobémosla para  $k$ . De (2.56) obtenemos

$$(1+x) dy_k(x)/dx = [\ln(1+x)]^{k-1}/(k-1)!$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$y_k(x) = \int_0^x \frac{1}{(k-1)!} \frac{[\ln(1+u)]^{k-1}}{1+u} du = \frac{1}{k!} [\ln(1+x)]^k.$$

lo que se trataba de demostrar.

2.81. Tenemos

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!} t^n.$$

De aquí obtenemos, en virtud de (2.54):

$$(1+t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{h=0}^n s(n, k) x^h \right) \frac{t^n}{n!} = s(t, x),$$

lo que se trataba de demostrar.

2.82. De acuerdo con el problema 2.80, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} s(n+1, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx} y_h(x) = \frac{1}{(k-1)!} [\ln(1+x)]^{h-1} \frac{1}{x+1}$$

o bien

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s(n+1, k) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} s(n, k-1) \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{j=0}^n (-1)^j s(n-j, k-1) \frac{1}{(n-j)!}. \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de  $x^n$  en los miembros primero y segundo de esta expresión, obtenemos

$$s(n+1, k) = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j s(n-j, k-1) \frac{1}{(n-j)!},$$

lo que es equivalente a (2.58).

2.83. De (2.49) y (2.54) hallamos

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=1}^n S(n, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = \sum_{k=1}^n S(n, k) \sum_{m=1}^k s(k, m) x^m = \\ &= \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{k=m}^n S(n, k) s(k, m) \right] x^m, \end{aligned}$$

de donde se deduce (2.59) para  $1 \leq m \leq n$ . Pero (2.59) se verifica también para cualesquiera otros valores de  $m$ , puesto que ambos miembros de (2.59) en este caso son nulos.

Demostremos (2.60) procediendo en el orden inverso. En efecto,

$$\begin{aligned} x(x-1) \dots (x-n+1) &= \sum_{v=1}^n s(n, v) x^v = \\ &= \sum_{v=1}^n s(n, v) \sum_{m=0}^v S(v, m) x(x-1) \dots (x-m+1) = \\ &= \sum_{m=0}^n x(x-1) \dots (x-m+1) \sum_{v=m}^n s(n, v) S(v, m). \end{aligned}$$

Al comparar los coeficientes de  $x(x-1) \dots (x-m+1)$  a la izquierda y a la derecha (ellos deben ser iguales), obtenemos (2.60).

2.84. Teniendo en cuenta (2.61), hallamos

$$\sum_{v=1}^n S(n, v) A_v = \sum_{v=1}^n S(n, v) \sum_{h=1}^v s(v, k) a_k = \sum_{h=1}^n a_h \sum_{v=h}^n S(n, v) s(v, k)$$



y, en virtud de (2.59),

$$\sum_{v=1}^n S(n, v) A_v = \sum_{h=1}^n a_h \delta_{nh} = a_n;$$

por consiguiente, de (2.61) se deduce (2.62). Viceversa, con ayuda de (2.62) podemos escribir

$$\sum_{v=1}^n s(n, v) a_v = \sum_{v=1}^n s(n, v) \sum_{h=1}^v S(v, k) A_h = \sum_{h=1}^n A_h \sum_{v=h}^n s(n, v) S(v, k)$$

y, en virtud de (2.60),

$$\sum_{v=1}^n s(n, v) a_v = \sum_{h=1}^n A_h \delta_{nh} = A_n,$$

es decir, de (2.62) se deduce (2.61).

2.85. Para  $n = 0$  la fórmula (2.63) es válida, puesto que por definición  $s(0, 0) = 1$ ,  $B_0 = 1$ . Sea, ahora,  $n \geq 1$ . Entonces, de acuerdo con el problema 2.62, a) y (2.60), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n s(n, k) B_h &= \sum_{h=1}^n s(n, k) \sum_{i=1}^h S(k, i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n s(n, k) S(k, i) = \sum_{i=1}^n \delta_{ni} = \delta_{nn} = 1. \end{aligned}$$

2.86. Para  $n = 0$  (2.64) tiene lugar, puesto que  $s(0, 0) = 1$  y  $P_0(x) = 1$ . Luego, de acuerdo con (2.60), obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n s(n, k) P_h(x) &= \sum_{h=1}^n s(n, k) \sum_{j=0}^h S(k, j) x^j = \\ &= \sum_{j=0}^n x^j \sum_{h=j}^n s(n, k) S(k, j) = \sum_{j=0}^n x^j \delta_{nj} = x^n \delta_{nn} = x^n, \end{aligned}$$

y (2.64) queda demostrada.

2.87. Cuando  $n = 0$  (2.65) se verifica, puesto que  $S(0, 0) = 1$  y  $j_0(x) = 1$ . Cuando  $n = 1, 2, \dots$ , de acuerdo con (2.54) y (2.59), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S(n, k) j_k(x) &= \sum_{k=0}^n S(n, k) \sum_{j=0}^k s(k, j) x^j = \\ &= \sum_{j=0}^n x^j \sum_{k=0}^n S(n, k) s(k, j) = \sum_{j=0}^n x^j \delta_{nj} = x^n \delta_{nn} = x^n. \end{aligned}$$

2.88. Cada alojamiento de diferentes mostacillas en distintas células puede interpretarse en los términos de  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ -particiones del  $n$ -conjunto  $M$  de objetos disponibles. En efecto, el alojamiento de los objetos en células es de tal índole que en la  $i$ -ésima célula están contenidos  $r_i \geq 0$  objetos;  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$  es una  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ -partición del conjunto  $M$  (véase

problema 2.52) y el número de tales particiones es igual a  $\sigma(r_1, \dots, r_m)$ . Evidentemente, en vista del problema 2.52, obtenemos

$$\mu(n, m) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_m = n \\ r_i \geq 0}} \sigma(r_1, \dots, r_m) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_m = n \\ r_i \geq 0}} \frac{n!}{r_1! \dots r_m!}.$$

De aquí, con arreglo al problema 2.62 c), llegamos a la fórmula (2.66). La expresión (2.67) para los números  $\mu(n, m)$  resulta ser ahora un corolario del problema 2.72. Para demostrar (2.68), hagamos uso de la relación recurrente del problema 2.62 b). Tenemos

$$\begin{aligned} \mu(n, m) &= m!S(n, m) = m! [mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)] = \\ &= mm!S(n-1, m) + m(m-1)!S(n-1, m-1) = \\ &= m\mu(n-1, m) + m\mu(n-1, m-1), \end{aligned}$$

lo que demuestra (2.68).

2.89. Es evidente que  $\mu_p(n, m)$  es igual al número de métodos de elección entre  $m$  cajones tales  $p$  cajones que han de ser llenados, multiplicado por el número de métodos para alojar diferentes mostacillas en diferentes cajones, es decir,  $\mu_p(n, m) = \binom{m}{p} \mu(n, p)$ , y, en virtud de

$$\mu_p(n, m) = \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{p!} p! S(n, p)$$

de aquí se deduce (2.69).

2.90. Analicemos diferentes alojamientos de  $n$  diferentes objetos en  $m$  diferentes células. El número total de ellos es igual a  $m^n$ , es decir, al primer miembro de (2.70). Por otra parte, pueden ser clasificados del modo siguiente. Dividamos todos los alojamientos citados en  $m$  clases, incluyendo en la  $p$ -ésima clase ( $p = 1, 2, \dots, m$ ) todos aquellos alojamientos, para los cuales  $p$  células están ocupadas y  $(m-p)$ , libres. La potencia de la  $p$ -ésima clase se determina con ayuda del problema 2.89. Al sumar respecto de todos los  $p$  los números  $\mu_p(n, m)$ , obtendremos, en virtud de (2.69):

$$m^n = \sum_{p=1}^m \mu_p(n, m) = \sum_{p=1}^m (m)_p S(n, p),$$

lo que se trataba de demostrar. Está claro también que la relación (2.70) se deduce inmediatamente de la expresión determinante (2.49) para los números de Stirling de 2º género.

2.91. El primero de los números requeridos se obtiene dividiendo por  $m!$  el número correspondiente de métodos de alojamientos para diferentes cajones (véase problema 2.88, fórmula (2.66)). En efecto, a cada uno de los alojamientos, al haber  $m$  células iguales, le corresponden  $m!$  alojamientos en el caso cuando estas células son distinguibles.

El segundo de los números buscados se obtiene por sumación inmediata de los números de Stirling  $S(n, p)$  respecto de  $p = 1, \dots, m$ , puesto que la elección de los cajones vacíos, por cuanto ellos son indistinguibles, se realiza de un modo único.

2.92.  $n$  diferentes factores primos  $p_1, \dots, p_n$  pueden partirse en  $m$  productos no vacíos empleando  $S(n, m)$  métodos, según la interpretación de los números de Stirling de 2º género  $S(n, m)$ , como números de particiones del  $n$ -conjunto en  $m$  subconjuntos disjuntos no vacíos. Por hipótesis del problema todos los productos obtenidos serán diferentes, lo que demuestra precisamente el resultado requerido.

2.93. Dividamos los alojamientos determinados por el número  $S(n, m, k)$  en  $n + 1$  clases incluyendo en la  $v$ -ésima clase ( $v = 0, 1, \dots$ ) aquellos, en los cuales el llenado de  $k$  células elegida se realiza colocando  $v$  mostacillas, con la particularidad de que las restantes  $n - v$  mostacillas caen en los cajones no marcados. El número de elementos en la  $v$ -ésima clase es igual a

$$\binom{n}{v} (m-k)^{n-v} k! S(v, k), \quad (*)$$

donde  $\binom{n}{v}$  es el número de métodos que pueden emplearse para elegir entre  $n$  diferentes objetos,  $v$  piezas;  $k! S(v, k)$  es el número de métodos para alojar  $v$  objetos elegidos en  $k$  cajones fijos (véase problema 2.88);  $(m-k)^{n-v}$  es el número de métodos para alojar los restantes  $n - v$  objetos distinguibles en  $m - k$  cajones distinguibles. Al sumar los monomios (\*) respecto de  $v = 0, 1, \dots, n$ , y dividiendo la suma por  $k!$ , obtenemos (2.71).

2.94. Haciendo uso de (2.71), escribamos

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[ \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (m-k)^{n-v} S(v, k) \right] = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} S(v, k) \sum_{n=v}^{\infty} \frac{(m-k)^{n-v}}{(n-v)!} x^{n-v} = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} S(v, k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m-k)^n}{n!} x^n = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{v!} S(v, k) e^{(m-k)x} = \\ &= e^{(m-k)x} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} S(v, k) x^v, \end{aligned}$$

de donde con ayuda de (2.34), se deduce (2.73).

### § 3. Teoría de Polya

2.95. Escribamos todas las  $n!$  sucesiones, cada una de las cuales se compone de los números  $1, 2, \dots, n$  tomados de uno en uno en orden arbitrario. En cada de estas sucesiones encerramos entre paréntesis, comenzando por el principio,  $b_1$  veces cada número,  $b_2$  veces cada dos números, etc.,  $b_n$  veces cada  $n$  números. Las sucesiones obtenidas con los paréntesis puestos pueden considerarse como permutaciones divididas en ciclos. En tal caso cada permutación con el tipo dado  $(b_1, \dots, b_n)$  se encontrará  $\prod_{i=1}^n (i^{b_i} b_i!)$  veces. Por consiguiente, el número

de diferentes permutaciones de este tipo es igual a  $n! / \prod_{i=1}^n (i^{b_i} b_i!)$ .

2.96. La afirmación se deduce inmediatamente del resultado del problema 2.95.

2.97. Si  $a$  es un elemento fijo del conjunto  $G$ , la aplicación  $g \mapsto ag$ , definida para cualquier  $g \in G$ , será una permutación sobre el conjunto  $G$ . Al designarla con  $S(a)$ , notemos que si  $a$  recorre todo el conjunto  $G$ , entonces la aplicación  $a \mapsto S(a)$  es biunívoca, homomorfa ( $S(a)S(b) = S(ab)$ ) y tales permutaciones  $S(a)$  forman un grupo.

2.98. Si  $g \in G$ , entonces el orden de  $g$  es un número entero positivo mínimo  $k$  tal que  $g^k = e$ , donde  $e$  es el elemento unidad del grupo  $G$ . La permutación  $S(g)$  divide  $G$  en ciclos, cuyas longitudes son todas iguales a  $k(g)$ : si  $p$  es un elemento del conjunto  $G$ , entonces pertenece al ciclo  $p \mapsto gp \mapsto g^2p \mapsto \dots \mapsto g^{k(g)}p = p$ .

De aquí se deduce que  $n$  se divide por  $k(g)$  y que la permutación  $S(g)$  parte  $G$  en  $n/k(g)$  ciclos de longitud  $k(g)$ . De este modo,

$$P_G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} [x_{k(g)}]^{n/k(g)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} v(d) (x_d)^{n/d}.$$

2.99. Si  $g = e^{2\pi ij/n}$ , el orden del elemento  $g$  es igual a  $k(g) = n/(n, j)$ . A continuación aprovechamos el resultado del problema 2.98.

2.100. 12 revoluciones del tetraedro pueden dividirse en tres categorías:

- 1) idéntica;
- 2) 8 revoluciones a  $120^\circ$  alrededor de un eje que pasa por el vértice y el centro de la cara opuesta;
- 3) 3 revoluciones a  $180^\circ$  alrededor de un eje que pasa por el centro de las aristas opuestas.

Por eso,  $P_G = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$ .

2.101.  $P_G = (x_1^6 + 8x_2^3 + 3x_1^2x_2^2)/12$ .

2.102.  $P_G = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$ . Aquí podemos aprovechar el hecho de que el poliedro regular, dual respecto de un tetraedro, es el mismo tetraedro.

2.103. 24 revoluciones del cubo pueden dividirse en cinco partes:

- 1) idéntica;
- 2) 3 giros en  $180^\circ$  alrededor de los ejes que unen los centros de las caras opuestas;
- 3) 6 giros en  $90^\circ$  alrededor de las rectas que unen los centros de las caras opuestas;
- 4) 6 giros en  $180^\circ$  alrededor de las rectas que unen los centros de las aristas opuestas;
- 5) 8 giros en  $120^\circ$  alrededor de las rectas que unen los vértices opuestos.

La permutación 1) da 8 ciclos de longitud 1. La permutación 2) da 4 ciclos de longitud 2. La permutación del tipo 3) da 2 ciclos de longitud 4. La permutación del tipo 4) da 4 ciclos de longitud 2. La permutación del tipo 5) da 2 ciclos de longitud 1 y 2 ciclos de longitud 3. Por eso  $P_G = (x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_3^2 + 8x_1^2x_2^2)/24$ .

2.104.  $P_G = (x_1^{12} + 3x_2^6 + 6x_3^4 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_3^3)/24$ .

2.105.  $P_G = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_3^3 + 8x_2^3)/24$ .

2.106.

$$\exp \left( zx_1 + \frac{z^2x_2}{2} + \frac{z^3x_3}{3} + \dots \right) = \sum_{b_1=0}^{\infty} \frac{z^{b_1}x_1^{b_1}}{b_1!} \sum_{b_2=0}^{\infty} \frac{z^{2b_2}x_2^{b_2}}{b_2!2^{b_2}} \dots$$

El coeficiente de  $z^n$  se obtiene por sumación de las expresiones

$$x_1^{b_1}x_2^{b_2} \dots (b_1!b_2!2^{b_2}b_3!3^{b_3} \dots)^{-1}$$

respecto de toda clase de números enteros no negativos  $b_1, b_2, \dots$ , que satisfacen la condición  $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots = n$ . Ahora la afirmación se desprende inmediatamente del resultado del problema 2.95.

2.109.

$$|\{(g, s): g \in G, s \in S, \pi_g s = S\}| = \sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{s \in S} \eta(s),$$

donde  $\eta(s) = |\{g \in G: \pi_g s = s\}|$ ,  $G_s = \{g \in G: \pi_g s = s\}$  es un subgrupo del grupo  $G$  de orden  $\eta(s)$ .

Si  $s_1 \sim s$  (es decir,  $\exists h \in G: \pi_h s_1 = s$ ), entonces

$$|\{g \in G: \pi_g s_1 = s\}| = \eta(s).$$

Por consiguiente,  $G$  puede ser dividido en subconjuntos, cada uno de los cuales se compone de  $\eta(s)$  elementos y corresponde exactamente a un elemento de aquella clase de equivalencia en la que figura  $s$ . Por eso tenemos

$$\eta(s) = \frac{|G|}{\text{número de equivalentes en la clase de equivalencia que contiene } s}.$$

De aquí se deduce la afirmación del lema.

2.110.  $S$  se divide en 2 clases de equivalencia  $\{a, b\}$  y  $\{c, d\}$ . El problema puede resolverse empleando el lema de Bernsайд:

$$\psi(\pi_1) = 4; \psi(\pi_2) = 2; \psi(\pi_3) = 2; \psi(\pi_4) = 0.$$

De aquí, el número de clases de equivalencia es igual a  $(4 + 2 + 2 + 0)/4 = 2$ .

2.111.  $G = \{\pi_1, \pi_2\}$ ;  $\pi_1$  es una permutación idéntica,  $\pi_2$  es el cambio de lugar de dos letras extremas. Según el lema de Bernsайд, tenemos: el número de clases de equivalencia es igual a  $(\psi(\pi_1) + \psi(\pi_2))/2 = (8 + 4)/2 = 6$ .

2.112. Un collar puede ser pintado de tres colores empleando  $3^5 = 243$  métodos.  $G = \{\pi_1, \dots, \pi_5\}$ , donde  $\pi_i$  es el giro del collar en sentido horario en un ángulo de  $360^\circ (i-1)/5$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Es evidente que  $\psi(\pi_1) = 243$ ;  $\psi(\pi_2) = \dots = \psi(\pi_5) = 3$ . Por consiguiente, el número de diferentes collares es igual, según el lema de Bernsайд, a  $(243 + 3 + 3 + 3 + 3)/5 = 51$ .

2.113.  $(n-1)!$

2.115.  $\pi_1$  es una transformación idéntica,  $\pi_2$  es una transformación que vuelca «al revés» aquellos números, para los cuales esto resulta posible (los demás números la transformación los deja intactos).  $10^5 - 5^5$  números contienen al menos una de las cifras 2, 3, 4, 5, 7.  $3 \times 5^2$  números se leen de un modo igual, sean éstos en la forma normal o volcada, por ejemplo 16891. Por eso,  $\psi(\pi_2) = (10^5 - 5^5) + 3 \cdot 5^2$ ;  $\psi(\pi_1) = 10^5$ . Así pues, harán falta  $1/2 \cdot (10^5 + 10^5 - 5^5 + 3 \times 5^2) = 98475$  hojas.

2.116. En nuestro problema hay 10 clases de equivalencia:

- 1) todas las caras son rojas (potencia 1);
- 2) cinco caras son rojas, una azul (potencia 6);
- 3) dos caras opuestas son azules, las otras cuatro, rojas (potencia 3);
- 4) dos caras adyacentes son azules, las otras cuatro son rojas (potencia 12);
- 5) tres caras que tienen un vértice común son rojas, las tres restantes, azules (potencia 8);
- 6) dos caras opuestas y una restante son rojas, las tres demás son azules (potencia 12);
- 7) — 10) se obtienen de 4) — 1) por sustitución de las palabras «roja» y «azul».

2.117.

$$f_1(g) = f_2, \quad g \in G \Rightarrow \prod_{d \in D} \omega(f_1(d)) = \prod_{d \in D} \omega(f_1(gd)) = \prod_{d \in D} \omega(f_2(d)).$$

$$2.118. \text{ a) } \text{Inv } R^D = \sum_f W(f) = \sum_f \prod_{d \in D} \omega(f(d)) = \left[ \sum_{r \in D} \omega(r) \right]^{|D|}.$$

b) Se obtiene de un modo análogo, al analizar un producto completo.

2.119. Aquí  $D$  es un conjunto de las caras del tetraedro;  $G$  es el grupo de revoluciones;  $R$  es un conjunto de dos colores: rojo y azul,  $P_G(x_1, \dots, x_4) = (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)/12$ . De acuerdo con el teorema de Polya, el número de diferentes clases de equivalencia es igual a  $P_G(2, 2, 2, 2) = 5$ .

2.120. Aquí  $D$  es un conjunto de caras del cubo;  $G$  es el grupo de revoluciones;  $R$ , el conjunto de dos colores,

$$P_G(x_1, \dots, x_6) = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_1^2 + 8x_2^3)/24.$$

De acuerdo con el teorema de Polya, el número de diferentes métodos de coloración es igual a  $P_G(2, 2, \dots, 2) = 10$ .

2.121.  $D$  es el conjunto de caras del cubo,  $G$  es el grupo de revoluciones,  $R$  es el conjunto de dos colores: rojo y azul,

$$P_G = (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)/24.$$

Asignemos el peso  $a$  al color rojo y  $b$ , al color azul. Según el teorema de Polya, el inventario de clases de equivalencia es igual a

$$[(a+b)^6 + 3(a+b)^2(a^2+b^2)^2 + 6(a+b)^2(a^4+b^4) + 6(a^2+b^2)^3 + 8(a^3+b^3)^2]/24.$$

El coeficiente de  $a^4b^2$  es igual a  $(15 + 9 + 6 + 18 + 0)/24 = 2$ . Por consiguiente, existen exactamente dos clases de equivalencia de las funciones, para las cuales 4 caras están pintadas de color rojo.

2.123. Supongamos que  $x_1 \sim x_2$  y  $x_1 < x_2$  para ciertos  $x_1, x_2 \in X$ . En este caso existe un  $g \in L$  tal que  $gx_1 = x_2$ . De aquí obtenemos  $x_1 < gx_1 < g^2x_1 < \dots < g^{k-1}x_1 < g^kx_1 = x_1$ , siempre que  $x_1$  pertenece al ciclo de longitud  $k$  de la permutación  $g$ . Tomando en consideración la transitividad, tenemos  $x_1 < x_1$ , lo que es imposible.

2.124. Sea  $C \leq C'$  y  $C' \leq C$ , es decir, existen tales  $x_1, x_2 \in C$  y  $x'_1, x'_2 \in C'$  que  $x_1 \leq x'_1, x_2 \geq x'_2$  para ciertas  $C, C' \subset X/L$ . Entonces, existe un  $g \in L$  tal que  $x_2 = gx_1$ , y tenemos  $x'_2 \leq x_2 \leq gx'_1$ , es decir,  $x'_2 \leq gx'_1$ , donde  $gx'_1 \in C'$ . Del problema 2.123 tenemos  $x'_2 = gx'_1 = x_2$  y  $C = C'$ . Con una facilidad aún mayor se comprueban las demás condiciones.

2.126. Sea  $X = M(D, R)$  y supongamos que  $G$  actúa sobre  $X$  de la manera siguiente:  $\pi_g f = fg^{-1}$ ; es fácil demostrar que  $\pi$  es un homomorfismo de  $G$  en el grupo de permutaciones  $M(D, R)$ . Según el lema de Bernsайд (problema 2.109) llegamos a que el número de clases de equivalencia de las funciones isótonas es igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g),$$

donde  $\psi(g) = \{f \in M(D, R): fg^{-1} = f\} = \{f \in M(D, R): f \text{ es constante en los ciclos } g\} = |M(D/\{g\}, R)|$ .

2.127. Supongamos que en el problema anterior  $D$  es una anticadena y  $R$ , una cadena. Entonces

$$M(D, R) = R^D, \quad M(D/\{g\}, R) = R^{D/(g)}.$$

Si  $(b_1, b_2, \dots)$  es el tipo de la permutación  $g$ , tendremos

$$R^{D/(g)} = |R|^{b_1+b_2+\dots}$$

## MÉTODOS LÓGICOS

### § 1. Método de inclusión y exclusión

3.1. Designemos  $n = \left| \sum_{i=1}^m S_i \right|$  y sea  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) una propiedad consistente en que el elemento elegido pertenece al conjunto  $S_i$ . Entonces, tomando en consideración las designaciones adoptadas  $N_{i_1, \dots, i_h} = |S_{i_1}, \dots, S_{i_h}|$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ , y de conformidad con la fórmula de inclusión y exclusión tendremos

$$0 = N(0) = \left| \sum_{i=1}^m S_i \right| - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} |S_{i_1}| + \dots + (-1)^m |S_1 \dots S_m|.$$

3.2. Las permutaciones de los elementos del  $m$ -conjunto dado las tomaremos por elementos de un  $m!$ -conjunto. Designemos  $n = m!$ , y sea  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) una propiedad de la permutación consistente en que el elemento del  $m$ -conjunto que lleva el número  $i$  queda, como resultado de la permutación dada, en su lugar. Entonces, tomando en consideración las designaciones adoptadas, tendremos

$$N_{i_1, \dots, i_h} = (m-k)!, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h (m-k)!.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtendremos la respuesta:

$$N(r) = \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_m^h (m-k)! = \frac{m!}{r!} \sum_{s=0}^{m-r} \frac{(-1)^s}{s!}.$$

3.3. Designemos por  $p_{\bar{\alpha}}$ , donde  $\bar{\alpha} = (i_1, \dots, i_d)$ , la propiedad del juego consistente en que en la primera permutación el elemento con el número  $i_1$  queda en su lugar, etc., en la  $d$ -ésima permutación el elemento con el número  $i_d$  queda en su lugar. Entonces, el número de juegos que poseen las propiedades  $p_{\bar{\alpha}_1}, \dots, p_{\bar{\alpha}_h}$  ( $1 \leq k \leq m$ ) será igual a

$$N_{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_h} = \{(m-k)!\}^d, \quad \sum_{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_h} N_{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_h} = (C_m^h)^d \{(m-k)!\}^d.$$

Al aplicar la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos la respuesta:

$$N(r) = \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r (C_m^h)^d \{(m-k)!\}^d, \quad 0 \leq r \leq m.$$

3.4. Tomemos por elementos del  $m^n$ -conjunto diferentes repartimientos de  $n$  bolas por  $m$  cajones. Sea  $p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) una propiedad consistente en que

con el repartimiento dado el cajón con el número  $i$  queda vacío. Entonces la cantidad de repartimientos que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ ), es igual a  $N_{i_1, \dots, i_h} = (m - k)^n$  y

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h (m - k)^n.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos el resultado:

$$N(r) = \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_m^h (m - k)^n = C_m^r \sum_{s=0}^{m-r} (-1)^s C_{m-r}^s (m - r - s)^n.$$

3.5. Sea  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) una propiedad del juego consistente en que la bola con el número  $i$  en dicho juego no está contenida. Entonces, el número de juegos que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ ) es igual a

$$N_{i_1, \dots, i_h} = (C_{m-h}^s)^d, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h (C_{m-h}^s)^d.$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la respuesta:

$$\begin{aligned} N(r) &= \sum_{h=r}^m (-1)^{h-r} C_h^r C_m^h (C_{m-h}^s)^d = \\ &= C_m^r \sum_{t=0}^{m-r-s} (-1)^t C_{m-r}^t (C_{m-r-t}^s)^d, \quad 0 \leq r \leq m. \end{aligned}$$

En particular, el número de juegos en los que se encuentran todas las bolas es igual a

$$N(0) = \sum_{h=0}^{m-s} (-1)^h C_m^h (C_{m-h}^s)^d.$$

3.6. Examinemos un  $C_m^n$ -conjunto de  $n$ -muestras del  $m$ -conjunto y designemos por  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) la propiedad consistente en que en la muestra citada está contenido el elemento con el número  $i$ . Entonces el número de muestras que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ ) es igual a

$$N_{i_1, \dots, i_h} = C_{m-h}^{n-h}, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h C_{m-h}^{n-h}$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad:

$$0 = N(0) = \sum_{h=0}^m (-1)^h C_m^h C_{m-h}^{n-h}.$$

3.7. Examinemos un  $C_{n+m-1}^n$ -conjunto de toda clase de  $n$ -muestras con repetición del  $(m)$ -conjunto y supongamos que  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) es una propiedad consistente en que la citada muestra no contiene elemento con el número  $i$ . Entonces el número de muestras que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ ) es igual a

$$N_{i_1, \dots, i_h} = C_{m+n-h-1}^{n-h}, \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} N_{i_1, \dots, i_h} = C_m^h C_{m+n-h-1}^{n-h}.$$



Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad

$$0 = N(0) = \sum_{h=0}^m (-1)^h C_m^h C_{m+n-h}^{n-h}.$$

3.8. Se deduce del problema 3.5, puesto que si  $sd < m$ , entonces  $N(0) = 0$ .

3.9. Veamos un conjunto  $S$  de particiones del número  $n$  en  $m$  sumandos enteros no negativos  $n = n_1 + \dots + n_m$ . Tiene lugar la igualdad

$$\sum_{(n_1, \dots, n_m) \in S} \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} = \underbrace{(1 + \dots + 1)^n}_{m \text{ veces}} = m^n.$$

Designemos por  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) la propiedad de la partición  $n = n_1 + \dots + n_m$ , consistente en que  $n_i = 0$  y, supongamos que el peso de cada partición  $n_1, \dots, n_m$  es igual a  $n!/(n_1! \dots n_m!)$ . El peso sumario de la totalidad de particiones que poseen  $k$  propiedades será  $V(k) = \sum n!/(n_1! \dots n_m!)$ , donde la sumación se realiza respecto de toda clase de particiones del número  $n$  en  $m - k$  sumandos enteros no negativos, es decir,  $V(k) = (m - k)^n$ .

Aplicando la fórmula generalizada de inclusión y exclusión, obtenemos la identidad

$$W(0) = \sum_{\substack{n=n_1+\dots+n_m \\ n_1>0, \dots, n_m>0}} \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} = \sum_{h=0}^m (-1)^h C_m^h (m - k)^n.$$

3.10. Se deduce del problema 3.9, puesto que si  $n < m$ , entonces  $W(0) = 0$ .

3.11. Se deduce del problema 3.9, puesto que la cantidad de particiones ordenadas del número  $m$  en  $m$  sumandos enteros positivos es igual a uno y el peso de esta partición  $m = 1 + \dots + 1$  es igual a  $m!$ , es decir,  $W(0) = m!$ .

3.12. Designemos por  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) la propiedad consistente en que el número dado se divide por  $q_i$ . La cantidad de números que no son superiores a  $n$  y que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$  es igual a  $n/(q_{i_1} \dots q_{i_h})$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ ). Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la igualdad

$$N(0) = \varphi(n) = \sum_{h=0}^m (-1)^h \sum \frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_h}} = n \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_m}\right).$$

3.13. Designemos por  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) la propiedad consistente en que el número dado se divide por  $q_i$ . Entonces la cantidad de números que no sobrepasan de  $n$  y que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$  ( $1 \leq i_1 \leq \dots < i_h \leq m$ ) es igual a  $N_{i_1, \dots, i_h} = [n/(q_{i_1} \dots q_{i_h})]$ . De acuerdo con la fórmula de inclusión y exclusión, la cantidad de números que no sobrepasan de  $n$  y no poseen ninguna de las propiedades  $p_1, \dots, p_m$  (es decir, la cantidad de números primos que son superiores a  $\sqrt{n}$ , pero no sobrepasan de  $n$ ) es igual a

$$N(0) = \pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = (n - 1) + \sum_{h=1}^m (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} \left[ \frac{n}{q_{i_1} \dots q_{i_h}} \right].$$

## 3.14.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{h=0}^{\infty} (2^{-h} - (2^{-2h} + 2^{-3h} + 2^{-6h}) + (2^{-10h} + 2^{-6h} + 2^{-15h}) - 2^{-30h} = \\
 &= 2 - \frac{1}{1-2^{-2}} - \frac{1}{1-2^{-3}} - \frac{1}{1-2^{-5}} + \\
 &+ \frac{1}{1-2^{-10}} + \frac{1}{1-2^{-6}} + \frac{1}{1-2^{-15}} - \frac{1}{1-2^{-30}}.
 \end{aligned}$$

3.15. Designemos con  $S$  el conjunto de todas las  $m$ -muestras con repetición de los números  $1, \dots, m$ . Supongamos que el peso de cada una de tal muestra  $i_1, \dots, i_m$  es igual a  $a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m}$ . Designemos por  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) la propiedad consistente en que la muestra dada no contiene los números  $i$ . Entonces la suma de pesos de las muestras que poseen las propiedades  $p_{i_1}, \dots, p_{i_h}$  será igual a

$$S(A_{i_1, \dots, i_h}) = \prod_{j=1}^m \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_h}}^m a_j, i \right).$$

Al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión, obtenemos la igualdad

$$W(0) = \text{per } A = S(A) + \sum_{h=1}^{m-1} (-1)^h \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m} S(A_{i_1, \dots, i_h}).$$

3.16. Por definición de permanente de una matriz,  $\text{per } A = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m}$ , donde la sumación se realiza respecto de toda clase de  $m$ -muestras sin repetición del  $n$ -conjunto  $1, \dots, n$ . Si la muestra  $i_1, \dots, i_m$  es de tal índole que  $a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m} = 1$ , entonces, de conformidad con la definición de la matriz de incidencia,  $s_{i_h} \in S_h$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Por consiguiente, el sistema  $s_{i_1}, \dots, s_{i_m}$  es un s.r.d. para  $M(S)$ . Si para la muestra  $i_1, \dots, i_m$  se tiene  $a_{1,i_1} \dots a_{m,i_m} = 0$ , entonces el sistema  $s_{i_1}, \dots, s_{i_m}$  no puede ser un s.r.d. para  $M(S)$ . Por eso el número de s.r.d. para  $M(S)$  es igual a  $\text{per } A$ .

3.17. La matriz de incidencia para  $M(S)$  tiene por expresión

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Calculemos  $\text{per } A$  con ayuda de la fórmula del problema 3.15. En las designaciones del problema 3.15 tenemos

$$\begin{aligned}
 S(A_{i_1, \dots, i_k}) &= (m-k-1)^{m-k} (m-k)^k, \\
 \sum_{i_1, \dots, i_k} S(A_{i_1, \dots, i_k}) &= C_m^k (m-k-1)^{m-k} (m-k)^k.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, según el problema 3.16, el número de s.r.d. para  $M(S)$  es igual a

$$\text{per } A = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^k (m-k)^k (m-k-1)^{m-k}.$$

## § 2. Sistemas de representantes de los conjuntos

3.18. Supongamos que no existe un s.r.d. para  $M(S)$ . Entonces, según el teorema de Hall, existen subconjuntos  $S_{i_1}, \dots, S_{i_k} (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m)$  tales que  $p = |S_{i_1} + \dots + S_{i_k}| < k$ . Por hipótesis del problema cada uno de los conjuntos  $S_1, \dots, S_m$  contiene exactamente  $r$  elementos y todo elemento se contiene exactamente en  $r$  conjuntos. Por eso, el número de elementos (tomándose en consideración las repeticiones) que están contenidos en la unión de conjuntos  $S_{i_1}, \dots, S_{i_k}$ , o bien el número de unidades contenidas en  $k$  filas de la matriz de incidencia para  $M(S)$  es igual a  $k \cdot r$ . Por otra parte, este número no es superior a  $p \cdot r$ . La contradicción obtenida demuestra la existencia del s.r.d. para  $M(S)$ .

3.19. Demostremos que  $|A| = |B|$ . Denotemos los elementos de los conjuntos  $A = (a_1, \dots, a_m)$  y  $B = (b_1, \dots, b_n)$  por puntos en un plano, y la correspondencia entre ellos, por segmentos que unen dichos puntos. El número de segmentos que tienen por origen los puntos del conjunto  $A$  es igual a  $km$ , y el número de los que tienen por origen los puntos del conjunto  $B$  es igual a  $kn$ . Por consiguiente, se verifica la igualdad  $km = kn$ , o bien  $|A| = |B|$ .

Definamos la matriz  $C = (c_{ij}) (i, j = 1, \dots, m)$  del modo siguiente:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si existe correspondencia entre los elementos } a_i \text{ y } b_j, \\ & i, j = 1, \dots, m, \\ 0 & \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

Por hipótesis la matriz  $C$  es de tal índole que en cada fila y en cada columna se contienen exactamente  $k$  unidades. Del problema 3.18 se deduce que per  $C \neq 0$ . Por eso existe una permutación  $i_1, \dots, i_m$  de números  $1, \dots, m$  tal que  $c_{1,i_1} \cdot \dots \cdot c_{m,i_m} = 1$ . Al elemento  $b_{i_\alpha}$  pongámosle en correspondencia el elemento  $a_\alpha (\alpha = 1, \dots, m)$ . Hemos establecido, pues, la correspondencia biunívoca entre  $A$  y  $B$ .

3.20. Se desprende del problema 3.19.

3.21. Designemos por  $S_i (i = 1, \dots, n)$  un conjunto de números de  $1$  a  $n$  que no están contenidos en la  $i$ -ésima columna de un rectángulo latino dado, y  $M(S) = (S_1, \dots, S_n)$ .

La matriz de incidencia para  $M(S)$  contiene exactamente  $n - m > 0$  unidades en cada columna y en cada fila. Por eso, según se deduce del problema 3.18, existe un s.r.d.  $s_1, \dots, s_n$  para  $M(S)$ . Agreguemos al rectángulo latino dado la fila  $s_1, \dots, s_n$  y obtendremos  $(m + 1) \times n$  rectángulos latinos.

De la afirmación demostrada se deduce que todo rectángulo latino puede ser ensanchado hasta que se obtenga un cuadrado latino.

3.22. Designemos con  $A = (a_{ij}) (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$  una matriz arbitrariamente elegida;  $M = s + t$  representa el número mínimo de filas con los números  $i_1, \dots, i_s$  y de columnas con los números  $j_1, \dots, j_t$  que contienen todos los elementos no nulos;  $N$  es el número máximo de elementos, de los cuales ningún par se contiene en una fila y en una columna.

Examinemos una matriz  $A'$  de dimensión  $s \times (n - t)$  formada por los elementos de la matriz  $A$  que se disponen en la intersección de las filas con los números  $i_1, \dots, i_s$  y de las columnas con números distintos de  $j_1, \dots, j_t$ . Designemos las filas de esta submatriz por  $S_1, \dots, S_s$ . Entonces, para cualquier juego de índices  $\alpha_1, \dots, \alpha_h | S_{\alpha_1} + \dots + S_{\alpha_h} | \geq k$ , pues de lo contrario podríamos sustituir las correspondientes  $k$  filas de la matriz  $A$  por un número menor de columnas que cubren en la matriz  $A$  los mismos elementos no nulos, lo que contradice el hecho de que  $M$  es el número mínimo. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Hall, en la matriz  $A'$  existen  $s$  elementos no nulos, de los cuales ningún par se contiene en una columna y en una fila. Análogamente, al analizar la matriz  $A''$  de dimensión  $(m - s) \times t$ , compuesta de los ele-

mentos de la matriz  $A$  que se encuentran en los lugares donde se intersecan entre sí las filas con números, distintos de  $i_1, \dots, i_s$ , y las columnas con los números  $j_1, \dots, j_t$ , hallamos  $t$  elementos no nulos, de los cuales ningún par está contenido en una fila y en una columna.

Así pues, hemos hallado  $s + t = M$  elementos no nulos de la matriz  $A$ , de los cuales ningún par está contenido en una fila y en una columna. Por consiguiente, siendo  $N$  el número máximo, se verifica la desigualdad  $N \geq M$ . Por cuanto la desigualdad inversa  $M \geq N$  no causa dudas algunas, entonces  $M = N$ .

3.23. El número mínimo de filas y de columnas que contienen todos los elementos no nulos de la matriz  $A$  no sobrepasa de  $m - s + m - t < m$ . Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de König (problema 3.22), para cualquier permutación  $i_1, \dots, i_m$  de los números  $1, \dots, m$  tenemos  $a_{1,i_1} \dots \dots a_{m,i_m} = 0$ . De aquí obtenemos  $A = \text{per } A = 0$ .

3.24. Designemos  $S_l = \{A_j \mid A_j \cap B_l \neq \emptyset\}$ ,  $l = 1, \dots, m$ . Sea  $i_1, \dots, i_h$  una  $k$ -muestra arbitraria de  $1, \dots, m$ . Si  $|S_{i_1} + \dots + S_{i_h}| < k$ , entonces los conjuntos  $B_{i_1}, \dots, B_{i_h}$  están contenidos en la unión de menos de  $k$  conjuntos  $A_1, \dots, A_m$ , lo que contradice la hipótesis del problema. Por consiguiente, de conformidad con el teorema de P. Hall, existe un s.r.d.  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$  para  $S_1, \dots, S_m$ . De la definición de los conjuntos  $S_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) obtenemos  $A_{i_h} \cap B_h \neq \emptyset$  ( $h = 1, \dots, m$ ). Sea  $x_h \in A_{i_h} \cap B_h$  ( $h = 1, \dots, m$ ). Entonces,  $x_1, \dots, x_m$  es un s.r.d. para  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$  y  $B_1, \dots, B_m$ .

3.25. Para cualquier  $k$ -muestra  $i_1, \dots, i_h$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq m$ ) de  $1, \dots, m$  tenemos  $|A_{i_1} + \dots + A_{i_h}| = |B_{i_1} + \dots + B_{i_h}| = kr$ . Por eso, el conjunto  $A_{i_1} + \dots + A_{i_h}$  no puede contener más que  $k$  de los conjuntos  $B_1, \dots, B_m$ . Por consiguiente, según el problema 3.24, existe un s.r.d. para  $A_1, \dots, A_m$  y  $B_1, \dots, B_m$ .

3.26. Se deduce del problema 3.25.

3.27. Sea  $i_1, \dots, i_h$  cierta  $k$ -muestra de  $1, \dots, m$  y supongamos que  $|S_{i_1} + \dots + S_{i_h}| = n$ . El número de  $p$ -combinaciones del  $n$ -conjunto es igual a  $C_n^p$ . Si los conjuntos  $S_{i_1}, \dots, S_{i_h}$  tienen un s.p.r.d., entonces el número  $n$  ha de satisfacer la desigualdad  $C_n^p \geq k$ .

### § 3. Teorema y números de Ramsey

3.28. Sea dada cierta coloración de las aristas de un 6-grafo completo. Veamos un vértice arbitrario  $P_0$ . De cinco aristas que tienen por origen este vértice, al menos tres están pintadas de un mismo color. Convergamos en considerar que las aristas  $P_0P_1, P_0P_2$  y  $P_0P_3$  son azules. Si una de las aristas  $P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3$ , por ejemplo,  $P_1P_2$ , es azul, entonces el 3-grafo con vértices  $P_0, P_1, P_2$  es cromático; en el caso contrario el 3-grafo con vértices  $P_1, P_2, P_3$  es cromático rojo.

3.29. Pintemos los lados de un pentágono regular de un color y las diagonales, de otro.

3.30. Se deduce del problema 3.28.

3.31. De los problemas 3.28 y 3.29 se deduce que  $R(3, 3; 2) = 6$ . Demostremos la desigualdad

$$R(k, m; 2) \leq R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2), \quad k > 2, m > 2,$$

de la cual se desprende la afirmación del problema. Observemos que  $R(2, m; 2) = m$  y  $R(k, 2; 2) = k$ . Apliquemos la inducción matemática por el número  $s = k + m$ . Si  $s = 6$ , es decir, si  $m = k = 3$ , entonces, según lo demostrado

anteriormente,

$$6 = R(3, 3; 2) \leq R(3, 2; 2) + R(2, 3; 2) = 3 + 3.$$

Supongamos que la existencia de los números  $R(k-1, m; 2)$  y  $R(k, m-1; 2)$  está establecida. Examinemos un  $n$ -grafo completo, donde  $n = R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2)$ , cuyas aristas están pintadas en dos colores (rojo y azul). Denotemos por  $p$  un vértice arbitrario del grafo; por  $T_1$ , el conjunto de vértices unidos con la  $p$ -ésima arista roja; por  $T_2$ , el conjunto de vértices unidos con la  $p$ -ésima arista azul;  $n_1 = |T_1|$ ,  $n_2 = |T_2|$ . En tal caso resulta válida la igualdad  $n = n_1 + n_2 + 1 = R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2)$ .

Analicemos dos casos:

a)  $n_1 \geq R(k-1, m; 2)$ ,  $n_2 < R(k, m-1; 2)$ ;

b)  $n_2 \geq R(k, m-1; 2)$ ,  $n_1 < R(k-1, m; 2)$ .

En el caso a), por definición del número  $R(k-1, m; 2)$ , en el subgrafo  $T_1$  o bien existe un  $m$ -subgrafo cromático azul o bien un  $(k-1)$ -subgrafo cromático rojo. En el segundo caso agreguemos al  $(k-1)$ -subgrafo cromático rojo el vértice  $p$  y obtendremos el  $k$ -subgrafo cromático rojo.

El caso b) se analiza de un modo análogo.

3.32. La desigualdad no rigurosa está demostrada en el problema 3.31.

Demostremos que si  $R(k-1, m; 2) = 2p$  y  $R(k, m-1; 2) = 2q$ , donde  $p$  y  $q$  son unos números naturales, entonces es válida la siguiente desigualdad rigurosa:

$$R(k, m; 2) < R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2), \quad k > 2, m > 2.$$

Sea  $n = 2p + 2q - 1$  y sea  $P$  un vértice arbitrario del  $n$ -grafo completo;  $n_1$ , el número de aristas rojas que tienen por origen  $P$ ;  $n_2$ , el número de aristas azules que tienen por origen  $P$ . En este caso es válida la igualdad

$$n - 1 = n_1 + n_2 = R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2) - 2.$$

Son posibles tres casos:

a)  $n_1 \geq R(k-1, m; 2)$ ,  $n_2 < R(k, m-1; 2)$ ;

b)  $n_2 \geq R(k, m-1; 2)$ ,  $n_1 < R(k-1, m; 2)$ ;

c)  $n_1 = 2p - 1$ ,  $n_2 = 2q - 1$ .

Los dos casos primeros se han analizado en el problema 3.31. Si para todos los vértices del grafo tiene lugar el caso c), el número de extremos rojos de las aristas es igual a  $(2p + 2q - 1)(2p - 1)$ , mas este número debe ser par.

3.33. Apliquemos la inducción matemática para el número  $s = k + m$ . Si  $s = 6$ , es decir, si  $k = m = 3$ , la desigualdad  $6 = R(3, 3; 2) \leq C_{3+3-2}^{3+3-2} = 6$  se verifica.

Supongamos que  $R(k-1, m; 2) \leq C_{k+m-3}^{k-2}$ ,  $R(k, m-1; 2) \leq C_{k+m-3}^{k-1}$ . Entonces, haciendo uso de la desigualdad del problema 3.32 y de la propiedad de los coeficientes binomiales, obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} R(k, m; 2) &\leq R(k-1, m; 2) + R(k, m-1; 2) \leq \\ &\leq C_{k+m-3}^{k-2} + C_{k+m-3}^{k-1} = C_{k+m-2}^{k-1} \end{aligned}$$

3.34. *Indicaciones.* Razonando igual que en la demostración del problema 3.31, establézcase la validez de la desigualdad

$$R(k_1, \dots, k_m; 2) \leq R(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m; 2) + \dots + R(k_1, \dots, k_{m-1}, k_m - 1; 2), \quad k_i > 2, \quad i = 1, \dots, m.$$

3.35. *Indicaciones.* Hágase uso de la desigualdad del problema 3.34 y de la propiedad de los coeficientes polinomiales

$$\frac{k!n!}{n_1! \dots n_m!} = \sum_{s=1}^m \frac{(n-1)!}{n_1! \dots n_{s-1}! (n_s - 1)! n_{s+1}! \dots n_m!}, \quad n = n_1 + \dots + n_m.$$

3.36. Numeremos los vértices del 13-grafo con los números del 0 al 12 inclusive. Una arista que une los vértices con los números  $i$  y  $j$  se pintará de color rojo, siempre que  $i - j$  sea comparable con  $\pm 2 \text{ ó } \pm 3$  respecto del módulo 13, y las demás aristas se pintarán de color azul (fig. 3.1' y 3.2').

3.37. De los problemas 3.32 y 3.36 se deduce que

$$R(3, 4; 2) < R(3, 3; 2) + R(2, 4; 2) = 10,$$

$$R(3, 5; 2) > 13, \quad R(3, 5; 2) \leq R(2, 5; 2) + R(3, 4; 2) < 15.$$

Por eso, resultan válidas las igualdades  $R(3, 4; 2) = 9$  y  $R(3, 5; 2) = 14$ .

3.38. Numeremos los vértices del 17-grafo con los números del 0 al 16 inclusive. Vamos a pintar la arista que une los vértices con los números  $i$  y  $j$  de color rojo, siempre que la diferencia  $i - j$  sea un residuo cuadrático respecto

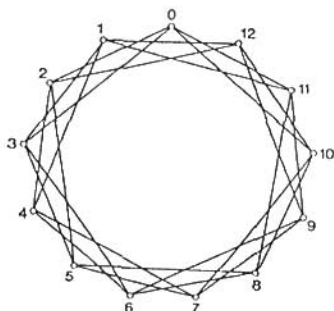


Fig. 3.1'.

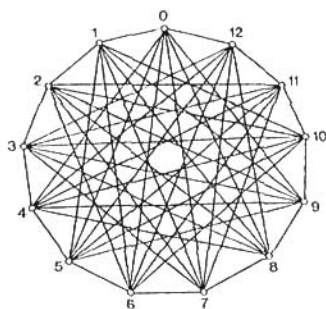


Fig. 3.2'.

del módulo 17, y en color azul, en el caso contrario. Supongamos que el sub-grafo con vértices  $a, b, c, d$  es cromático. Designemos:  $m = (a - c)/(a - b)$  y  $n = (a - d)/(a - b)$ . Entonces, los números  $m, n, m - 1, n - 1, m - n$  deben ser simultáneamente cuadráticos respecto del módulo 17, lo que es imposible, puesto que los residuos cuadráticos respecto del módulo 17 son los números 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16.

3.39. Del problema 3.38 se deduce que  $R(4, 4; 2) > 17$ . Por otra parte, de la desigualdad del problema 3.32 obtenemos una estimación superior:

$$R(4, 4; 2) \leq R(3, 4; 2) + R(4, 3; 2) = 18.$$

Comparando estas dos desigualdades, encontramos  $R(4, 4; 2) = 18$ .

3.40. Supongamos que las aristas del  $n$ -grafo completo se pintan casualmente en dos colores, con la particularidad de que la probabilidad de que una arista se pinte en color rojo es igual a  $p$ , y en color azul, a  $1 - p$ . Designemos por  $P(A)$  la probabilidad del suceso  $A$  y por  $M(\xi)$ , la esperanza matemática de la magnitud aleatoria  $\xi$ . Para una  $k$ -muestra  $i_1, \dots, i_k$  y una  $l$ -muestra  $j_1, \dots, j_l$  arbitrarias de  $1, \dots, n$  denotemos con  $\xi_{i_1, \dots, i_k}$  una magnitud aleatoria que toma el valor uno, si todas las aristas del grafo con vértices  $i_1, \dots, i_k$  están pintadas de rojo, y el valor cero, en el caso contrario; con  $\eta_{j_1, \dots, j_l}$  una magnitud aleatoria que toma el valor uno, si todas las aristas del grafo con vértices  $j_1, \dots, j_l$  están pintadas de azul y el valor nulo, en el caso contrario:

$$\xi = \sum_{i_1, \dots, i_k} \xi_{i_1, \dots, i_k} + \sum_{j_1, \dots, j_l} \eta_{j_1, \dots, j_l},$$

donde la sumación se realiza respecto de toda clase de  $k$  y  $l$ -muestras de  $1, \dots, n$ .

Calculemos la esperanza matemática  $\xi$ , aprovechando el hecho de que la esperanza matemática de una suma de magnitudes aleatorias es igual a la suma de las esperanzas matemáticas de dichas magnitudes:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{i_1, \dots, i_h} M(\xi_{i_1, \dots, i_h}) + \sum_{j_1, \dots, j_l} M(\eta_{j_1, \dots, j_l}) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_h} p(\xi_{i_1, \dots, i_h} = 1) + \sum_{j_1, \dots, j_l} p(\eta_{j_1, \dots, j_l} = 1) = \\ &= C_n^h p^{C_h^2} + C_n^l (1-p)^{C_l^2}. \end{aligned}$$

De la hipótesis del problema se desprende que  $M(\xi) < 1$ .

Si  $\xi$  no asume el valor igual a cero, entonces

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{C_n^h + C_n^l} i p(\xi = i) > \sum_{i=1}^{C_n^h + C_n^l} p(\xi = i) = 1,$$

lo que contradice la hipótesis del problema.

Por consiguiente, la magnitud aleatoria  $\xi$  puede tomar un valor igual a cero, es decir, existe tal coloración de las aristas del  $n$ -grafo para la cual todos los  $k$ -subgrafos no son cromáticos rojos y todos los  $l$ -subgrafos no son cromáticos azules. Por eso tiene lugar la desigualdad  $R(k, l; 2) > n$ .

3.41 Del problema 3.40 se deduce que si un número  $n$  satisface la desigualdad  $C_n^h p^{C_h^2} + C_n^l (1-p)^{C_l^2} < 1$ ,  $0 < p < 1$ , entonces  $R(k, k; 2) > n$ .

Sirviéndonos de la valoración para los coeficientes binomiales  $C_n^h < (c_1 n/k)^h$ , donde  $c_1 > 0$  es una constante, y poniendo  $p = 1/2$ ,  $n = k2^{h/2}/(2c)$ , tendremos la desigualdad requerida

$$C_n^h p^{C_h^2} + C_n^h (1-p)^{C_h^2} < \left(\frac{c_1 n}{k}\right)^h \frac{2}{2^{C_h^2}} < 1.$$

3.42. Observemos que si todos los cuadriláteros compuestos de los vértices del polígono  $n$  dado son convexos, entonces también convexo será el propio polígono  $n$ .

Sea  $N = R(n, 5; 4)$  y supongamos que están dados  $N$  puntos en un plano, de los cuales cualesquiera tres no yacen en una misma recta. Dividamos el  $C_N^4$ -conjunto de cuadriláteros en dos clases: convexos y no convexos. Entonces, de acuerdo con el teorema de Ramsey, existen o bien  $n$  puntos tales que todos los cuadriláteros con vértices en estos puntos son convexos, o bien existen cinco puntos tales que todos los cuadriláteros con vértices en estos puntos son no convexos. Lo último no es posible.

## TABLAS Y ESQUEMAS COMBINATORIOS

### § 1. Matrices especiales

$$4.1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Cada fila y cada columna de esta matriz contiene una unidad. Inter cambiando las filas y columnas, obtendremos una matriz en cuya diagonal principal se encontrarán sólo unidades. Su permanente es igual a 1.

4.3. Para la matriz  $A$  de la permutación  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  en la expresión,  $\det A = \sum (\pm) a_{1,1} \dots a_{l,n}$  solamente un término,  $a_{h_1 1} a_{h_2 2} \dots a_{h_n n}$ , es distinto de cero. Dicho término es igual a uno e integra la suma con el signo +, si la permutación es par y con el signo -, si la permutación es impar. La respuesta es:  $\det A = 1$ , si la permutación es par;  $-1$ , si la permutación es impar.

4.4. per  $A = 24$ .

4.5. per  $A = 8$ .

4.6.  $2^{(n^2+n)/2}$ . *Resolución.* Por encima de la diagonal principal y en la misma diagonal hay en la matriz  $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n(n+1)/2$  elementos. Cada uno de ellos puede ser o bien cero, o bien la unidad. En total existen  $2^{(n^2+n)/2}$  posibilidades. Los elementos por debajo de la diagonal se determinan unívocamente, en virtud de la simetría.

$$4.7. \binom{n}{k} \binom{n-k}{k}, \text{ donde } n \geq 2k. \quad 4.8. n!. \quad 4.9. \binom{m}{r} \binom{n}{r}.$$

4.10. Sea  $A$  una de tales matrices y supongamos que  $t$  elementos en ella son iguales a  $-1$ . Entonces, existen en la misma  $t+r$  elementos iguales a  $+1$ , y a  $2t+r = n^2$ , de donde  $t = (n^2 - r)/2$ . Por consiguiente, el número de matrices mencionadas es igual a cero, siempre que  $n^2 - r$  sea impar. En el caso contrario la respuesta será:  $\binom{n^2}{(n^2 - r)/2}$ .

$$4.11. \binom{n}{r}^n. \quad 4.12. 2^{n^2-n+1}.$$

$$4.13. \binom{(n^2-n)/2}{k/2} + \binom{(n^2-n)/2}{(k-n)/2}.$$

$$4.14. \binom{n(n-1)/2}{k} \binom{n(n-1)/2}{l}. \text{ El cálculo da } 90.$$

$$4.15. \binom{10}{7} \binom{5}{2}^5 = 12 \cdot 10^6. \quad 4.16. \binom{r}{l} \binom{n-r}{m-l}.$$



4.17. Todos los 6 términos del determinante no pueden tener un mismo signo (véase el problema 4.29). Si 5 términos del determinante tienen un mismo signo y el sexto término tiene otro, el determinante será par. El resultado análogo se obtiene en el caso cuando 4 términos tienen un mismo signo, y dos, otro signo, o bien cuando la cantidad de términos con signos opuestos es igual.

4.18. Existen  $\binom{n}{r}^m$  matrices que en cada una de las primeras  $m$  filas contienen  $r$  unidades, y  $\binom{n}{q}^{n-m}$  matrices, las cuales contienen en cada una de  $n-m$  filas  $q$  unidades. El número buscado de  $(0, 1)$ -matrices es igual a  $\binom{n}{r}^m \binom{n}{q}^{n-m}$ .

$$4.19. \binom{n-1}{r}^m \binom{n-1}{q}^{n-m}.$$

4.20. Existen  $\binom{m}{s}$  diferentes columnas de  $m$ -sitios ocupadas por ceros y unidades, en cada una de las cuales hay exactamente  $s$  unidades. A partir de tales columnas pueden formarse  $\binom{m}{s}^r$  matrices de dimensión  $m \times r$ . Luego, se tienen  $\binom{m(n-r)}{k}$  matrices de dimensión  $m \times (n-r)$ , cada una de las cuales contiene exactamente  $k$  unidades. Tomando cualquiera de las citadas  $m \times r$  matrices y agregándole  $(n-r)$  columnas de cualquier  $m \times (n-r)$  matriz, obtendremos la matriz buscada de dimensión  $m \times n$ . Por consiguiente existen  $\binom{m}{s}^r \binom{m(n-r)}{k}$  matrices de este tipo.

4.22. Dispongamos los números de un modo tal que  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Entonces, para  $i \geq j$ , tenemos  $b_i \leq b_j$ ; esto significa que  $a_{ij} = 0$  ( $i \geq j$ ), es decir, en la diagonal principal y por debajo de ésta figuran los ceros. El permanente de tal matriz es igual a cero, puesto que en cada término de la suma per  $A = \sum a_{1i_1} \dots a_{ni_{n}}$  el elemento  $a_{ni_{n}}$  (de la última fila en la matriz) es igual a cero.

4.23. per  $A = 9$ .

4.24. a) 0; b) 1; c) 8; d) 44; e) 11; f) 10.

4.25. El resultado se desprende de las definiciones de per  $A$  y de det  $A$ ; per  $A$  y det  $A$  son sumas algebraicas de unos mismos sumandos, mas en per  $A$  todos los sumandos son no negativos, mientras que en det  $A$  pueden haber también negativos.

4.26. La matriz  $A^2$  se compone de los elementos  $c_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj}$ . Por cuanto  $a_{pq} \geq 0$ , entonces para  $A^2 = 0$ , es decir, para  $c_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es necesario y suficiente que  $a_{ik}a_{kj} = 0$  ( $i, j, k = 1, \dots, n$ ). Esta condición es equivalente (dado que  $a_{pq} \geq 0$ ) a la siguiente:

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}a_{kj} \right) = 0, \text{ es decir, a la condición } \sum_{k=1}^n b_k a_k = 0.$$

4.27. El determinante no puede ser igual a 6, de lo contrario el producto de tres de sus términos  $a_{11}a_{22}a_{33}$ ,  $a_{12}a_{23}a_{31}$ ,  $a_{13}a_{21}a_{32}$  sería igual al producto de los tres términos restantes. Pero, el primero de estos productos es igual al producto de todos los nueve elementos de la matriz, y el segundo, al mismo producto, pero con el signo opuesto. El determinante no es igual a 5 (véase el problema 4.17), y el determinante, en el cual la diagonal principal está ocupada por  $-1$  y los demás lugares, por  $+1$ , es igual a 4.

4.28. Desarrollando per  $B_n$  según la primera fila, obtendremos per  $B_n = 1 \cdot \text{per } B_{n-1} + 1 \cdot \text{per } C_{n-1}$ , donde

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Al desarrollar per  $C_{n-1}$  según la primera columna, obtendremos per  $C_{n-1} = 1 \cdot \text{per } B_{n-2}$ . De aquí, per  $B_n = \text{per } B_{n-1} + \text{per } B_{n-2}$ .

4.29.  $p_n = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ . Si, por lo menos para un solo  $k$ ,  $i_k = k$ , entonces  $a_{ki_k} = a_{kk} = 0$ , y el producto que contiene  $a_{kh}$  es igual a 0. Los productos, en los cuales  $i_k \neq k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), no contienen elementos de la diagonal principal y, por tanto, son iguales a 1. Su número es igual al número de tales permutaciones  $(i_1, \dots, i_n)$  en las cuales  $i_k \neq k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). De aquí se deduce que la fórmula en las condiciones del problema es lícita.

4.30. a) sí; b) no.

4.31. Cada una de las restantes  $(n - 1)$  filas es ortogonal a la primera, por consiguiente, contiene  $n/2$  unidades y  $n/2$  menos-unidades. En total se tienen  $n + (n - 1)n/2 = n(n + 1)/2$  unidades.

4.33. d) 5. La traza es igual a 0; el rango de frontera, 5; la  $\alpha$ -anchura, siendo  $\alpha = 1, 2, 3$ , y 4, es igual a 2, 3, 4 y 5, respectivamente.

4.34. El grupo de 24-ésimo orden. De elemento del grupo sirve el producto de cualquier permutación de las filas primera y tercera por cualquier permutación de las filas segunda, cuarta, quinta y por cualquier permutación de la 1ª y 4ª columnas.

4.35. No varían las magnitudes indicadas en a), c), f), h); a) es obvio; c) se deduce de la definición de per  $A$ ; f)  $\det(A^2) = (\det A)^2$ , y  $\det A$  se multiplica, al permutar las filas o las columnas, por  $+1$  ó  $-1$ ; h) se desprende del teorema de álgebra.

Las magnitudes citadas en b), d), e), g), i), pueden variar al realizar las permutaciones de las filas (o de las columnas), lo que se ve de los ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ traza } A = 1; \det A = -1; \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ per } (A^2) = 3;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ traza } B = 2; \det B = 1; \lambda_{1,2} = 1;$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ per } (B^2) = 1;$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ rango } (C^2) = 1;$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ rango } (D^2) = 0.$$

4.36. Siete matrices, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## § 2. Rectángulos y cuadrados latinos

4.37.  $N(2, 9) = 133496$ .

4.38. Numeremos las figuras de la primera fila con las cifras 1, 2, 3, 4. Al igual que en el problema 4.37,  $N(2, 4) = 9$ :

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
2	3	4	1	2	4	1	3	2	1	4	3	3	4	1	2	3	4	2	1	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
	3	1	4	2	4	1	2	3	4	3	1	2	4	3	2	1				

4.39. A título de tercera fila podemos tomar cualquiera de las siguientes:

3	1	5	2	4,	3	4	5	1	2,	3	5	1	2	4,	3	5	2	1	4,	4	1	5	2	3,
4	1	5	3	2,	4	5	1	2	3,	4	5	1	3	2,	4	5	2	1	3,	5	1	2	3	4,
5	4	1	2	3,	5	4	1	3	2,	5	4	2	1	3,										

4.40. a) 4; b) 2.

4.41. Siempre exactamente mediante un solo método, puesto que cada columna de la novena fila se completa con elementos que no figuraban en las filas anteriores.

4.42.  $N(3, 5) = 552$ .

4.43. Dividase en  $m^2$  cuadrados el campo y siémbrense las variedades de trigo de una manera tal que cada variedad sea usada exactamente una vez en cada fila y exactamente una vez en cada columna de la partición de la parcela. De este modo, a título de esquema para este experimento sirve un cuadrado latino de orden  $m$ .

4.44. El coste máximo que se busca es igual a 80, y el cuadrado que se busca tiene la forma (una de las soluciones)

2	3	5	10
10	5	3	2
3	2	10	5
5	10	2	3

4.45. La tabla de torneo tiene la forma (una de las soluciones)

·	2	3	4	5	1
2	·	4	5	1	3
3	4	·	1	2	5
4	5	1	·	3	2
5	1	2	3	·	4
1	3	5	2	4	·

Si en todas las casillas de la diagonal principal ponemos el número 6, se obtendrá un cuadrado latino simétrico de orden 6.

4.46.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	5	1	2	3	4
4	5	1	2	3	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	4	5	1	2	3

Todas las filas del cuadrado latino cíclico se obtienen a partir de la primera fila por medio de toda clase de desplazamientos cíclicos. Lo mismo es válido para cualquier otro cuadrado latino cíclico del mismo orden. Esto quiere decir que

los dos cuadrados citados difieren sólo en el orden de las filas, razón por la cual son isomorfos.

4.47. Tomemos los cuadrados de orden 2:

$$A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Formemos de ellos un cuadrado de orden 4:

$$\begin{array}{r} A \ B: \\ B \ A: \end{array} \text{ es decir, } \begin{array}{cccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 0 & 3 & 2 \\ & & 2 & 3 & 0 & 1 \\ & & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

4.48. La permutación (1 2) transforma un cuadrado en otro.

4.49. El isomorfismo del primero y segundo cuadrados está dado por  $(1\ 2) \times (1\ 2) \times (1\ 2)$ , y el del primero y tercero por  $(1\ 2\ 3) \times (1\ 2\ 3) \times e$ , donde  $e$  es una sustitución idéntica.

4.50. Aplicando sucesivamente las permutaciones de las columnas, filas y elementos, obtendremos el cuadrado  $B$ , isomorfo al cuadrado dado  $A$ :

$$B: \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

4.51. En el primer cuadrado cada fila se obtiene a partir de la fila antecedente (y la primera fila, de la última) mediante la permutación  $(0\ 1\ 2\ 3)$  con un ciclo. En el segundo cuadrado cualquier fila se obtiene de cualquier otra fila mediante una permutación con dos ciclos, por ejemplo,  $(0\ 1)(2\ 3)$ , o bien  $(0\ 2)(1\ 3)$ , o bien  $(0\ 3)(1\ 2)$ .

4.52. Los automorfismos del cuadrado los constituirán, en particular, las siguientes permutaciones

$$\begin{array}{l} \alpha_1: (1\ 2\ 3) \times (1\ 3\ 2) \times e; \quad e \text{ es una permutación idéntica;} \\ \alpha_2: (1\ 2) \times (1\ 2) \times (1\ 3); \\ \alpha_3: (1\ 3) \times (1\ 3) \times (1\ 2); \\ \alpha_4: (2\ 3) \times (2\ 3) \times (2\ 3); \\ \alpha_5: (1\ 2\ 3) \times (1\ 2\ 3) \times (1\ 2\ 3); \\ \alpha_6: (1\ 3\ 2) \times (1\ 3\ 2) \times (1\ 3\ 2). \end{array}$$

4.53. Reenumeremos al azar los elementos. Esto puede hacerse por medio de  $4! = 24$  métodos. Pongamos cualquier fila en el primer lugar (4 métodos). Permutemos las columnas de un modo tal que en la primera fila se obtenga 4123. Luego, cambiemos de lugar la 2ª, 3ª y 4ª filas de tal modo que se obtenga 4123 en la primera columna. El cuadrado obtenido coincide con el de partida. Por cuanto la transformación mencionada puede realizarse mediante  $24 \times 4 = 96$  métodos, se tienen en total 96 automorfismos. En lugar de todos los 96 casos resulta suficiente analizar los siguientes 6:

a) los elementos 1, 2, 3, 4 no cambian, y en lugar de la 1ª fila se pone la 2ª, 3ª ó 4ª (3 casos);

b) con los elementos 1, 2, 3, 4 se realiza una de las permutaciones (1 2), (1 3), (1 4), mientras que la 1ª fila queda en su lugar (3 casos). (Efectivamente, cada una de las 96 transformaciones es el resultado de realizar sucesivamente algunas de las 6 transformaciones mencionadas.)

4.54. Si el par  $ij$  se halla en el  $k$ -ésimo grupo, entonces en el cuadrado latino  $a_{ij} = a_{jk} = k$ :

0	1	2	3	4	5
1	0	4	2	5	3
2	4	0	5	3	1
3	2	5	0	1	4
4	5	3	1	0	2
5	3	1	4	2	0

4.55. Supongamos que la primera fila es  $0\ 1\ 2\ \dots\ p$ . Las otras filas se obtienen realizando desplazamientos cíclicos; la  $i$ -ésima fila comienza por  $i$  (debido a la simetría), lo que quiero decir que se obtiene de la 1ª fila realizando el desplazamiento cíclico en  $i - 1$  unidades. Por consiguiente, para los elementos de la  $i$ -ésima fila tenemos  $a_{ij} \equiv a_{1j} + (i - 1)$ , es decir,  $a_{ij} \equiv a_{1j} + a_{i1} \pmod{p}$ . El cuadrado latino es una tabla de sumación del grupo cíclico de residuos respecto del módulo  $p$ .

4.56. Sean  $b_1, \dots, b_p$  diferentes elementos de un cuadrado latino  $\{a_{ij}\}$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). Definamos la operación  $b_i b_j = a_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, p$ ). En cada fila del cuadrado latino  $a_{ij} \neq a_{ik}$  ( $j \neq k$ ). Por cuanto  $p$  ecuaciones  $b_i x = a_{ij}$  ( $j = 1, \dots, p$ ) tienen  $p$  diferentes soluciones  $x = b_1, \dots, x = b_p$ , cada ecuación, pues, es unívocamente resoluble. De un modo análogo se demuestra la resolubilidad unívoca de las ecuaciones  $y b_j = a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, p$ ). Por consiguiente, el conjunto  $\{b_1, \dots, b_p\}$  con la tabla de multiplicar  $b_i b_j = a_{ij}$  es un casigrupo.

4.57. La unicidad de las soluciones de las ecuaciones  $ax = b$  e  $ya = b$  predetermina que cada elemento en cada fila y en cada columna se encuentra exactamente una sola vez.

4.59. 196.

4.60. a) Los nombres de las cartas forman un cuadrado latino, y los nombres de los palos, otro cuadrado que es ortogonal con relación al primero. He aquí una de las soluciones:

<i>B</i> bastos	<i>T</i> copas	<i>D</i> espadas	<i>K</i> oros
<i>D</i> oros	<i>K</i> espadas	<i>B</i> copas	<i>T</i> bastos
<i>K</i> copas	<i>D</i> bastos	<i>T</i> oros	<i>B</i> espadas
<i>T</i> espadas	<i>B</i> oros	<i>K</i> bastos	<i>D</i> copas

b) Es imposible, puesto que de esta condición se deduce que en una diagonal todas las cuatro cartas han de tener un color igual, y en tal caso los palos en las diagonales se repetirán.

c)

<i>D</i> copas	<i>K</i> bastos	<i>B</i> oros	<i>T</i> espadas
<i>B</i> bastos	<i>T</i> copas	<i>D</i> espadas	<i>K</i> oros
<i>T</i> oros	<i>B</i> espadas	<i>K</i> copas	<i>D</i> bastos
<i>K</i> espadas	<i>D</i> oros	<i>T</i> bastos	<i>B</i> copas

4.61.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	2	3	1	5	6	4	8	9	7		3	1	2	6	4	5	9	7	8	
	3	1	2	6	4	5	9	7	8		2	3	1	5	6	4	8	9	7	
	4	5	6	7	8	9	1	2	3		7	8	9	1	2	3	4	5	6	
<i>A</i> :	5	6	4	8	9	7	2	3	1		<i>B</i> :	9	7	8	3	1	2	6	4	5
	6	4	5	9	7	8	3	1	2			8	9	7	2	3	1	5	6	4
	7	8	9	1	2	3	4	5	6			4	5	6	7	8	9	1	2	3
	8	9	7	2	3	1	5	6	4			6	4	5	9	7	8	3	1	2
	9	7	8	3	1	2	6	4	5			5	6	4	8	9	7	2	3	1

$B$  es un cuadrado latino, ortogonal al cuadrado  $A$ .

$$4.62. \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$4.63. \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

$$4.64. \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

4.65. La primera fila de cada cuadrado es igual, mientras que cada fila siguiente se obtiene a partir de la anterior mediante un mismo desplazamiento cíclico en  $k$ , donde para el primer cuadrado  $k = 1$ , para el segundo  $k = 2$ , para el tercero  $k = 4$ , para el cuarto  $k = 5$ , para el quinto  $k = 7$  y para el sexto  $k = 8$ .

$$4.66. \text{ De los cuadrados } \begin{array}{ccc} & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & y \\ & 2 & 0 & 1 \end{array} \text{ y } \begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{array} \text{ obtenemos } A \text{ y de los cuadrados}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & y \\ & 4 & 0 & 2 \end{array} \text{ obtenemos } B:$$

$$A: \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad B: \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

Estos cuadrados no son ortogonales.

4.67. Todos los cuadrados se obtienen a partir del primero permutando las filas, al igual que en la resolución del problema 4.65. Por consiguiente, son isomorfos.

4.68. Por hipótesis, los cuadrados  $k$ -ésimo y  $l$ -ésimo se definen del modo siguiente:

$$a_{ij}^{(k)} = ik + j \pmod{p}, \quad a_{ij}^{(l)} = il + j \pmod{p}. \quad (4.1')$$

Analicemos los pares de elementos

$$(ik + j, il + j) = (i_1k + j_1, i_1l + j_1). \quad (4.2')$$

De (4.2') se deduce

$$ik + j \equiv i_1k + j_1 \pmod{p}, \quad il + j \equiv i_1l + j_1 \pmod{p},$$

o bien

$$j - j_1 \equiv k(i_1 - i) \pmod{p}, \quad j - j_1 \equiv l(i_1 - i) \pmod{p}. \quad (4.3')$$

De (4.3') obtenemos  $k(i_1 - i) \equiv l(i_1 - i) \pmod{p}$ . Esta comparación es equivalente a la igualdad

$$(k - l)(i_1 - i) = mp, \quad m \text{ es entero,} \quad (4.4')$$

donde  $1 \leq |k - l| \leq p - 2$ ,  $|i_1 - i| \leq p - 1$ .

Por hipótesis,  $p$  es primo. Por cuanto el producto que figura en el primer miembro de (4.4') se divide por el número primo  $p$ , entonces uno de los factores se divide por este número. Pero,  $1 \leq |k - l| \leq p - 2$ , por consiguiente,  $k - l$  no se divide por  $p$ . En tal caso  $i_1 - i$  ha de dividirse por  $p$ . Esto es posible sólo cuando  $i_1 = i$ . Si  $i_1 = i$ , de la relación (4.3') se deduce que  $j_1 = j$ . Es decir, los pares  $(a_{ij}^{(k)}, a_{ij}^{(l)})$  y  $(a_{i_1 j_1}^{(k)}, a_{i_1 j_1}^{(l)})$  coinciden sólo en el caso en que  $i = i_1$ ,  $j = j_1$ .

4.69. Escribamos los elementos del grupo  $G$  en forma de los vectores  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , donde  $\alpha = 0, 1$ ;  $\beta = 0, 1$ ;  $\gamma = 0, 1$ . La operación de grupo es la suma respecto del mod 2. Denotemos, para abreviar, el elemento  $(\alpha, \beta, \gamma)$  con el número  $m = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 1$ . Entonces los elementos del grupo se designarán con los números  $m = 1, 2, \dots, 8$ . Los automorfismos del grupo  $G$  se escribirán en forma de las permutaciones  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ b_1 & \dots & b_8 \end{pmatrix}$ . Elijamos un automorfismo

$\varphi$  tal que todas las potencias suyas  $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots, \varphi^6$  sean diferentes y cada una de ellas deje en su lugar sólo la unidad. Por ejemplo,  $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ .

A título de cuadrado latino  $K_8$  tomemos la tabla de multiplicar del grupo  $G$ , y a título de  $K$ , una tabla que se obtiene de  $K_8$  por permutación de las filas con ayuda de la permutación  $\varphi^s$  ( $s = 1, 2, \dots, 6$ ). Entonces,  $K_0, K_1, K_2, \dots, K_6$  será el conjunto de cuadrados latinos ortogonales que se busca. En efecto, supongamos que en  $K_p$  y en  $K_q$  ( $p \neq q$ ) se han encontrado dos pares iguales:

$$(a_{ij}^{(p)}, a_{ij}^{(q)}) = (a_{i_1 j_1}^{(p)}, a_{i_1 j_1}^{(q)}). \quad (4.5')$$

Por cuanto cada cuadrado es una tabla de sumar, entonces  $a_{1j}^{(s)} = a_{11}^{(s)} + a_{1j}^{(s)}$  ( $s = 0, 1, \dots, 6$ ). Ya que la primera fila en todos los cuadrados es  $1, 2, \dots, 8$ , entonces  $a_{1j}^{(p)} = a_{1j}^{(q)} = j$ ,  $a_{i_1 j_1}^{(p)} = a_{i_1 j_1}^{(q)} = j_1$ . Por cuanto la primera fila en  $K_8$  se obtiene a partir de la columna  $1 \ 2 \ \dots \ 8$  en  $K_0$  con ayuda de la permutación  $\varphi^s$ , entonces  $a_i^{(s)} = \varphi^s(i)$ ,  $a_{i_1}^{(s)} = \varphi^s(i_1)$  ( $s = 0, 1, \dots, 6$ ). Ahora, de (4.5') se deduce

$$\varphi^p(i) + j = \varphi^p(i_1) + j_1, \quad (4.6')$$

$$\varphi^q(i) + j = \varphi^q(i_1) + j_1.$$

De aquí,  $\varphi^p(i) - \varphi^p(i_1) = \varphi^q(i) - \varphi^q(i_1)$ . Por cuanto  $\varphi^s$  es un automorfismo, tenemos  $\varphi^s(a) - \varphi^s(b) \equiv \varphi^s(a - b)$ . Por consiguiente,  $\varphi^p(i - i_1) = \varphi^q(i - i_1)$ . Tenemos:  $0 \leq p \leq 6$ . Sea, por ejemplo,  $p > q$ . Aplicando a ambos miembros de la igualdad  $\varphi^{-q}$ , obtenemos

$$\varphi^{p-q}(i - i_1) = i - i_1, \quad 1 \leq p - q \leq 6. \quad (4.7')$$

Por cuanto el automorfismo  $\varphi^s$  ( $1 \leq s \leq 6$ ) deja en su lugar sólo la unidad del grupo (si la operación de grupo es suma, entonces sólo deja el cero del grupo), de (4.7') se deduce que  $i = i_1$ . En tal caso de (4.6') se deduce que  $j = j_1$ . Es decir, los pares diferentes no pueden coincidir. Esto significa que los cuadrados  $K_p$  y  $K_q$  son ortogonales.

4.70. El método de construir un conjunto completo de cuadrados latinos y la demostración de su ortogonalidad están descritos en la resolución del problema 4.69.

4.72. El campo de Galois  $GF(n)$  de  $n = 3^2$  elementos. Como elementos del campo tomemos

$$a_0 = 0, \quad a_1 = x^0 = 1, \quad a_2 = x^1 = x, \quad a_3 = x^2 = 2x + 1, \\ a_4 = x^3 = 2x + 2, \quad a_5 = x^4 = 2, \quad a_6 = x^5 = 2x, \quad a_7 = x^6 = x + 2, \\ a_8 = x^7 = x + 1.$$

Construyamos las matrices de orden  $n = 3^2$ :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 2x+1 & 2x+2 & 2 & 2x & x+2 & x+1 \\ 1 & 2 & x+1 & 2x+2 & 2x & 0 & 2x+1 & x & x+2 \\ x & x+1 & 2x & 1 & 2 & x+2 & 0 & 2x+2 & 2x+1 \\ 2x+1 & 2x+2 & 1 & x+2 & x & 2x & x+1 & 0 & 2 \\ 2x+2 & 2x & 2 & x & x+1 & 2x+1 & x+2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2+x & 2x & 2x+1 & 1 & 2x+2 & x+1 & x \\ 2x & 2x+1 & 0 & x+1 & x+2 & 2x+2 & x & 2 & 1 \\ x+2 & x & 2x+2 & 0 & 1 & x+1 & 2 & 2x+1 & 2x \\ x+1 & x+2 & 2x+1 & 2 & 0 & x & 1 & 2x & 2x+2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 2x+1 & 2x+2 & 2 & 2x & x+2 & x+1 \\ x & x+1 & 2x & 1 & 2 & x+2 & 0 & 2x+2 & 2x+1 \\ 2x+1 & 2x+2 & 1 & x+2 & x & 2x & x+1 & 0 & 2 \\ 2x+2 & 2x & 2 & x & x+1 & 2x+1 & x+2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 & 2x & 2x+1 & 1 & 2x+2 & x+1 & x \\ 2x & 2x+1 & 0 & x+1 & x+2 & 2x+2 & x & 2 & 1 \\ x+2 & x & 2x+2 & 0 & 1 & x+1 & 2 & 2x+1 & 2x \\ x+1 & x+2 & 2x+1 & 2 & 0 & x & 1 & 2x & 2x+2 \\ 1 & 2 & x+1 & 2x+2 & 2x & 0 & 2x+1 & x & x+2 \end{pmatrix}$$

o bien, al redesignar los elementos, tendremos en definitiva

0	1	3	7	8	2	6	5	4	0	1	3	7	8	2	6	5	4
1	2	4	8	6	0	7	3	5	3	4	6	1	2	5	0	8	7
3	4	6	1	2	5	0	8	7	7	8	1	5	3	6	4	0	2
7	8	1	5	3	6	4	0	2	8	6	2	3	4	7	5	1	0
8	6	2	3	4	7	5	1	0	2	0	5	6	7	1	8	4	3
2	0	5	6	7	1	8	4	3	6	7	0	4	5	8	3	2	1
6	7	0	4	5	8	3	2	1	5	3	8	0	1	4	2	7	6
5	3	8	0	1	4	2	7	6	4	5	7	2	0	3	1	6	8
4	5	7	2	0	3	1	6	8	1	2	4	8	6	0	7	3	5

etc. Cada cuadrado sucesivo se obtiene del anterior con ayuda de una misma permutación cíclica de las filas 2, 3, ..., 9.



### § 3. Sistema de ternas de Steiner y juegos semejantes

4.73. a) 123; 145; b) 123; 145; 245; 345 (tres ternas no son suficientes, puesto que en tres ternas están contenidos no más de 9 pares diferentes, mientras que de cinco elementos pueden formarse 10 pares); c) 123; 145; 167; 246; 257; 347; 356.

4.74. a) No; b) no; c) sí.

4.75. De  $n$  elementos pueden formarse  $n(n-1)/2$  pares; en cada terna hay tres pares, en diferentes ternas hay distintos pares. Esto quiere decir que el número de ternas es igual a  $n(n-1)/2 : 3 \doteq n(n-1)/6$ .

4.76. Hágase uso del problema 4.75.

4.77. A) Sí; B) sí; C) no.

4.78. Al añadir las ternas de b), obtendremos un sistema de ternas de Steiner de orden 7; la adición de las ternas a), c), d) no da los sistemas de ternas de Steiner, puesto que algunos pares se repiten.

4.79.  $(n-1)/2$ . Todo elemento integra el par  $n-1$ : en cada terna, donde se tiene este elemento, figuran dos de estos pares. Esto significa que el elemento figura en  $(n-1)/2$  ternas.

4.80. Sea  $E$  el conjunto principal del sistema  $\Delta_n$  y sea  $S$  el conjunto principal del sistema  $\Delta_d$ . Los elementos del conjunto  $E \setminus S$  forman  $\binom{n-d}{2}$  pares no ordenados; los pares mencionados se encuentran en las ternas del sistema  $\Delta_n$  que no pertenecen a  $\Delta_d$ . Cada elemento de  $S$  se encuentra con  $(n-d)/2$  pares de este género, con la particularidad de que los diferentes elementos no pueden encontrarse con un mismo par de elementos del conjunto  $E \setminus S$ . Por consiguiente, el número de pares que se encuentran con los elementos del conjunto  $S$  es igual a  $d(n-d)/2$ . Es obvio que este número no sobrepasa el número total de pares, por lo cual  $\frac{d(n-d)}{2} \leq \binom{n-d}{2}$ , de donde se deduce la desigualdad que se demuestra.

4.81. Sea  $\Delta_n$  un sistema de ternas de Steiner y sean  $\Delta_d$  y  $\Delta_l$  los subsistemas de éste. Si  $\Delta_d \cap \Delta_l = \Delta = \emptyset$ , el teorema es cierto. Sea  $\Delta \neq \emptyset$ . Designemos con  $S$  un conjunto de elementos que se encuentran en las ternas provenientes de  $\Delta$ . Elijamos arbitrariamente  $a \in S$ ,  $b \in S$ ,  $a \neq b$ . Entonces, en  $\Delta_n$  existe la única terna  $\{a, b, x\}$  que incluye el par  $\{a, b\}$ . Por cuanto los elementos  $a, b$  pertenecen al conjunto principal del sistema  $\Delta_d$ , entonces  $\{a, b, x\} \in \Delta_d$ . De un modo análogo se muestra que  $\{a, b, x\} \in \Delta_l$ . Por consiguiente,  $\{a, b, x\} \in \Delta$ . Así pues, para un par arbitrario de elementos provenientes de  $S$  existe en  $\Delta$  una terna que incluye dicho par. Por eso  $\Delta$  es un sistema de ternas de Steiner, lo que se trataba de demostrar.

4.82.  $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 5 & 3 & 4 & 7 \\ & 1 & 4 & 6 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ & & 1 & 5 & 7 & & & & & \end{matrix}$

4.83. Tipo de entrelazamiento:  $T_1 = (2, 3)$  (fig. 4.1').

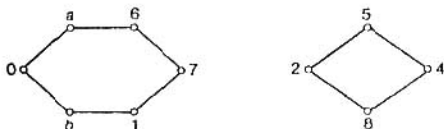


Fig. 4.1'.



4.97. Todo automorfismo de un sistema de ternas de Kirkman conserva dichas ternas, lo que quiere decir que es un elemento del grupo de automorfismos del sistema de ternas de Steiner.

4.98. 01 02 03 04 05  
23 14 15 13 12  
45 35 24 25 34

4.99. 01 02 03 04 05 06 07  
27 13 15 17 12 14 16  
36 47 24 26 37 23 25  
45 56 67 35 46 57 34

4.100. De  $2\mu$  jugadores pueden formarse  $2\mu(2\mu - 1)/2 = \mu(2\mu - 1)$  diferentes pares. En un día pueden jugar  $\mu$  pares de  $2\mu$  jugadores. Esto significa que en total pueden realizarse  $\mu(2\mu - 1)/\mu = 2\mu - 1$  jornadas. En el caso dado 11 jornadas y en cada jornada juegan 6 pares:

N° de jornada										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1 12	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	1 10	1 11
2 11	3 11	2 12	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	2 10
3 10	4 10	4 11	5 11	3 12	3 4	3 5	3 6	3 7	3 8	3 9
4 9	5 9	5 10	6 10	6 11	7 11	4 12	4 5	4 6	4 7	4 8
5 8	6 8	6 9	7 9	7 10	8 10	8 11	9 11	5 12	5 6	5 7
6 7	7 12	7 8	8 12	8 9	9 12	9 10	10 12	10 11	11 12	6 12

Este mismo sistema da el sistema buscado de grupos de pares.

4.101. Por definición, los grupos restantes de pares se obtienen del modo siguiente:

$$T\tau_1 = \tau_2, \quad T\tau_2 = \tau_3, \quad \dots, \quad T\tau_{2\mu-2} = \tau_{2\mu-1},$$

$$T\tau_{2\mu-1} = \tau_1, \quad (4.8')$$

es decir,  $\tau_i = T^{i-1}\tau_1$  ( $i = 1, \dots, 2\mu - 1$ ). Por consiguiente, todas las potencias de  $T^0, T^1, \dots, T^{2\mu-2}$  son distintas, y

$$T^{2\mu-1}\tau = \tau. \quad (4.9')$$

Con una exactitud de hasta la enumeración de los elementos existen solamente dos permutaciones de  $2\mu$  elementos que poseen diferentes  $T^0, T^1, \dots, T^{2\mu-1}$ , a saber,  $(0 \ 1 \ 2 \ \dots \ 2\mu - 1)$  y  $(0) (1 \ 2 \ \dots \ 2\mu - 1)$ . Para la primera de ellas  $T^{2\mu} = E$ . Por consiguiente, en virtud de (4.8') y (4.9'),

$$\tau_1 = T^{2\mu}\tau_1 = T(T^{2\mu-1}\tau_1) = T\tau_1 = \tau_2.$$

La contradicción obtenida muestra que la primera permutación no da sistemas del tipo cíclico.

4.102. Las tablas correspondientes son:

<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">6</td></tr> </table>	0	6		1	1	5		6	;	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">7</td></tr> </table>	0	6		7	;	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> </table>	1	5		2	2	4		4	4	2		1
0	6		1																									
1	5		6																									
0	6		7																									
1	5		2																									
2	4		4																									
4	2		1																									

<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> </table>	2	4		2	4	2		4	6	0		1	;	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> </table>	2	4		3	3	3		4	;	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 30px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;"> </td><td style="padding: 2px 10px;">7</td></tr> </table>	6	0		7
2	4		2																									
4	2		4																									
6	0		1																									
2	4		3																									
3	3		4																									
6	0		7																									

Entre los sistemas mencionados no hay isomorfos.

4.103. Confeccionando la matriz de los tipos de entrelazamiento del primer sistema, calculamos los vectores índices de sus grupos de pares; véase a).

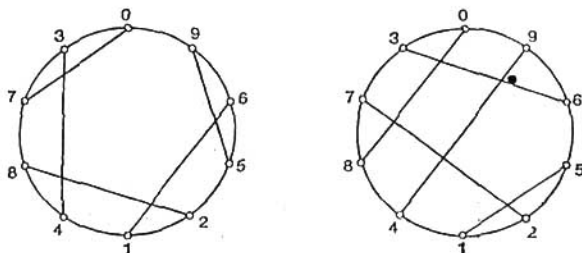


Fig. 4.2'.

Dibujamos los grafos, por ejemplo,  $\tau_3 \cup \tau_9 \cup \tau_7$  y  $\tau_3 \cup \tau_9 \cup \tau_8$  (fig. 4.2'). Los vectores índices de los grupos de pares para el segundo sistema tienen la forma b);

a)	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">7</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">8</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">9</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td></tr> </table>	1	4	4	2	4	4	3	2	6	4	0	8	5	4	4	6	4	4	7	5	3	8	5	3	9	2	6	b)	<table style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">3</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">6</td><td style="padding: 2px 10px;">5</td><td style="padding: 2px 10px;">3</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">7</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">8</td><td style="padding: 2px 10px;">2</td><td style="padding: 2px 10px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">9</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td><td style="padding: 2px 10px;">4</td></tr> </table>	1	5	3	2	4	4	3	2	6	4	0	8	5	4	4	6	5	3	7	4	4	8	2	6	9	4	4
1	4	4																																																							
2	4	4																																																							
3	2	6																																																							
4	0	8																																																							
5	4	4																																																							
6	4	4																																																							
7	5	3																																																							
8	5	3																																																							
9	2	6																																																							
1	5	3																																																							
2	4	4																																																							
3	2	6																																																							
4	0	8																																																							
5	4	4																																																							
6	5	3																																																							
7	4	4																																																							
8	2	6																																																							
9	4	4																																																							

A los grupos  $\tau_3$  y  $\tau_9$  con vectores índices (2 6) del primer sistema pueden corresponder solamente los grupos  $\tau_3$  y  $\tau_8$  con los mismos índices en el segundo sistema, y a los grupos  $\tau_7$  y  $\tau_8$  con (5 3), solamente los grupos  $\tau_1$  y  $\tau_6$ . Por eso, para el segundo sistema dibujamos los grafos  $\tau_3 \cup \tau_8 \cup \tau_1$  y  $\tau_3 \cup \tau_8 \cup \tau_6$  (fig. 4.3'). La única permutación que puede traspasar el dibujo izquierdo al derecho es (0 8 9 7 3) (1 5 4 6). Se comprueba directamente que esta permutación es la buscada.

4.104.

0	1	0	2	0	3
2	3	1	3	1	2

Por cuanto los cuatro elementos pueden ser partidos en pares solamente mediante estos tres métodos (empleados en el sistema construido aquí), entonces después de cualquier permutación de dichos elementos obtendremos los mismos tres métodos de partición en pares, es decir, el mismo sistema. Por consiguiente,

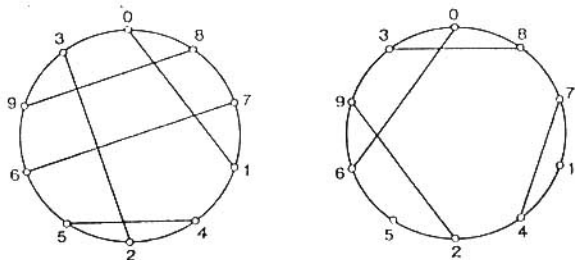


Fig. 4.3'.

cualquier permutación de cuatro elementos es un automorfismo del sistema. Así pues, el grupo de automorfismos buscado es el grupo  $S_4$  de todas las permutaciones de cuatro elementos: su orden es  $4! = 24$ .

4.105. Sea un sistema

0 1	0 2	0 3	0 4	0 5
2 5	3 1	4 2	5 3	1 4
3 4	4 5	5 1	1 2	2 3

La permutación  $T = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  convierte todo grupo de pares  $\tau_i$  en el grupo siguiente  $\tau_{i+1}$ . Esto significa que  $T^i \tau_1 = \tau_{i+1}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ );  $T^5 = E$ . Si  $\varphi$  es un automorfismo del sistema, entonces  $\varphi \tau_1 = \tau_{i+1}$  para cierto  $i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ), es decir,  $\varphi \tau_1 = T^i \tau_1$ ,  $T^{-i} \varphi \tau_1 = \tau_1$ . De aquí,  $\psi = T^{-i} \varphi$  es un automorfismo del grupo de pares  $\tau_1$ . Cualquier automorfismo de este tipo  $\psi$  puede ser representado unívocamente en forma de un producto de dos automorfismos, uno de los cuales hace permutar solamente los pares 0 1, 2 5, 3 4 (el grupo de tales automorfismos es isomorfo al grupo de todas las permutaciones de tres elementos) y el otro hace permutar los elementos en cualesquiera de estos tres pares de manera independiente (el grupo de tales automorfismos es un grupo abeliano con las generatrices (0 1), (2 5), (3 4), es decir, es isomorfo al grupo  $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ ). Así pues,  $\Gamma(\text{aut } \tau_1) = 5 \times 6 \times 8 = 240$ .

4.106. La permutación  $T$  es, en virtud del problema 4.101, un automorfismo del sistema. También son automorfismos las permutaciones  $T^2, T^3, \dots, T^{2\mu-1} = E$ . Por consiguiente, el grupo de automorfismos contiene un subgrupo cíclico de orden  $2\mu - 1$  con elemento generatriz  $T$ .

4.107. Agreguemos al 1er grupo el elemento 1; al 2º grupo, el 2, al 3er grupo, el 3. Obtendremos la siguiente sucesión

1	7	6	2	7	5	3	7	4
1	5	4	2	6	4	3	6	5

Añadiendo la terna 1 2 3, obtendremos las siete ternas buscadas de Steiner.

4.108.

0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9
2	3	1	3	1	4	1	7	1	9	1	8	1	2	1	6	1	5
4	5	4	6	2	5	2	9	2	8	2	7	3	8	2	4	2	6
6	7	5	8	6	9	3	5	3	6	3	4	4	9	3	9	3	7
8	9	7	9	7	8	6	8	4	7	5	9	5	6	5	7	4	8

El par  $(i, j)$ , donde  $i, j = 0, \dots, 9, i \neq j$ , figura en el  $a_{ij}$ -ésimo grupo.

## § 4. Bloque-esquemas

4.110.

a) $v = b = 7,$ $k = r = 3,$ $\lambda = 1:$ 1 2 4 1 3 5 1 6 7 2 3 6 2 5 7 3 4 7 4 5 6	b) $v = b = 13,$ $k = r = 4,$ $\lambda = 1:$ 1 2 3 4 1 5 6 7 1 8 9 10 1 11 12 13 2 5 8 11 2 6 9 12 2 7 10 13 3 5 9 13 3 6 10 11 3 7 8 12 4 5 10 12 4 6 8 13 4 7 9 11	c) $v = 9, b = 12,$ $r = 4, k = 3,$ $\lambda = 1:$ 1 2 3 1 4 5 1 6 7 1 8 9 2 4 6 2 5 8 2 7 9 3 4 9 3 5 7 3 6 8 4 7 8 5 6 9
--	---	--

4.111. a) No existe. De lo contrario, según el teorema de encaje, el esquema de que se trata podría ser encajado en un esquema simétrico con parámetros  $v_1 = 22, k_1 = 7, \lambda = 2$ , el cual no existe de acuerdo con el teorema de Bruck—Ryser—Chowla sobre la existencia de BIB-esquemas simétricos. En efecto,  $v_1$  es par,  $k_1 - \lambda = 5$  no es un cuadrado.

d) La resolución es análoga a a): según el segundo de los teoremas citados no existe esquema con los parámetros  $v_1 = 43, k_1 = 7, \lambda = 1$ ; según el primer teorema, no existe esquema con los parámetros  $v = 36, b = 42, r = 7, k = 6$  y  $\lambda = 1$ .

4.112. a) Es fácil establecer la validez de la siguiente afirmación: sea  $v = 6t + 1 = p^n$  y  $p$ , un número primo, y sea  $x$  una raíz primitiva del campo  $GF(p^n)$ . En este caso los bloques  $(x^0, x^{2t}, x^{4t}), \dots, (x^1, x^{3t+1}, x^{4t+1}), (x^{t-1}, x^{3t-1}, x^{5t-1})$  forman la base del esquema con los parámetros  $v = 6t + 1, b = 6t^2 + t, r = 3t, k = 3, \lambda = 1$  y un grupo de automorfismos  $A$  que es un grupo aditivo del campo  $GF(p^n)$ . Observemos que la raíz primitiva de  $GF(7)$  es el elemento 3, por consiguiente, la base del bloque-esquema dado está formada por el bloque  $t = 1, x = 3 (x^0, x^2, x^4) = (1, 2, 4)$ . El grupo de automorfismos es un grupo cíclico de residuos respecto al módulo 7.

b) La resolución es análoga a la anterior. Al aplicar los razonamientos realizados más arriba, encontramos la base del BIB-esquema dado:  $t = 2, x = 2 (1, 3, 9)$  y  $x = (2, 6, 5)$ . El grupo de automorfismos es un grupo cíclico de residuos respecto al módulo 13.

4.114. El bloque-esquema tiene por expresión

1	2	4	2	3	4	3	4	5
1	2	5	2	3	6	4	5	6
1	3	5	2	5	6			
1	3	6						
1	4	6						

4.115. a) Es el bloque-esquema del problema 4.110, a). En efecto, la igualdad de incidencia tiene por expresión

$$L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_b^2 = (v - \lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_b^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_b)^2.$$

Teniendo presente que  $v = b = 7$ ,  $k = r = 3$ ,  $\lambda = 1$ , obtenemos la igualdad requerida.

4.116. a) Por cuanto  $v = 21$  es impar, entonces, de acuerdo con el teorema de Bruck—Ryser—Chowla sobre la existencia de BIB-esquemas simétricos,

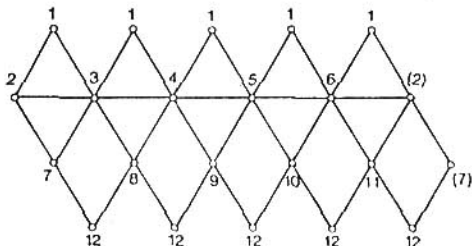


Fig. 4.4'.

llegamos a la ecuación  $z^2 = 4x^2 + y^2$ . Esta tiene una solución no nula de números enteros (1, 0, 2). Por consiguiente, la condición necesaria para la existencia de un bloque-esquema es válida.

b)  $v = 15$  es impar. Aplicando el teorema citado, obtenemos, por analogía con lo anterior, la ecuación  $z^2 = 4x^2 - 3y^2$ , la cual tiene una solución no nula de números enteros (1, 1, 1). Por consiguiente, la condición necesaria de la existencia de un bloque-esquema se cumple.

c) Por analogía con lo anterior obtenemos la ecuación  $z^2 = 5x^2 - 4y^2$  y su solución no nula de números enteros (1, 1, 1).

d) Obtenemos la ecuación  $z^2 = 7x^2 + 2y^2$  y su solución buscada (1, 1, 3).

4.117. Si por elementos del esquema tomamos los vértices del tetraedro y por bloques, las caras de éste, entonces el tetraedro corresponderá a un BIB-esquema simétrico.

El octaedro es un PBIB-esquema con los parámetros  $v = 6$ ,  $b = 8$ ,  $r = 4$ ,  $k_1 = 3$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 4$ .

$$P_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El cubo es un PBIB(3)-esquema con los parámetros  $v = 8$ ,  $b = 6$ ,  $r = 3$ ,  $k = 4$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 3$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 3$ .

$$P_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El icosaedro (véase la desarrollante en la fig. 4.4') es un PBIB(3)-esquema con los parámetros  $v = 12$ ,  $b = 20$ ,  $r = 5$ ,  $k = 3$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 2$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 5$ ,  $n_3 = 5$ .

$$P_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El dodecaedro es un PBIB(5)-esquema con los parámetros  $v = 20$ ,  $b = 12$ ,  $k = 5$ ,  $r = 3$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_4 = 0$ ,  $\lambda_5 = 0$ ,  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 6$ ,  $n_3 = 6$ ,  $n_4 = 3$ ,  $n_5 = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 p_{jh}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & p_{jh}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 p_{jh}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & p_{jh}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 p_{jh}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

4.118. a) Las caras del cubo corresponden a los vértices del octaedro y viceversa. Para el octaedro la matriz de incidencia tiene la forma siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de incidencia del cubo es la matriz transpuesta  $A^T$ .

b) Al dodecaedro corresponde el siguiente bloque-esquema:  $v = 20$ ,  $b = 12$ ,  $k = 5$ ,  $r = 3$ :

$D: (1, 2, 3, 4, 5, 6), (5, 6, 11, 16, 17), (9, 10, 12, 13, 19), (1, 7, 8, 4, 3), (3, 7, 6, 16, 15), (20, 17, 19, 12, 11), (1, 2, 4, 9, 10), (7, 8, 14, 15, 18), (20, 18, 17, 16, 15), (2, 5, 11, 12, 10), (4, 8, 9, 13, 14), (20, 19, 18, 14, 13)$ . Definamos  $D'$ , rigiéndonos por las reglas  $b_j \in A_i \Leftrightarrow a_i \in B_j$  en  $D$ . Obtendremos un PBIB(2)-esquema que corresponde al icosaedro. Sus parámetros son:  $v = 12$ ,  $b = 20$ ,  $r = 5$ ,  $k = 3$ . El esquema es de la forma:  $(1, 2, 3), (1, 4, 5), (3, 8, 9), (8, 9, 12), (5, 10, 11), (1, 3, 4), (1, 5, 6), (2, 4, 9), (7, 8, 12), (7, 11, 12), (1, 2, 6), (2, 6, 7), (4, 5, 10), (6, 7, 11), (9, 10, 12), (2, 3, 8), (2, 7, 8), (4, 9, 10), (5, 6, 11), (10, 11, 12)$ .

c) El tetraedro corresponde al siguiente BIB-esquema:  $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (2, 4, 3), (1, 4, 3)$ . Los parámetros de este esquema, que llamaremos  $D$ , son:  $v = b = 4$ ,  $r = k = 3$ ,  $\lambda = 2$ . Construyamos  $D'$  según la regla  $a_i \in A_i; B_j \ni b_j; b_j \in A_i \Leftrightarrow a_i \in B_j$  en  $D$ . Los bloques de  $D'$  tienen por expresión

$$A_1: (b_1, b_2, b_4) = (1, 2, 4); \quad A_2: (b_1, b_2, b_3) = (1, 2, 3);$$

$$A_3: (b_1, b_3, b_4) = (1, 3, 4); \quad A_4: (b_2, b_3, b_4) = (2, 3, 4).$$

Para  $D'$ :  $v' = b' = 4$ ,  $r' = k' = 3$ ,  $\lambda' = 2$ . El tetraedro es autodual.



4.119. De acuerdo con el teorema de Zinger sobre los bloque-esquemas que se obtienen de las geometrías  $PG(n, p^2)$ , llegamos a una conclusión de que el bloque-esquema buscado es cíclico y tiene los parámetros:  $v = b = 7$ ,  $k = r = 3$ ,  $\lambda = 1$ . Por cuanto  $(0, 1, 3)$  es el  $(7, 3, 1)$ -conjunto de diferencias, entonces el bloque-esquema tendrá por expresión:  $(0, 1, 3), (2, 3, 5), (4, 5, 0), (1, 2, 4), (3, 4, 6), (5, 6, 1), (6, 0, 2)$ .

4.120. La matriz de incidencia del bloque-esquema del problema 4.119 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construimos la matriz de Hadamard, partiendo de la matriz de incidencia citada. Denotemos la matriz de Hadamard buscada con  $H = (b_{ij})$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 4t - 1$ . Suponemos  $b_{0j} = b_{i0} = 1$ ;  $b_{ij} = 1$ , si  $a_{ij} = 1$ ,  $b_{ij} = -1$ , si  $a_{ij} = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, 4t - 1$ . En definitiva tenemos

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.121. a) El bloque-esquema tiene la forma:  $(1, 2, 3), (3, 4, 0), (0, 1, 2), (2, 3, 4), (4, 0, 1)$ . Para definir la relación de conexión resulta cómodo construir el siguiente diagrama (fig. 4.5'):  $i = 1$ , el par se encuentra en dos bloques (línea ininterrumpida),  $i = 2$ , el par se encuentra en un bloque (línea ondeada).

Empleando el diagrama, es fácil hallar los parámetros del PBIB(2)-esquema:  $v = b = 5$ ,  $k = r = 3$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 2$ ,  $p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

b) El bloque-esquema tiene la forma:  $(1, 3, 9), (5, 7, 0), (9, 11, 4), (2, 4, 10), (6, 8, 1), (10, 12, 5), (0, 2, 8), (3, 5, 11), (7, 9, 2), (11, 0, 6), (4, 6, 12), (8, 10, 3), (12, 1, 7)$ .

Por analogía con a) puede construirse el diagrama:  $i = 1$ , el par se encuentra en un solo bloque;  $i = 2$ , el par está ausente, el PBIB(2)-esquema tiene los siguientes parámetros:  $v = b = 13$ ,  $k = r = 3$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $n_1 = 6$ ,  $n_2 = 6$ ,  $p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

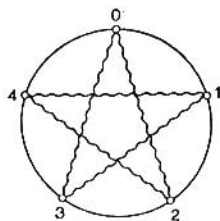


Fig. 4.5'.

4.124. El conjunto  $\{1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17\}$  es un  $(19, 9, 4)$ -conjunto de diferencias. El bloque-esquema tiene la siguiente forma:

(1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17),	(8, 11, 12, 13, 14, 18, 4, 5).
(15, 18, 0, 12, 6, 11, 12),	(2, 5, 6, 7, 8, 12, 17, 18),
(9, 12, 13, 14, 15, 0, 5, 6),	(16, 0, 1, 2, 3, 7, 12, 13),
(3, 6, 7, 8, 9, 13, 18, 0),	(10, 13, 14, 15, 16, 1, 6, 7),
(17, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 14),	(4, 7, 8, 9, 10, 14, 0, 1),
(11, 14, 15, 16, 17, 2, 7, 8),	(18, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 15),
(5, 8, 9, 10, 11, 15, 1, 2),	(12, 15, 16, 17, 18, 3, 8, 9),
(0, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 16),	(6, 9, 10, 11, 12, 16, 2, 3),
(13, 16, 17, 18, 0, 4, 9, 10),	(1, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17),
(7, 10, 11, 12, 13, 17, 3, 4),	(14, 17, 18, 0, 1, 5, 10, 11).

4.125. En  $PG(2, 3)$  se contienen 13 puntos y 13 rectas, y en  $EG(2, 3)$ , 9 puntos y 12 rectas. Por cada punto pasan cuatro rectas y cada recta contiene tres puntos. Por consiguiente, el BIB-esquema que se obtiene de  $EG(2, 3)$  tiene por parámetros:  $v = 9$ ,  $b = 12$ ,  $r = 4$ ,  $\lambda = 1$ . El campo  $GF(3)$  contiene los elementos 0, 1 y  $-1$  que se examinan según el módulo 3. Los puntos de  $PG(2, 3)$  son:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1, 0, 0; & p_6 &= 0; & 1, & 1; & p_{10} &= -1, & 1, & 1; \\
 p_2 &= 0, 1, 0; & p_7 &= 1; & 1, & 1; & p_{11} &= 1, & -1, & 1; \\
 p_3 &= 0, 0, 1; & p_8 &= 1, & -1; & 0; & p_{12} &= 1, & 1, & -1; \\
 p_4 &= 1, 1, 0; & p_9 &= 1, & 0, & -1; & p_{13} &= 0, & -1, & 1. \\
 p_5 &= 1, 0, 1;
 \end{aligned}$$

Las rectas se obtendrán, si tomamos dos puntos, por ejemplo,  $p_1$  y  $p_2$ , y componemos  $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ , donde  $\lambda_i \in GF(3)$ , con la particularidad de que por lo menos uno de  $\lambda_i$  es distinto de cero. La recta que pasa por  $p_1$  y  $p_2$  contiene los puntos  $p_1$  y  $p_2$ ;  $(p_1 + p_2) = p_4$ ;  $(p_1 - p_2) = p_8$ . Al realizar este procedimiento con todos los puntos, obtendremos las rectas:

$$\begin{aligned}
 &p_1, p_2, p_4, p_8 & p_2, p_5, p_7, p_{11} & p_4, p_5, p_{10}, p_{13} \\
 &p_1, p_3, p_5, p_9 & p_2, p_9, p_{10}, p_{12} & p_4, p_6, p_9, p_{11} \\
 &p_1, p_6, p_7, p_{10} & p_3, p_4, p_7, p_{12} & p_5, p_6, p_8, p_{12} \\
 &p_1, p_{11}, p_{12}, p_{13} & p_3, p_8, p_{10}, p_{11} & p_7, p_8, p_9, p_{13} \\
 &p_2, p_3, p_6, p_{13}
 \end{aligned}$$

Si tachamos todos los puntos, cuya última coordenada es 0, obtendremos  $EG(2, 3)$ . Los puntos tachados son  $p_1, p_2, p_4, p_8$ . Así pues, tenemos:

$$\begin{aligned}
 &p_3, p_5, p_9 & p_3, p_{10}, p_{11} & p_3, p_7, p_{12} & p_6, p_7, p_{10} \\
 &p_5, p_6, p_{12} & p_3, p_6, p_{13} & p_9, p_{10}, p_{12} & p_7, p_9, p_{13} \\
 &p_5, p_7, p_{11} & p_{11}, p_{12}, p_{13}
 \end{aligned}$$

Si tomamos estos puntos por elementos del bloque-esquema y las rectas de  $EG(2, 3)$ , por bloques, entonces, al redesignar los elementos

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

obtendremos un BIB-esquema con los parámetros  $v = 9, b = 12, r = 4, k = 3, \lambda = 1$ : (1, 2, 5), (1, 3, 9), (1, 4, 8), (1, 6, 7), (3, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 6, 9), (2, 3, 8), (7, 8, 9), (5, 6, 8), (3, 5, 7), (4, 5, 9).

Es obvio que este esquema es resoluble.

4.126. a) Al plano parcial  $r=3, k=4, t=2$  le corresponde el siguiente PBIB(2)-esquema con los parámetros  $v=16, b=12, r=3, k=4, \lambda_1=1, \lambda_2=0,$

$$n_1=9, n_2=6, p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Este bloque-esquema tiene la forma: (1, 2, 3, 4), (11, 15, 2, 7), (2, 8, 7, 13), (1, 5, 6, 7); (11, 9, 5, 16), (13, 3, 9, 4), (1, 8, 9, 10), (12, 2, 16, 10), (13, 4, 6, 16), (11, 14, 4, 8), (12, 15, 3, 6), (14, 15, 5, 10).

b) Al plano parcial  $r=4, k=5, t=3$  le corresponde el siguiente PBIB(2)-esquema con los parámetros  $v=25, b=20, r=4, k=5, \lambda_1=1,$

$$\lambda_2=0, n_1=16, n_2=5, p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Este bloque-esquema tiene la forma: (1, 2, 3, 4, 5), (1, 6, 7, 8, 9), (1, 10, 11, 12, 13), (1, 14, 15, 16, 17), (18, 2, 6, 9, 21), (18, 3, 7, 11, 22), (18, 4, 8, 12, 23), (18, 5, 9, 13, 24), (19, 2, 7, 14, 24), (19, 3, 8, 15, 21), (19, 4, 9, 16, 22), (19, 5, 6, 17, 23), (20, 2, 11, 16, 23), (20, 3, 12, 17, 24), (20, 4, 13, 14, 21), (20, 5, 10, 15, 22), (25, 6, 11, 15, 24), (25, 7, 12, 16, 21), (25, 8, 13, 17, 22), (25, 9, 10, 14, 23).

4.128. Construyamos el bloque-esquema  $D_3$ : (1, 2), (1, 3), (2, 3). Su matriz de incidencia tiene por expresión

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El bloque-esquema  $D_2$  tiene la forma: (1, 2, 3), (1, 4, 7), (1, 5, 9), (1, 6, 8), (4, 5, 6), (2, 5, 8), (2, 6, 7), (2, 4, 9), (7, 8, 9), (3, 6, 9), (3, 4, 8), (3, 5, 7). La matriz de incidencia del esquema que se busca tiene por expresión

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que este esquema es 2-resoluble con los parámetros  $v^* = 9, b^* = 12, k^* = 6, r^* = 8, \lambda^* = 5, \alpha^* = 2, n^* = 3, v^* = 4, q_0^* = 3, q_1^* = 4.$

4.129. Construyamos el esquema  $D_1$ ; sus parámetros son:  $v_1 = b_1 = 4, r_1 = k_1 = 3, \lambda_1 = 2.$  De manera análoga construimos el esquema  $D_2.$  Las ma-

trices de incidencia de estos esquemas son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los parámetros  $D_2$  son:  $v^* = 16$ ,  $b^* = 12$ ,  $r^* = 9$ ,  $k^* = 12$ ,  $\lambda_1^* = 7$ ,  $\lambda_2^* = 6$ ,  $n_1^* = 9$ ,  $n_2^* = 6$ ,  $\alpha = 3$ ,  $n = 4$ ,  $v = 3$ ,  $p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Es fácil ver que el esquema obtenido es 3-resoluble:  $q_0^* = 8$ ,  $q_1^* = 9$ .

4.130. (véase fig. 4.6'). Los parámetros del PBIB(3)-esquema que se obtiene son:  $v = 18$ ,  $b = 6$ ,  $r = 2$ ,  $k = 6$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 8$ ,  $n_3 = 8$ .

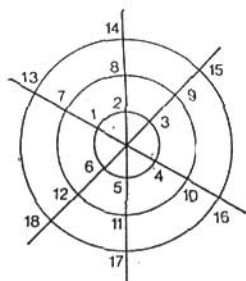


Fig. 4.6'.

$$p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_{jh}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La condición necesaria de resolubilidad del bloque-esquema ( $b \geq r + v - 1$ ) no se cumple en el caso dado ( $6 \not\geq 19$ ), por consiguiente, el bloque-esquema construido no es resoluble.

4.131. (véase fig. 4.7'). En este caso los parámetros del bloque-esquema, el cual construye un PBIB(3)-esquema son:  $v = 32$ ,  $b = 8$ ,  $k = 8$ ,  $r = 2$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 12$ ,  $n_3 = 18$ .

$$p_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}, \quad p_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad p_{jh}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

La condición necesaria de resolubilidad del bloque-esquema no está cumplida ( $8 \nmid 33$ ), quiere decir, el bloque-esquema dado no es resoluble.

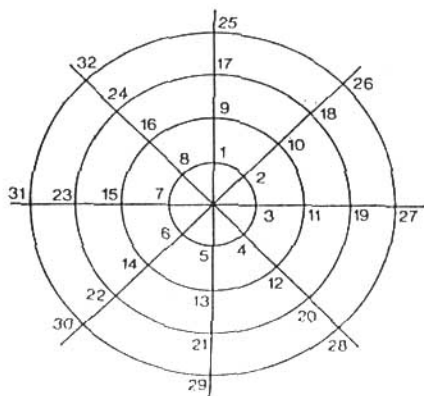


Fig. 4.7'.

4.132. a) Tenemos un PBIB-esquema

$$\left\{ \begin{matrix} (2, 1) \\ (3, 1) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (1, 2) \\ (3, 2) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (1, 3) \\ (2, 3) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (1, 2) \\ (1, 3) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (2, 1) \\ (2, 3) \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} (3, 1) \\ (3, 2) \end{matrix} \right\}.$$

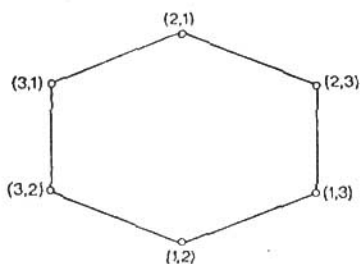


Fig. 4.8'.

Para hallar los parámetros construyamos el diagrama (véase fig. 4.8'):  
 $v = 6$ ,  $b = 6$ ,  $r = k = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $n_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $n_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $n_3 = 1$ .

$$p_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{jk}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Tenemos un PBIB(4)-esquema

$$\begin{array}{cccc} \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \\ (3, 1) \\ (4, 1) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (1, 2) \\ (3, 2) \\ (4, 2) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (1, 3) \\ (2, 3) \\ (4, 3) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (1, 4) \\ (2, 4) \\ (9, 4) \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} (1, 2) \\ (1, 3) \\ (1, 4) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \\ (2, 3) \\ (12, 4) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (3, 1) \\ (3, 2) \\ (3, 4) \end{array} \right\}, & \left\{ \begin{array}{l} (4, 1) \\ (4, 2) \\ (4, 3) \end{array} \right\}. \end{array}$$

Los parámetros son:  $v = 12, b = 8, k = 3, r = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0, n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = 1,$

$$P_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jh}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{jh}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{jh}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.133. Tenemos un PBIB(6)-esquema con los parámetros  $v = 24, b = 12, r = 3, k = 6, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0, \lambda_6 = 8, n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 3, n_4 = 6, n_5 = 3, n_6 = 2.$

## § 5. Problema de Van der Waerden

4.134.  $M = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \sum_{j=0}^k \lambda_j = 1, \lambda_i \geq 0.$  Si  $k > n,$  los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_k$  son dependientes y existen tales números  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k,$  distintos de cero simultáneamente, que  $\sum_{i=0}^k \mu_i = 0, \sum_{i=0}^k \mu_i P_i = 0.$  Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos convengamos en considerar que la magnitud  $|\lambda_k/\mu_k|$  es mínima entre los números  $|\lambda_i/\mu_i|$  con los denominadores  $\mu_i \neq 0.$  Entonces

$$M = \sum_{i=0}^{k-1} \left( \lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) P_i, \quad \sum_{h=0}^{k-1} \left( \lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) = 1,$$

$$\left( \lambda_i - \lambda_k \frac{\mu_i}{\mu_k} \right) \geq 0, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

De este modo, existen  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{k-1}^* \geq 0, \lambda_i^* = \lambda_i - \lambda_k \mu_i/\mu_k$  tales que  $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i^* = 1, M = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i^* P_i$  El procedimiento lo continuamos hasta que  $k$  se haga igual a  $n.$

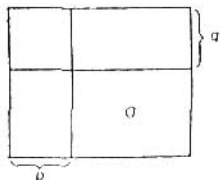
4.135.  $C = \|c_{ij}\|_1^n, A = \|a_{ij}\|_1^n, B = \|b_{ij}\|_1^n, AB = C, c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj} \geq 0,$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} \sum_{j=1}^n b_{lj} = 1, \quad \sum_{i=1}^n c_{ij} = 1.$$

$$4.136. \text{ per } A = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

$$4.137. \text{ per } (A + B) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} (a_{1i_1} + b_{1i_1}) \dots (a_{ni_n} + b_{ni_n}) \geq \\ \geq \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} + \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in S_n} b_{1i_1} \dots b_{ni_n} = \text{per } A + \text{per } B.$$

4.138. Sea  $A = \|a_{ij}\|_1^n$  una matriz dos veces estocástica. Está claro que  $\text{per } A \geq 0$ . Señalemos que  $\text{per } A \neq 0$ . Encerremos todos los elementos no nulos de la matriz  $A$  en  $p$  columnas y  $q$  filas de un modo tal que la suma  $p + q$  adquiera el valor mínimo posible:



De acuerdo con el teorema de König ([1]), el número máximo de elementos no nulos de la matriz  $A$ , de los cuales cualesquiera dos no se encuentran en una fila o en una columna, es igual a  $p + q$ . Si demostráramos que  $p + q = n$ , entonces, por definición del permanente,  $\text{per } A > 0$ . Por cuanto todos los elementos no nulos de  $A$  pueden ser encerrados en  $n$  filas, entonces  $p + q \leq n$ . Y, ya que

$$n = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \geq p + q, \text{ tenemos } p + q = n. \text{ La afirmación está demostrada.}$$

4.139. Llamemos *transversal* un juego de  $n$  elementos de la matriz  $A$  de orden  $n$ , de los cuales cualesquiera dos no se disponen en una misma fila o en una misma columna.

Por cuanto  $\text{per } A > 0$  (véase el problema 4.138), existe una transversal compuesta por elementos no nulos. Supongamos que el elemento mínimo de dichos elementos es  $\lambda_1 > 0$ , y sea  $P_1$  una matriz conmutable que corresponde a la transversal. Ya que la matriz  $(A - \lambda_1 P_1)/(1 - \lambda_1)$  es dos veces estocástica, entonces  $\text{per } (A - \lambda_1 P_1) > 0$  y existe una transversal que se compone de los elementos no nulos. Denotemos con  $\lambda_2$  el mínimo de estos elementos, etc. Por

cuanto la matriz  $A - \sum_{i=1}^j \lambda_i P_i$  contiene no menos de  $j$  elementos nulos, el pro-

ceso que se aplica es finito y se dará por terminado no más tarde de que llegue el  $(n^2 - n + 1)$ -ésimo paso (tras el  $(n^2 - n + 1)$ -ésimo paso de la matriz

$A - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ , que tiene sumas iguales de elementos en las filas y en las columnas, contendría no más de  $n - 1$  elementos no nulos y, por consiguiente, todos los elementos de esta matriz son nulos).

4.140. Las operaciones de  $\oplus$  y  $\star$  por un número se introducen de conformidad con las siguientes reglas:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para } i < n, j < n,$$

$$c_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} \quad \text{para } i < n,$$

$$A \oplus B = C \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} c_{nj} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{ij} \quad \text{para } j < n, \\ c_{nn} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} c_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} = \sum_{i,j=1}^{n-1} c_{ij} - (n-2); \\ b_{ij} &= \lambda a_{ij} \quad \text{para } i < n, j < n, \\ b_{in} &= 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \quad \text{para } i < n, \end{aligned}$$

$$B = \lambda * A \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} b_{nj} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} \quad \text{para } j < n, \\ b_{nn} &= 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_{in} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{jn} = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij} - (n-2). \end{aligned}$$

No es difícil ver que en una matriz de orden  $n-1$ , complementaria al elemento con índices  $n, n$ , estas operaciones coinciden con las operaciones ordinarias de adición y multiplicación. Por consiguiente, un conjunto de matrices cuadradas de orden  $n$ , en las cuales la suma de elementos en cualquier fila y en cualquier columna es igual a uno, es isomorfo al espacio de matrices cuadradas de orden  $(n-1)^2$ .

4.141. Sea  $A$  una matriz dos veces estocástica y supongamos que las operaciones  $*$  y  $\oplus$  están introducidas en la solución del problema 4.140. Observemos que, hablando en general,  $\lambda A \neq \lambda * A$ ,  $A + B \neq A \oplus B$ , sin embargo, para los números

$$\lambda_1, \dots, \lambda_h \geq 0, \quad \sum_{i=1}^h \lambda_i = 1, \quad \text{se cumple la igualdad } \sum_{i=1}^h \lambda_i P_i = \oplus \sum_{i=1}^h \lambda_i * P_i,$$

donde  $P_i$  son matrices conmutables. Puesto que  $A = \sum_{i=1}^h \lambda_i P_i$  (véase el problema 4.139),  $\sum_{i=1}^h \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i > 0$ , entonces  $A = \oplus \sum_{i=1}^h \lambda_i * P_i$ . Existen los números enteros  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{(n-1)^2}$  y los números no negativos  $\mu_{ij}$  ( $j=0, \dots$

$\dots, (n-1)^2$ ) tales que  $\sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{ij} = 1$ ,  $A = \oplus \sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{ij} * P_{i_j}$ . Por consiguiente,

$$A = \sum_{j=0}^{(n-1)^2} \mu_{i_j} P_{i_j}. \quad \text{La afirmación está demostrada.}$$

4.142. Debido a los resultados obtenidos en los problemas 4.141 y 4.137, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^h \lambda_i P_i, \quad \sum_{i=1}^h \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0, \\ k &\leq n^2 - 2n + 2, \end{aligned}$$





deben ser iguales (puesto que las funciones  $\varphi_j$  son simétricas). No obstante, esto no es así: per  $A_1 \neq$  per  $A_2$ . La contradicción obtenida muestra que el permanente de una matriz dos veces estocástica no puede ser representado en forma de una función simétrica con relación a los elementos de cualquier fila de la matriz.

4.147. a) Supongamos que la matriz  $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^n$ ,  $a_{ij} > 0$ , es de tal género que su permanente tiene el valor mínimo entre los permanentes de todas las matrices dos veces estocásticas de orden  $n$ . Si tal matriz no es única, elijamos  $A$

de un modo tal que la suma  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$  sea tan pequeña como se pueda. Puesto que

el conjunto de matrices dos veces estocásticas está acotado en  $R^{n^2}$  respecto de la mé-

trica  $\alpha(A, A') = \left( \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} - a'_{ij})^2 \right)^{1/2}$  y la función del permanente es continua en

esta métrica, entonces el conjunto de todas las matrices dos veces estocásticas de orden  $n$ , que tienen el valor mínimo del permanente, es compacto y la

suma  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$  alcanza en éste su mínimo.

Pongamos  $a_{ij}(t) = a_{ij}$  para  $i \neq i_1, i_2$ .

$$a_{i_1 j}(t) = (1-t)a_{i_1 j} + ta_{i_2 j},$$

$$a_{i_2 j}(t) = ta_{i_1 j} + (1-t)a_{i_2 j}.$$

Por cuanto la función per  $A(t)$  alcanza su mínimo cuando  $t = 0, 1$  sobre el intervalo  $]-\epsilon, 1 + \epsilon[$  para cierto  $\epsilon > 0$ , y como per  $A(t)$  es un polinomio de  $t$  cuyo grado no es superior a dos, entonces per  $A(t) \equiv \text{const}$ , per  $A = \text{per } A(0) = \text{per } A(1)$ .

Al hacer uso de la desigualdad  $x^2 + y^2 \geq 2(xy)/2$ , obtendremos

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 (1/2)$ , con la particularidad de que el signo de igualdad subsiste cuando y sólo cuando para cualesquiera  $i, j$  se cumple la igualdad

$a_{ij} = a_{ij}(1/2)$ . Por cuanto  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 (1/2)$  en virtud de la elección

de la matriz  $A$ , el signo de igualdad realmente tiene lugar y  $a_{i_1 j} = (a_{i_1 j} + a_{i_2 j})/2$ . Por consiguiente,  $a_{i_1 j} = a_{i_2 j}$ . Dado que  $i_1$  y  $i_2$  se han elegido de una manera arbitraria, todos los  $a_{ij}$  son iguales entre sí y su valor vale  $1/n$ . Por consiguiente, per  $A = n!/n^n$ . La afirmación queda demostrada.

b) Véase el lema 6 del § 4, capítulo 4 [1].

4.148. Tenemos

$$\text{per}^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \text{per} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{11} \det A_{11} + a_{21} \det A_{21} - a_{31} \det A_{31})^2 + 4a_{21}a_{31} \det A_{21} \det A_{31} \geq 0,$$

donde  $A_{i_1 j}$  es una matriz obtenida de la matriz  $A$  por supresión de la fila y la columna que contienen el elemento  $a_{ij}$ . Por conmutación de las filas de la matriz  $A$  logremos que se verifique la desigualdad  $a_{12}/a_{13} \geq a_{22}/a_{23} \geq a_{32}/a_{33}$ , donde se supone que el valor de la fracción es igual a  $+\infty$ , siempre que su denominador es igual a cero. Por cuanto los números  $a_{j3}$  son no negativos, de las citadas desigualdades se deducen las siguientes:  $\det A_{a_{i1}} \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Por consiguiente, el signo de igualdad es posible cuando y sólo cuando  $\det A_{a_{i1}} = 0$ ,  $a_{i n-1} = \lambda a_{i n}$ , lo que se trataba de demostrar.

## MÉTODOS GEOMÉTRICOS

### § 1. Interpretaciones y problemas referentes a los grafos

5.1. Los grafos en las figuras 5.1 y 5.2 son isomorfos entre sí. En la fig. 5.5 son isomorfos solamente los grafos *a)* y *d)*, mientras que en la fig. 5.3, los grafos *a)* y *b)*. Todos los bosques en la fig. 5.6 son no isomorfos.

5.3. La afirmación inversa es errónea. Por ejemplo, los grafos en la fig. 5.1' tienen valores propios iguales  $(\pm 2, 0, 0, 0)$  en la matriz de adyacencia, pero los propios grafos son no isomorfos entre sí.

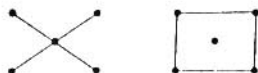


Fig. 5.1'.

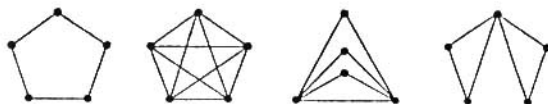


Fig. 5.2'.

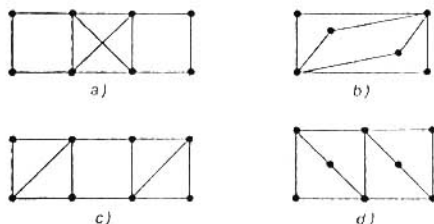


Fig. 5.3'.

5.8. En la fig. 5.2' están representados cuatro grafos eulerianos sobre 5 vértices.

5.11. Los grafos buscados para los puntos a), b), c) y d) del problema están representados en la fig. 5.3' a), b), c) y d), respectivamente.

5.12. Todos los  $(n - 1)$  vértices se unirán dos a dos por medio de aristas. Obtendremos  $(n - 1)(n - 2)/2$  aristas. La adición de una arista hace el grafo conexo.

5.13. Véase la fig. 5.4'.

5.14. Véase la fig. 5.5':  $6t + 16 = 6t + 12 + 4 = 6(t + 2) + 4$ .

5.15. Supongamos que tal grafo existe. Sean  $x_1, \dots, x_n$  sus vértices numerados según el crecimiento de los grados. Denotemos  $k_i = \deg x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Tenemos  $k_1 + \dots + k_n \geq 0 + 1 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$

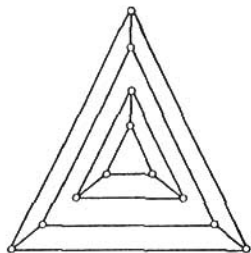


Fig. 5.4'.

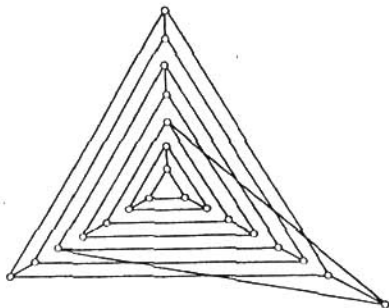


Fig. 5.5'.

En el complemento de este grafo los grados de todos los vértices son también diferentes, y  $(n - 1 - k_1) + (n - 1 - k_2) + \dots + (n - 1 - k_n) = n(n - 1) - (k_1 + \dots + k_n) \leq n(n - 1)/2$ , en tanto que, de conformidad con lo anterior, el mismo número debe ser no inferior a  $n(n - 1)/2$ . Por consiguiente,  $k_1 + \dots + k_n = n(n - 1)/2$ . De este modo,  $k_1 = 0, k_2 = 1, \dots, k_n = n - 1$ . Cuando  $n > 1$ , desechemos el vértice  $x_1$ ; obtendremos un grafo con diferentes grados de los vértices iguales a  $1, 2, \dots, n - 1$ , lo que es imposible, de acuerdo con lo demostrado más arriba. Así pues, la suposición no es cierta. El caso de  $n = 1$  es el único en que el grafo está privado de dos vértices de grados iguales.

5.16. a) existe; b) no existe.

5.17.  $(3^2 4^4 6^2)$ .

5.18. El grafo  $G_1 \times G_2$  es regular, puesto que  $\deg G_1 \times G_2(x, y) = \deg_{G_1} x + \deg_{G_2} y$ . El grafo  $G_1 + G_2$  es regular cuando y sólo cuando  $k_1 + n_2 = k_2 + n_1$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son órdenes de los grafos  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente.

5.22.  $(3^{10} 4^4)$  (fig. 5.6').

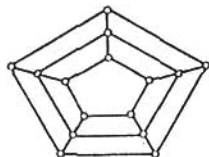


Fig. 5.6'.

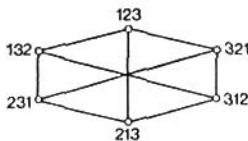


Fig. 5.7'.

5.24. Tales son, por ejemplo,  $C_4 - e$  y  $C_5$ .

5.25. Indicaciones. Un grafo homogéneo de grado impar contiene un número par de vértices.

5.26. El orden es  $n!$ ; la dimensión es  $\frac{n!}{2} \binom{n}{2}$ ; el grado de cada vértice es  $\binom{n}{2}$ . El grafo es regular. Véase la fig. 5.7'.

5.30. El orden del cliques para a) es igual a 5, para b), a 4. Ejemplos de particiones:

a)	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6		
	3	4	2	5	2	6	2	4	2	3		
	5	6	4	6	3	5	3	6	4	5		
b)	1	2	3	1	4	7	1	9	11	1	8	10
	4	5	6	2	5	10	2	6	8	2	4	12
	7	8	9	3	8	11	3	4	10	3	5	9
	10	11	12	6	9	12	5	7	12	6	7	11

5.34. El grafo de Ferrers establece una correspondencia biunívoca entre las particiones de este género.

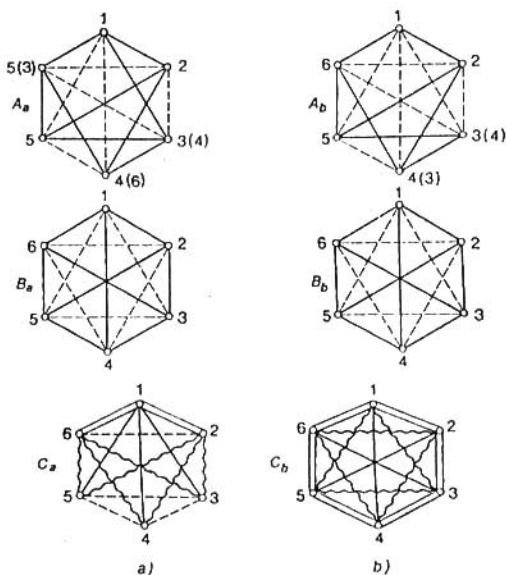


Fig. 5.8'.

5.35. Véase la figura 5.8'.

5.36. El grafo  $A_a$  se reduce al grafo  $B_a$  (véase fig. 5.8') por medio de la permutación  $(3\ 6\ 4)$ . En este caso el cuadrado  $A$  se transforma (efectuamos la

permutación de las filas (3 6 4) en cuadrado latino  $C$ :

	$C$						$D$						$B$							
	1	2	3	4	5	6		1	2	4	3	5	6		1	2	3	6	5	4
	2	1	4	3	6	5		2	1	3	4	6	5		2	1	6	3	4	5
filas	4	6	2	5	1	3	columnas	4	6	5	2	1	3	elemen.	3	4	5	2	1	6
$(3\ 6\ 4) \rightarrow$	6	4	5	2	3	1	$(3\ 4) \rightarrow$	6	4	2	5	3	1	$(3\ 6\ 4) \rightarrow$	4	3	2	5	6	1
	5	3	6	1	4	2		5	3	1	6	4	2		5	6	1	4	3	2
	3	5	1	6	2	4		3	5	6	1	2	4		6	5	4	1	2	3

El grafo  $A_b$  se reduce al grafo  $B_b$  con ayuda de la permutación (3 4). En este caso el cuadrado que acabamos de obtener se convierte en el siguiente cuadrado latino  $D$  (véase más arriba; efectuamos la permutación de las columnas (3 4)). Los cuadrados latinos  $D$  y  $C$  tienen grafos iguales tanto para las filas como para las columnas. En definitiva, el cuadrado  $D$  se reduce al cuadrado  $B$  por permutación de los elementos (3 6 4).

Así pues, las permutaciones que convierten el cuadrado latino  $A$  en el cuadrado latino  $B$  son las siguientes para las filas, las columnas y los elementos: (3 6 4); (3 4); (3 6 4).

5.38. a)  $S_n$ ; c) el grupo de automorfismos es de orden 12; se compone de  $3! = 6$  permutaciones de los elementos 1 4 2 y de la multiplicación de éstos por la permutación (3 5);

d) Las permutaciones que conservan el grafo son:

(2 4 6) (1 3 5); (2 4 6) (1 5 3); (1 4) (2 3) (5 6);  
 (1 3) (4 6); (1 2 3 4 5 6); (1 6 5 4 3 2);  
 (1 2) (3 6) (4 5); (1 6) (2 5) (3 4); (1 5) (2 4);  
 (1 4) (2 5) (3 6); (1) (2) (3) (4) (5) (6); (2 6) (3 5).

El grupo de automorfismos es de orden 12.

5.39. Véase la fig. 5.9'.

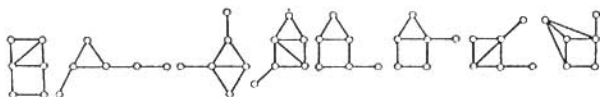


Fig. 5.9'.

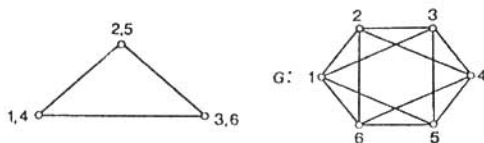


Fig. 5.10'.

5.40. a)  $S_n \times S_m$ ; b)  $(S_n \times S_n) \lambda S_2$ ; c)  $(S_{n-1} \times S_{n-1}) \lambda S_2$ ; d)  $S_n \times S_2$ , donde  $x$  es el producto directo y  $\lambda$ , el producto semidirecto de los grupos.

5.41. Véase la fig. 5.10'.

5.42. El BIB-esquema da el recubrimiento del grafo con  $k$ -subgrafos completos de un modo tal que cada vértice pertenece a  $r$  subgrafos y cada arista, a  $\lambda$  subgrafos.

5.43.  $v = 6, b = 8, r = 4, k = 3, \lambda = 2$ . Sí.

5.44. Véase la fig. 5.11'.

5.45. Sea  $\Gamma$  un subgrafo de cierto grafo  $G$ . Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_B$  una totalidad de subgrafos del grafo  $G$ , cada uno de los cuales es isomorfo a  $\Gamma$ . La totalidad de estos subgrafos forma en  $G$  un BIB-esquema generalizado, si

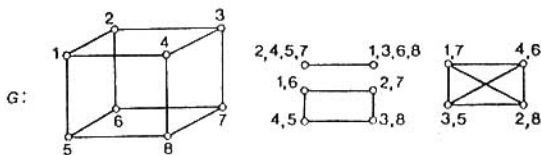


Fig. 5.11'.

a) cada vértice de  $G$  pertenece a un mismo número  $r$  de grafos del sistema

$\Gamma_i: i = i_1, i_2, \dots, i_r$ ;

b) cada arista de  $G$  pertenece a un mismo número  $r$  de grafos del sistema

$\Gamma_i: i = i_1, i_2, \dots, i_r$ .

5.46. Sí.

5.47.

1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		1	2	3
4	5	1	2	3		4	5	1	2	3		4	5	1
2	3	4	5	1		2	3	4	5	1		2	3	4
5	1	2	3	4		5	1	2	3	4		5	1	2
3	4	5	1	2		3	4	5	1	2		3	4	5

En la tabla están integrados dos cuadrados latinos de orden 5.

5.48. No es difícil poner parquet de placas hexagonales de tres colores (fig. 5.12'). Los colores se disponen de tal modo que en la célula de la  $n$ -ésima fila figure un color distinto de los colores de las células que están por encima de la misma en la  $(n - 1)$ -ésima fila.

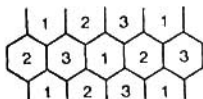


Fig. 5.12'.



Fig. 5.13'.

La coloración en dos colores no es posible, puesto que si de tres hexágonos (fig. 5.13') dos están pintados de un color, entonces todos los hexágonos del parquet han de ser pintados de este mismo color.

Las coloraciones de tres y cuatro colores se determinan con facilidad. Supongamos, por ejemplo, que el parquet está pintado de tres colores, uno de los cuales es blanco. Pintando las células blancas en tres colores de la misma manera que hemos pintado todo el parquet, se puede aumentar el número de colores en dos, a continuación, en dos más, etc.

5.49. El orden del grafo es igual a  $\binom{n}{k}$ . El grafo de cada vértice es  $\binom{n-k}{k-l} \binom{k}{l}$ ; el grafo es regular, de dimensión  $\frac{1}{2} \binom{n}{k} \binom{k}{l} \binom{n-k}{k-l}$ .

$$5.50. \chi(K_n) = n; \chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

el número cromático de todos los demás grafos es igual a 2.

5.51. a)  $n-1$ ; b)  $n-1$ , si quedan eliminadas las aristas adyacentes, de lo contrario,  $n-2$ ; c)  $n-2$ .

5.52. Si la distancia entre los extremos de la arista introducida en el grafo  $G_m$  era par, entonces el número cromático es igual a 2; si no, a 3.

5.54.  $251 \cdot K_4$ .

5.55. Véase la fig. 5.14'.

5.56. No, no se puede.

5.58. 11

5.61. La igualdad requerida se desprende directamente del hecho de que el conjunto de  $\lambda$ -coloraciones regulares del grafo  $G - e$  puede ser dividido en dos subconjuntos: coloraciones, donde los vértices terminales de la arista  $e$  están pintados de colores diferentes, y coloraciones donde dichos vértices están pintados de un mismo color.

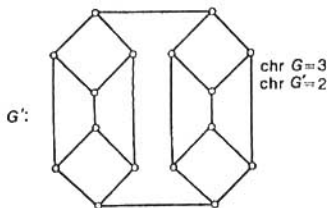


Fig. 5.14'.

La potencia del primer conjunto es igual, evidentemente, al número de  $\lambda$ -coloraciones del grafo  $G$ , es decir, a  $P(G; \lambda)$ , mientras que la potencia del segundo subconjunto, al número de  $\lambda$ -coloraciones del grafo  $G/e$ , es decir, a  $P(G/e, \lambda)$ , lo que se trataba de demostrar.

5.62. Hágase uso del problema 5.61

$$P(K_n; \lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - k + 1).$$

Para calcular  $P(G; \lambda)$  aprovechemos la fórmula. Entonces

$$P(G; \lambda) = \lambda^5 - 7\lambda^4 + 18\lambda^3 - 20\lambda^2 + 8\lambda.$$

Además,  $P(G; 2) = 0$  y  $P(G; 3) = 6 > 0$ . Por consiguiente, los vértices del grafo  $G$  pueden pintarse correctamente en tres colores.

5.63. Hágase uso de la fórmula del problema 5.61. El polinomio  $f(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2$  posee todas las propiedades de un polinomio cromático pero no es cromático. En efecto, si existiera un grafo  $G$  con tal polinomio cromático, debería tener 4 vértices, 3 aristas y 2 componentes conexos, es decir, un componente conexo sería  $K_3$  y el otro,  $K_1$ . Mas el polinomio cromático de tal grafo es igual, en virtud de la propiedad d), a

$$\lambda \cdot (\lambda - 1) (\lambda - 2) \cdot \lambda = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 \neq f(\lambda).$$

5.64. Hágase uso del problema 7.222. Entonces, a) es un corolario inmediato del problema 7.212 c), mientras que b) y c) se deducen de la fórmula de Ph. Hall (problema 7.203) para las funciones de Moebius en el retículo geométrico  $L(G)$  del grafo  $G$  y de las propiedades de este retículo (véase también capítulo VIII).

5.65. Mostremos por inducción según el número de vértices, que el polinomio cromático de cualquier árbol marcado con  $n$  vértices es igual a  $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ . Para  $n=1$  y  $n=2$  el resultado es evidente. Supongamos que el polinomio cromático de todos los árboles con  $n-1$  vértices tiene la forma  $\lambda(\lambda-1)^{n-2}$ . Sea  $x$  un vértice pendiente del árbol  $T$ , y  $e$ , la arista de éste que es incidente con



relación al vértice  $x$ . Por suposición de inducción, el polinomio cromático del árbol  $T - e$  es  $\lambda(\lambda - 1)^{n-2}$ . El vértice  $x$  puede ser pintado de cualquier color, distinto del color de otro vértice terminal de la arista  $e$ , de suerte que  $x$  puede pintarse empleando  $\lambda - 1$  procedimientos. De este modo,  $P(T, \lambda) = (\lambda - 1) \times P(T - e; \lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1)^{n-1}$ .

Viceversa, sea  $G$  un grafo en el cual  $P(G; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ . Por cuanto el coeficiente de  $\lambda$  en  $P(G; \lambda)$  no es igual a 0, y para  $\lambda^{n-1}$  es igual a  $(n - 1)$ , entonces, en virtud del problema 5.63, el grafo  $G$  es conexo y tiene  $(n - 1)$  aristas, es decir, es en una unidad inferior al número de vértices. Por consiguiente,  $G$  es un árbol.

## § 2. Problemas enumerativos en los grafos

5.66. Observemos que el número de  $(\alpha, 0, \gamma)$ -grafos con  $n$  vértices y  $k$  aristas es igual al número de  $k$ -subconjuntos del conjunto correspondiente de todas las aristas posibles, de suerte que para poder escribir las fórmulas hace falta sólo conocer la potencia del conjunto de aristas. Si se trata de los grafos no orientados, dicha potencia es igual a  $n(n - 1)/2$ , siempre que los bucles se excluyan y es igual a  $n(n + 1)/2$ , si los bucles se admiten. En el caso de los grafos orientados, la potencia es igual a  $n(n - 1)$  y  $n(n + 1)$ , respectivamente. Ilustremos el método de obtención de fórmulas para  $g_{\alpha, 1, \gamma}$  con un ejemplo del  $(0, 1, 0)$ -grafo. Reenumeremos los pares posibles de vértices de tal grafo con  $n$  vértices. Sea  $x_i \geq 0$  el número de aristas que unen el  $i$ -ésimo par de vértices en el  $(0, 1, 0)$ -grafo con  $n$  vértices y  $k$  aristas. Tenemos una ecuación en números enteros no negativos:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n(n-1)/2} = k.$$

El número de diferentes soluciones de esta ecuación es igual, como se sabe, a

$$\binom{n(n-1)/2 + k - 1}{k} = g_{0, 1, 0}(n, k),$$

puesto que todo  $(0, 1, 0)$ -grafo se define unívocamente por el juego de magnitudes  $(x_1, x_2, \dots, x_{n(n-1)/2})$ . La demostración de los demás casos es análoga. De lo obtenido se deduce que el número máximo posible de aristas en el  $(\alpha, 0, \gamma)$ -grafo con  $n$  vértices es igual a

$$\begin{array}{ll} n(n-1)/2 & \text{para } \alpha = 0, \gamma = 0; \quad n(n+1)/2 & \text{para } \alpha = 1, \gamma = 0; \\ n(n-1) & \text{para } \alpha = 0, \gamma = 1; \quad n^2 & \text{para } \alpha = 1, \gamma = 1. \end{array}$$

El número máximo posible de aristas en el  $(\alpha, 1, \gamma)$ -grafo es igual a  $\infty$ .

5.67. En el caso de  $\beta = 0$  se deben aprovechar las fórmulas correspondientes para los  $(\alpha, 0, \gamma)$ -grafos del problema 5.66 y del teorema binomial. Demostremos ahora, por ejemplo, la representación para la función generatriz  $G_{0, 1, 0}^{(n)}(y)$ . De la definición de la función generatriz  $G_{0, 1, 0}^{(n)}(y)$ , con ayuda de la fórmula para  $g_{0, 1, 0}(n, k)$  del problema antecedente obtenemos:

$$G_{0, 1, 0}^{(n)}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n(n-1)/2 + k - 1}{k} y^k.$$

De un modo análogo se demuestran las fórmulas restantes.

5.68. En el caso de  $n = 0$  la correlación (5.1) se reduce, en virtud de las condiciones iniciales, a la igualdad  $g(1, k) = c(1, k)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), la cual se verifica con toda la evidencia, puesto que todos los  $(\alpha, \beta, \gamma)$ -grafos con un vértice son conexos. Con el fin de obtener la relación recurrente (5.1) para  $n \geq 1$ , observemos que en el grafo  $H$  con  $n + 1$  vértices  $P_1, \dots, P_{n+1}$  y  $k$  aristas el vértice  $P_{n+1}$  pertenece a cierto componente conexo  $K$  que tiene  $l$

( $l = 0, 1, \dots, n$ ) otros vértices y  $m$  ( $0 \leq m \leq k$ ) aristas. Una parte  $J$  del grafo  $H$  que se obtiene por supresión del componente  $K$  tiene  $n - l$  vértices y  $k - m$  aristas. Existen  $\binom{n}{l}$  métodos para elegir los vértices que integran, a la par con  $P_{n+1}$ , el componente  $K$ ; existen  $c(l+1, m)$  procedimientos de elección de  $K$  para una composición fija de vértices, y hay  $g(n-l, k-m)$  procedimientos de elección de  $J$ .

De los razonamientos aducidos se deduce precisamente la validez de la fórmula (5.1).

5.69. Multipliquemos ambos miembros de (5.1) por  $y^k$  y sumemos respecto de todos los valores posibles de  $k$ . Entonces para cualesquiera  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  obtendremos en el primer miembro

$$\sum_{h \geq 0} g_{\alpha, \beta, \gamma}(n+1, h) y^h = G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n+1)}(y), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

y en el segundo miembro

$$\sum_{h \geq 0} y^h \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^h \binom{n}{l} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) g_{\alpha, \beta, \gamma}(n-l, k-m), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Alternando el orden de sumación, obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{m \geq 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) y^m \sum_{h \geq m} g_{\alpha, \beta, \gamma}(n-l, k-m) y^{h-m} = \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{m \geq 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) y^m \sum_{h \geq 0} g_{\alpha, \beta, \gamma}(n-l, h) y^h = \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y) \sum_{m \geq 0} c_{\alpha, \beta, \gamma}(l+1, m) y^m = \\ & = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y), \quad n=0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

lo que, obviamente, conduce a la solución del problema.

5.70. Multipliquemos ambos miembros de (5.2) por  $z^n/n!$  y sumemos respecto de  $n$  desde 0 hasta  $\infty$ . Obtendremos en el primer miembro

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n+1)}(y) \frac{z^n}{n!} = \frac{d}{dz} G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y),$$

y en el segundo

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n!}{l!(n-l)!} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) \frac{z^l}{l!} \sum_{n=l}^{\infty} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n-l)}(y) \frac{z^{n-l}}{(n-l)!} = \\ & = G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) \sum_{l=0}^{\infty} C_{\alpha, \beta, \gamma}^{(l+1)}(y) \frac{z^l}{l!} = G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) \frac{d}{dz} C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y). \end{aligned}$$

De este modo,  $\frac{d}{dz} G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) \frac{d}{dz} C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y)$ . De aquí,  $\ln G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) + K(y)$ , donde  $K(y)$  es una función arbitraria de  $y$ . A continuación obtenemos

$$G_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) = \exp \{C_{\alpha, \beta, \gamma}(z, y) + K(y)\}.$$

Suponiendo  $z=0$  y teniendo presente que  $G_{\alpha, \beta, \gamma}(0, y) = 1$  y  $C_{\alpha, \beta, \gamma}(0, y) = 0$ , obtenemos  $K(y) = 0$ . Esto demuestra el resultado requerido.

5.71. Para enumerar los grafos requeridos basta unir con una arista los vértices de cada parte de la partición del  $2n$ -conjunto de vértices en  $n$  partes, cada una de las cuales contiene 2 elementos. Por consiguiente, el número buscado (designémoslo por  $\mu_{2n}$ ) es igual a  $\mu_{2n} = B_{2n}(0, n, 0, \dots, 0)$  y la respuesta a la pregunta planteada será

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \prod_{i=1}^n (2n - 2i + 1).$$

Indiquemos que la magnitud  $\mu_{2n}$  coincide con el  $(2n)$ -ésimo momento de una magnitud aleatoria normal cuyos parámetros son  $(0, 1)$ . [Véase Kendall M., Stuart D. *Distribution Theory* (2<sup>nd</sup> ed.), Charles Griggin and Company Limited, London, 1966.]

5.72. Tenemos  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ . Haciendo uso de la fórmula del problema antecedente, podemos escribir

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n n!} = e^{z^2/2}.$$

Así pues, la función generatriz exponencial de los números  $\mu_n$  es  $e^{z^2/2}$ .

5.73. Veamos un conjunto de todos los  $(0, 0, 0)$ -grafos conexos con vértices marcados  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Sea  $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) el número de los grafos, en los cuales los vértices  $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i}$  son terminales, mientras que los otros  $n - i$  vértices pueden ser cualesquiera. De conformidad con el método de inclusión y exclusión tenemos

$$F(n, k) = G(n, k) - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^j S_i \dots + (-1)^n S_n, \quad (5.1')$$

donde

$$S_i = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} N(P_{j_1}, \dots, P_{j_i}). \quad (5.2')$$

Hallemos  $N(P_{j_1}, \dots, P_{j_i})$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Con este fin indiquemos que si un grafo es conexo y tiene más de dos vértices, cualquiera de sus vértices terminales es adyacente solamente a otro vértice, que no puede ser terminal. Por eso, la supresión de los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_i}$  del grafo conexo con  $n$  vértices y  $k$  aristas nos llevará a un grafo conexo con  $n - i$  vértices y  $k - i$  aristas. De aquí se desprende que para indicar los grafos cuyo número es igual a  $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i})$  hace falta proceder del modo siguiente:

a) elegimos un grafo conexo  $\Gamma$  con  $n - i$  vértices marcados y  $k - i$  aristas (el conjunto de vértices de  $\Gamma$  lo obtenemos por supresión de los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_i}$  de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ );

b) agregamos a  $\Gamma$  además los  $i$  vértices nuevos, a saber,  $P_{j_1}, \dots, P_{j_i}$ ;

c) unimos cada uno de estos últimos con uno de los vértices del grafo original  $\Gamma$ , lo que puede cumplirse empleando  $(n - i)^i$  procedimientos.

Por cuanto en a) el grafo  $\Gamma$  puede elegirse mediante  $c(n - i, k - i)$  procedimientos, de resultas obtenemos:

$$N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i}) = c(n - i, k - i)(n - i)^i. \quad (5.3')$$

Esta fórmula se ha demostrado para  $i = 1, \dots, n - 1$ . No obstante, queda válida también para  $i = n$ , puesto que  $N(P_1, \dots, P_n)$  es igual, evidentemente, a cero. De (5.3') se ve que el número  $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_i})$  no depende de  $j_1, j_2, \dots, j_i$ . De (5.2') y (5.3') encontramos que  $S_i = \binom{n}{i} c(n - i, k - i) \times \times (n - i)^i$ , y la fórmula (5.1') se reduce a la forma

$$F(n, k) = c(n, k) - \binom{n}{1} c(n - 1, k - 1)(n - 1) + \dots \\ \dots + (-1)^i \binom{n}{i} c(n - i, k - i)(n - i)^i \pm \dots, \quad n \geq 2,$$

y la fórmula que se requería por las condiciones del problema queda demostrada.

5.74. Para  $n = 1$  la fórmula (5.4) se comprueba directamente. Supongamos ahora que la fórmula de Cayley es verdadera para  $n = 1, 2, \dots, p, p \geq 2$ , y demostremos que es también válida para  $n = p + 1$ . Hagamos uso del problema 5.73 para  $k = n + 1$ . Por cuanto el árbol con  $n > 1$  vértices tiene siempre vértices terminales, entonces  $F(n, n - 1) = 0, n > 1$ . Teniendo presente que  $c(n, n - 1) = T(n)$ , del problema 5.73 obtenemos

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i T(n - i)(n - i)^i = 0, \quad n > 1. \quad (5.4')$$

Por hipótesis la fórmula (5.4) es válida para  $n = 1, 2, \dots, p$ ; por eso, para  $n = p + 1$  tenemos de (5.4'):

$$T(p + 1) + \sum_{i=1}^p (-1)^i \binom{p+1}{i} (p + 1 - i)^{p-i-1} (p + 1 - i)^i = 0.$$

De aquí

$$T(p + 1) = - \sum_{i=1}^p (-1)^i \binom{p+1}{i} (p + 1 - i)^{p-1},$$

o bien

$$T(p + 1) = (p + 1)^{p-1} - \sum_{i=1}^p (-1)^i \binom{p+1}{i} (p + 1 - i)^{p-1}. \quad (5.5')$$

La suma en el segundo miembro de la relación (5.5') es igual a cero, por lo cual  $T(p + 1) = (p + 1)^{p-1}$  y el paso de la inducción es cierto. El problema está resuelto.

5.75. La expresión explícita para los números  $T_n(P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$  se halla de un modo análogo al problema 5.73. En efecto, si los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$  son terminales, ellos no son adyacentes entre sí y su supresión junto con las aristas conduce a un árbol con  $n - r$  vértices. Por eso, para hallar los números  $T_n(P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$  procedemos del modo siguiente:

a) construimos en  $n - r$  vértices del conjunto  $M = \{P_1, \dots, P_n\} \setminus \{P_{j_1}, \dots, P_{j_r}\}$  un árbol que se denotará por  $\Gamma$ ; según el problema 5.74, sobre el conjunto  $\Gamma$  pueden construirse  $T(n - r) = (n - r)^{n-r-2}$  árboles diferentes;

b) agregamos a  $M$ ,  $r$  elementos más:  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$ ;

c) unimos cada uno de los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$ , mediante una arista, con uno de los vértices del árbol  $\Gamma$ , construido en a), lo que se realiza con ayuda de  $(n - r)^r$  procedimientos.

Se obtiene de resultados un árbol con  $n$  vértices  $P_1, \dots, P_n$ , en el cual los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$  son terminales. De este modo pueden obtenerse todos los árboles de tal género. Por consiguiente,

$$T_n(P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = (n - r)^{n-r-2} (n - r)^r = (n - r)^{n-2}.$$

5.76. Cuando  $n = 1, 2$ , la validez de la fórmula (5.5) se establece directamente. Sea, ahora,  $n \geq 2$ . Haciendo uso del método de inclusión y exclusión y suponiendo  $T(0) = 1$ , obtenemos, por analogía con la resolución del problema 5.73:

$$\begin{aligned} T(n, r) &= (-1)^r \sum_{i=r}^n (-1)^i \binom{i}{r} \binom{n}{i} T(n-i) (n-i)^i = \\ &= (-1)^r \frac{n!}{r!} \sum_{i=r}^n (-1)^i \binom{n-r}{n-i} T(n-i) (n-i)^i = \\ &= (-1)^{2r} \frac{n!}{r! (n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} T(n-j-r) (n-j-r)^{j+r}. \end{aligned}$$

Recurriendo a la primera fórmula de Cayley, de aquí encontramos

$$\begin{aligned} T(n, r) &= \frac{n!}{r! (n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^{n-r-j-2+j+r} = \\ &= \frac{n!}{r! (n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} (n-r-j)^{n-2}. \end{aligned}$$

Ahora aprovechamos la definición de los números de Stirling de 2º género y obtenemos el resultado requerido.

5.77. Por cuanto  $T(n) = \sum_{r=0}^n T(n, r)$  y para  $n \geq 2$  tenemos  $T(n, 0) = T(n, 1) = 0$ , entonces, de acuerdo con la fórmula (5.5),

$$T(n) = \sum_{r=2}^n \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r) = \sum_{k=0}^{n-2} S(n-2, k) n(n-1) \dots (n-k+1),$$

y la última expresión es igual a  $n^{n-2}$ .

5.78. Hagamos uso de la relación recurrente para los números de Stirling de 2º género y escribamos  $S(n-2, n-r) = (n-r)S(n-3, n-r) + S(n-3, n-r-1)$ . Como resultado, de la segunda fórmula de Rényi obtendremos

$$T(n, r) = \frac{n!}{r!} \{ (n-r)S(n-3, r-2) + S(n-3, n-r-1) \} = \\ = \frac{n(n-r)}{r} T(n-1, r-1) + nT(n-1, r).$$

De aquí se deduce la relación recurrente declarada más arriba.

5.79. Para los números  $T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$  podemos escribir la relación

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = T(n, r), \\ r = 1, 2, \dots; \quad n = r, r+1, \dots,$$

donde la sumación se realiza respecto de todas las combinaciones de  $j_1, \dots, j_r$  tomadas de  $r$  a partir de  $n$  elementos  $1, 2, \dots, n$ . Está claro que los números  $T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$ , al igual que los números  $T(P_{j_1}, \dots, P_{j_r})$  examinados en el problema 5.75, no dependen de la elección concreta de los vértices  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$ . Por eso, en el primer término de la relación escrita figura la suma de  $\binom{n}{r}$  sumandos iguales. De aquí obtenemos

$$\binom{n}{r} T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = T(n, r), \quad r = 1, 2, \dots; \quad n = r, r+1, \dots$$

Valiéndonos de la fórmula (5.5), obtenemos en definitiva

$$T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r) = (n-r)! S(n-2, n-r).$$

5.80. Los árboles con  $n$  vértices  $P_1, \dots, P_n$ , que tienen  $r$  vértices terminales  $P_{j_1}, \dots, P_{j_r}$ , se subdividen en dos clases disjuntas.

a) Existe en el grafo al menos un vértice terminal, digamos  $P_{j_r}$ , que está unido con un vértice de grado 2; llamemos este último vértice  $X$ . Existen  $(n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X)$  tales árboles, puesto que el vértice  $X$  puede elegirse aplicando  $n-r$  procedimientos (de los vértices no terminales), mientras que el grafo con  $n-1$  vértices  $P_1, \dots, P_{j_{r-1}}, P_{j_{r+1}}, \dots, P_n$  (de los cuales  $r$  son terminales:  $P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X$ ) puede construirse aplicando  $T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X)$  procedimientos.

b) No hay tales vértices. El número de grafos de este tipo es igual a  $(n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}})$ , puesto que ellos pueden obtenerse de  $T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}})$  grafos con  $n-1$  vértices  $P_1, \dots, P_{j_{r-1}}, P_{j_{r+1}}, \dots, P_n$  (de los cuales  $r-1$  vértices son terminales, a saber,  $P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}$ ), y el vértice  $P_{j_r}$  puede ser unido a cualquiera de los  $n-r$  vértices no terminales. Así pues,

$$T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = (n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X) + \\ + (n-r)T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}).$$

Haciendo uso del resultado del problema 5.79, encontramos de aquí

$$\begin{aligned}
 T(n, r) &= \binom{n}{r} T(n; P_{j_1}, \dots, P_{j_r}) = \\
 &= (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r}} \binom{n-1}{r} T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}, X) + \\
 &+ (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r-1}} \binom{n-1}{r-1} T(n-1; P_{j_1}, \dots, P_{j_{r-1}}) = \\
 &= (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r}} T(n-1, r) + (n-r) \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n-1}{r-1}} T(n-1, r-1) = \\
 &= nT(n-1, r) + \frac{n(n-r)}{r} T(n-1, r-1)
 \end{aligned}$$

y, de este modo, la fórmula recurrente del problema 5.79 está demostrada otra vez de un modo independiente.

5.81. La condición inicial  $T(1) = 1$  está clara y no requiere explicaciones. Supongamos ahora que  $n \geq 2$ , y analicemos un árbol  $H = (X; E_1, \dots, E_{n-1})$ ,  $|X| = n$ , donde  $X$  es el conjunto de vértices y  $E_1, \dots, E_{n-1}$ , el conjunto de aristas del árbol. Borremos en  $H$  una arista, por ejemplo,  $E = \{P_1, P_2\}$ ,  $P_1, P_2 \in X$ . De resultas,  $H$  se descompone en dos componentes conexos  $H_1$  y  $H_2$ , cada uno de los cuales representa un árbol. Supongamos que el componente  $H_j$  tiene con  $E$  un vértice común  $P_j$  y contiene  $n_j$  aristas ( $j = 1, 2$ ,  $n_1 + n_2 = n - 2$ ). Además, uno de los componentes  $H_j$  puede estar compuesto por un único vértice aislado. De lo dicho más arriba se deduce que para obtener y calcular el número de árboles con  $n$  vértices podemos emplear el siguiente algoritmo:

a) elegimos de  $X$  arbitrariamente dos vértices  $E_1 = \{P_1, P_2\}$  y los unimos mediante una arista; dicha elección puede ser realizada mediante  $\binom{n}{2}$  procedimientos;

b) prefijamos un juego ordenado de números enteros  $n_1, n_2$  tales que se verifique  $n_1 + n_2 = n - 2$ ;

c) representamos el conjunto  $X \setminus E_1$  ( $|X \setminus E_1| = n - 2$ ) en forma de una unión de dos subconjuntos disjuntos  $X_1, X_2$  tales que  $|X_i| = n_i$ ,  $i = 1, 2$ ; con este fin se pueden emplear  $\frac{(n-2)!}{n_1!n_2!} = \binom{n-2}{n_1}$  procedimientos;

d) para cada  $i = 1, 2$  elegimos uno de  $T(n_i + 1)$  árboles  $H_i$  con el conjunto de vértices  $X_i \cup \{P_i\}$ ; a partir de la arista y de los árboles  $H_1$  y  $H_2$  obtenemos un árbol con el conjunto de vértices  $X$ .

Como resultado, cada uno de los árboles que nos interesan se obtendrá exactamente  $n - 1$  veces. En efecto, supongamos que, finalizado el trabajo del algoritmo descrito, se ha obtenido un árbol con aristas  $E_1, \dots, E_{n-1}$ , donde  $E_1$  está elegido en a). El mismo árbol se obtendrá  $n - 2$  veces más al prefijar en a) cada una de las aristas  $E_2, \dots, E_{n-1}$ . Del procedimiento descrito proviene una relación

$$(n-1) T(n) = \binom{n}{2} \sum_{n_1+n_2=n-2} \frac{(n-2)!}{n_1!n_2!} T(n_1+1) T(n_2+1)$$

la cual puede reescribirse en la forma requerida, si ponemos  $n_1 + 1 = i$ ,  $n_2 + 1 = n - i$ .

5.82. Hagamos uso de la relación recurrente del problema 5.81, teniendo presente que de conformidad con el problema 5.74,  $T(i) = i^{i-2}$  y  $T(n-i) = (n-i)^{n-i-2}$ .

Obtenemos, como resultado:

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i(n-i)^{i-2} (n-i)^{n-i-2} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} i^{i-1} (n-i)^{n-i-1},$$

lo que se trataba de demostrar.

5.83. La raíz  $P$  del árbol radical  $H$  puede pertenecer a  $d$  diferentes aristas  $E_1, E_2, \dots, E_d$  ( $1 \leq d \leq n-1$ ). Si en  $H$  borramos estas aristas y la raíz, se obtendrá un bosque compuesto de  $d$  componentes. (Recordemos que el bosque es un  $(0, 0, 0)$ -grafo (véase el problema 5.66), cuyos componentes conexos son todos los árboles.) En este caso pueden haber componentes que tienen un único vértice. El bosque obtenido tiene  $n-1$  vértices y  $n-1-d$  aristas.

De lo dicho se deduce el siguiente procedimiento para enumerar los diferentes árboles radicales con un mismo conjunto de vértices  $X$ ,  $|X| = n$ :

a) Designemos en  $X$  un cierto vértice  $P$  a título de una raíz; esto puede hacerse empleando  $n$  métodos.

b) Prefijamos un número entero  $d = 1, 2, \dots, n-1$ .

c) Partimos el conjunto  $X \setminus \{P\}$  en  $d$  subconjuntos no vacíos  $X_1, X_2, \dots, X_d$  y construimos los árboles radicales  $H_1, H_2, \dots, H_d$ , cada uno de los cuales tiene un conjunto correspondiente de vértices. El grafo resultante será un bosque radical (en un bosque radical cada componente es un árbol radical). Está claro que en este caso obtendremos

$$\frac{1}{d!} \sum_{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1} \frac{(n-1)!}{\rho_1! \dots \rho_d!} \tau(\rho_1) \dots \tau(\rho_d)$$

diferentes bosques, donde  $\rho_i$  es el número de elementos  $X_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) y la sumación se realiza respecto de todas las soluciones enteras positivas  $\rho_1, \dots, \rho_d$  de la ecuación  $\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1$ .

d) Unimos mediante aristas el vértice  $P$  fijo en a), con las raíces de los árboles  $H_1, \dots, H_d$  y obtenemos un árbol radical con el conjunto de vértices  $X$ , cuya raíz es de grado  $d$ .

Al revisar en cada paso de este algoritmo toda clase de variantes, obtendremos todo el conjunto de árboles radicales. De aquí se desprende, además, la siguiente relación recurrente

$$\tau(n) = n \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \frac{(n-1)!}{\rho_1! \dots \rho_d!} \tau(\rho_1) \dots \tau(\rho_d),$$

la cual puede reescribirse en la forma

$$\frac{\tau(n)}{n!} = \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i)}{\rho_i!}, \quad n = 2, 3, \dots$$



De aquí obtenemos

$$\begin{aligned}
 \theta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n!} z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i)}{\rho_i!} = \\
 &= z \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d!} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i) z^{\rho_i}}{\rho_i!} \right) = \\
 &= z \left( 1 + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d!} \sum_{n=1-d}^{\infty} \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_d = n-1 \\ \rho_i > 0}} \prod_{i=1}^d \frac{\tau(\rho_i) z^{\rho_i}}{\rho_i!} \right) = \\
 &= z \left( 1 + \sum_{d=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau(i)}{i!} z^i \right)^d \right) = z \exp\{\theta(z)\},
 \end{aligned}$$

de donde se desprende la ecuación de Polya.

La forma explícita para la función generatriz  $\theta(z)$  se deduce del hecho de que, debido a la 1ª fórmula de Cayley y a la relación  $\tau(n) = nT(n)$ , tiene lugar  $\tau(n) = n^{n-1}$ .

5.84. Reescribamos la relación recurrente del problema 5.82 en la forma

$$\frac{1}{n!} (\tau(n) - T(n)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\tau(i)}{i!} \frac{\tau(n-i)}{(n-i)!},$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n!} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} T(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\tau(i)}{i!} z^i \frac{\tau(n-i)}{(n-i)!} z^{n-i}.$$

De acuerdo con la definición de  $\theta(z)$  y  $T(z)$ , de aquí tenemos

$$\theta(z) - T(z) = \theta^2(z)/2,$$

lo que demuestra el resultado requerido.

5.85. Por cuanto  $\theta(z)$  es una función inversa a  $z = \theta^*(w) = we^{-w}$ , será regular en el entorno del punto  $z = 0$ . Por eso, valiéndonos de la fórmula de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias, de la definición de  $\theta(z)$  encontramos

$$\tau(n) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\theta(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde la integración se realiza respecto de un contorno cerrado dispuesto en el círculo de convergencia de  $\theta(z)$ . Realicemos en la integral la sustitución  $z = \theta^*(w)$ . Por cuanto  $dz = (1-w)e^{-w}dw$  y para  $w$  suficientemente pequeños tiene lugar la identidad  $\theta(\theta^*(w)) = w$ , obtendremos

$$\tau(n) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{w(1-w)e^{-w}dw}{w^{n+1}e^{-(n+1)w}} = \frac{n!}{2\pi i} \oint (1-w)e^{nw} \frac{dw}{w^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Conforme al teorema de residuos, de aquí se deduce

$$\begin{aligned} \tau(n) &= n! \operatorname{Coef}_w w^{n-1} [(1-w) e^{nw}] = n! \operatorname{Coef}_w w^{n-1} \left[ (1-w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k w^k}{k!} \right] = \\ &= n! \left[ \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} \right] = n^n - (n-1) n^{n-1} = n^{n-1}. \end{aligned}$$

De este modo,  $\tau(n) = n^{n-1}$ . Por cuanto  $\tau(n) = nT(n)$ , entonces  $T(n) = n^{n-2}$ , lo que se trataba de demostrar.

5.86. Está claro que

$$A_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{nk} z^k}{k!} = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j-1}}{j!} z^j \right)^k, \quad k=1, 2, \dots$$

De acuerdo con el problema 5.80 hallamos de aquí  $A_k(z) = [0(z)]^k$ . Con ayuda de la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$A_{nk} = \frac{n!}{2\pi i} \oint [0(z)]^k \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Al realizar el cambio de la variable (véase problema 5.85), tendremos

$$\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{w^k (1-w) e^{nw}}{w^{n+1}} dw = n! \operatorname{Coef}_w w^n [w^k (1-w) e^{nw}] = \\ &= n! \left[ \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} - \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right] = \frac{n^{n-k-1}}{(n-k-1)!} n! \left[ \frac{n}{n-k} - 1 \right], \end{aligned}$$

de donde se deduce la identidad que se demuestra.

5.87. Si  $n=1, k=1$ , entonces, según el sentido de este número,  $L_1(1) = 1$ , lo que concuerda con la 2ª fórmula de Cayley. Supongamos ahora que  $n \geq 2$  y  $1 \leq k \leq n$ . Mostremos ante todo que

$$l_k(n) = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n-1 \\ j_i > 0}} \frac{(n-1)!}{j_1! \dots j_k!} T(j_1+1) T(j_2+1) \dots T(j_k+1). \quad (5.6')$$

En efecto, para obtener los bosques que se requieren en las condiciones del problema, hace falta:

a) prefijar un juego ordenado de números enteros no negativos  $j_1, \dots, j_k$  que dan en suma  $n-1$ ;

b) representar para cada juego de este género el conjunto de  $n-1$  vértices  $P_{k+1}, P_{k+2}, \dots, P_{n+k-1}$  en forma de una unión de  $k$  subconjuntos disjuntos  $X_1, \dots, X_k$  tales que  $|X_1| = j_1, \dots, |X_k| = j_k$ ;

c) construir para  $j=1, \dots, k$  un bosque con el conjunto de vértices  $\{P_j\} \cup X_j$ .

De aquí precisamente se desprende (5.6'), puesto que en b) resultan posibles  $(n-1)!/(j_1! \dots j_k!)$  métodos de representación.

Al demostrar (5.6'), hagamos uso de la 1ª fórmula de Cayley (5.4) y escribamos la igualdad (5.6') en la forma

$$\begin{aligned}
 l_h(n) &= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_h = n-1 \\ j_i \geq 0}} \frac{(n-1)!}{j_1! \dots j_h!} (j_1+1)^{j_1-1} \dots (j_h+1)^{j_h-1} = \\
 &= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_h = n-1 \\ j_i \geq 0}} \frac{(n-1)!}{(j_1+1)! \dots (j_h+1)!} (j_1+1)^{j_1} \dots (j_h+1)^{j_h} = \\
 &= \sum_{\substack{h_1 + \dots + h_h = n+h-1 \\ h_i > 0}} \frac{(n-1)!}{h_1! \dots h_h!} h_1^{h_1-1} \dots h_h^{h_h-1} = \\
 &= \frac{1}{n(n+1) \dots (n+k-1)} \sum_{\substack{h_1 + \dots + h_h = n+h-1 \\ h_i > 0}} \frac{(n+k-1)!}{h_1! \dots h_h!} h_1^{h_1-1} \dots h_h^{h_h-1} = \\
 &= \frac{A_{n, h-1, h}}{n(n+1) \dots (n+k-1)}, \tag{5.7'}
 \end{aligned}$$

donde, de acuerdo con el problema 5.86,

$$\begin{aligned}
 A_{n, h-1, h} &= k(n+k-1)^{n-1} \prod_{h=1}^{h-1} (n+k-1-h) = \\
 &= k(n+k-1)^{n-1} n(n+1) \dots (n+k-2). \tag{5.8'}
 \end{aligned}$$

De (5.7') y (5.8') se deduce el resultado requerido.

5.88. Sea  $\{P_1, \dots, P_n\}$  un conjunto de vértices y  $1 \leq k \leq n$ . Elegimos del conjunto de vértices  $k$  diferentes raíces  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$ , lo que puede hacerse empleando  $\binom{n}{k}$  procedimientos. A continuación construimos tal bosque con  $n$  vértices que las raíces  $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$  pertenezcan a los diferentes componentes. Acorde al problema 5.87, esto puede realizarse empleando  $l_h(n-k+1) = kn^{n-k-1}$  procedimientos. De este modo

$$l_h(n) = \binom{n}{k} l_h(n-k+1) = \binom{n}{k} kn^{n-k-1} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-h}$$

y el problema queda resuelto.

5.89. Elijamos un bosque radical con  $n-1$  vértices  $P_2, \dots, P_n$  y  $k$  componentes conexos. De acuerdo con el problema 5.88, dicha elección puede ser efectuada empleando  $l_h(n-1)$  métodos. A continuación unamos el vértice  $P_1$  mediante aristas con todas las raíces del bosque elegido y obtendremos un árbol con  $n$  vértices, en el cual el vértice  $P_1$  es de grado  $k$ . De este modo,  $T_h(n) = l_h(n-1)$  y, haciendo uso del resultado del problema 5.88, obtendremos la fórmula de Clark.

5.90. En cada árbol con  $n \geq 2$  vértices  $P_1, \dots, P_n$ , el vértice  $P_1$  tiene un y sólo un grado  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Por consiguiente, el número total de árboles con  $n$  vértices será

$$T(n) = \sum_{h=1}^{n-1} T_h(n).$$

De aquí, aprovechando la fórmula de Clark del problema 5.89, obtenemos

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} = \\ = \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} (n-1)^{n-l-2} = [1 + (n-1)]^{n-2} = n^{n-2},$$

lo que se trataba de demostrar.

5.91. Todos los árboles con  $n+1$  vértices  $P_1, \dots, P_{n+1}$ , donde el vértice  $P_1$  es de grado  $k+1$ , pueden obtenerse y, además, cada uno de ellos,  $k+1$  veces, valiéndose del modo siguiente:

- prefijamos  $p = k, k+1, \dots, n-1$ ;
- elegimos en el conjunto  $\{P_2, \dots, P_{n+1}\}$   $p$  vértices  $P_{i_1}, \dots, P_{i_p}$ ;
- construimos un árbol con los vértices  $P_1, P_{i_1}, \dots, P_{i_p}$  de tal índole que el vértice  $P_1$  sea de grado  $k$ ;
- construimos el árbol con  $n-p$  vértices restantes  $\{P_1, \dots, P_{n+1}\} \setminus \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_p}\}$ . Elegimos en éste un vértice arbitrario y lo unimos mediante una arista con  $P_1$ .

En b) la elección se realiza empleando  $\binom{n}{p}$  procedimientos y, en virtud de la fórmula de Clark (problema 5.89), la construcción se realiza aplicando  $\binom{p-1}{k-1} p^{p-k}$  procedimientos; en d) la construcción se realiza por  $(n-p)^{n-p-1}$  procedimientos. En total esto nos da el primer miembro de la identidad que se demuestra. El segundo miembro se encuentra con ayuda de la fórmula de Clark (problema (5.89)), si la multiplicamos por  $k+1$ .

5.92. Mostremos al principio que

$$G_h(n) = \frac{1}{kl} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ j_i > 0}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} j_1^{j_1-2} \dots j_k^{j_k-2}. \quad (5.9')$$

Con este fin aprovechemos el siguiente método de enumerar los bosques:

- prefijamos un juego ordenado de  $k$  números positivos  $j_1, \dots, j_k$  tales que se verifique  $j_1 + \dots + j_k = n$ ;
- representamos el conjunto de vértices del bosque en forma de una unión de  $k$  subconjuntos disjuntos  $X_1, \dots, X_k$  tales que  $|X_i| = j_i$  ( $i = 1, \dots, k$ );
- construimos  $k$  árboles con los conjuntos de vértices  $X_1, \dots, X_k$ , respectivamente;
- notamos que como resultado de la enumeración cada bosque se obtendrá  $kl$  veces.

De estos razonamientos proviene precisamente la fórmula (5.9').

Hagamos uso ahora de  $T(z)$  obtenido en el problema 5.84. De (5.9') se deduce

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_h(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{kl} [T(z)]^k. \quad (5.10')$$

Según la fórmula integral de Cauchy, de aquí obtenemos

$$L_h(n) = \frac{n!}{kl 2\pi i} \oint \frac{T^k(z) dz}{z^{n+1}}.$$

Haciendo uso de la relación para  $T(z)$ , obtenida en el problema 5.84, escribamos la última expresión en la forma

$$L_h(n) = \frac{n!}{k! 2\pi i} \oint \left[ \theta(z) - \frac{1}{2} \theta^2(z) \right]^h \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Con ayuda del cambio de la variable (véase el problema 5.85), hallamos

$$\begin{aligned} L_h(n) &= \frac{n!}{2\pi i k!} \oint \left[ w - \frac{1}{2} w^2 \right]^h \frac{(1-w) e^{nw} dw}{w^{n+1}} = \\ &= \frac{n!}{k!} \text{Coef}_{w^n} \left[ (w^h - w^{h+1}) \left( 1 - \frac{1}{2} w \right)^h e^{nw} \right] = \\ &= \frac{n!}{k!} \left[ \sum_{j=0}^{\min(n-h, h)} \left( -\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} \frac{n^{n-h-j}}{(n-k-j)!} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{\min(n-h-1, h)} \left( -\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} \frac{n^{n-h-j-1}}{(n-k-j-1)!} \right] = \\ &= \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{\min(n-h, h)} \left( -\frac{1}{2} \right)^j \binom{k}{j} (k+j) \frac{n^{n-h-j-1}}{(n-k-j)!}, \end{aligned}$$

de donde se deduce la 3ª fórmula de Rényi.

5.93. Existen  $(n-2)(n-3)\dots(n-k)$  métodos para construir un camino de  $P_1$  a  $P_2$  que pase por  $k-2$  de los  $n-2$  vértices restantes (digamos, por  $P_3, \dots, P_k$ ). Al suprimir en el árbol el camino de  $P_1$  a  $P_2$  de longitud  $k$ , obtendremos un bosque con  $n$  vértices marcados y  $k$  componentes, en el cual los vértices  $P_1, \dots, P_k$  pertenecen a distintos componentes. En las designaciones del problema 5.87 el número de tales bosques es igual a  $\bar{l}_h(n-k+1)$ . Así pues,  $\gamma_h(n) = (n-2)(n-3)\dots(n-k)\bar{l}_h(n)$ . De aquí hallamos, de acuerdo con la 2ª fórmula de Cayley,  $\gamma_h(n) = (n-2)(n-3)\dots(n-k) \times kn^{n-k-1}$ .

5.94. Para  $n=2$  se tiene un único árbol con los vértices  $P_1, P_2$  unidos mediante una arista. Por eso,  $v_1 = v_2 = 1$ , y la fórmula de Moon es cierta.

Supongamos que la fórmula de Moon es cierta para todos los árboles que tienen  $k=2, \dots, n-1$  vértices y demostrémosla para todos los árboles con  $k=n$  vértices. Examinemos toda clase de árboles, en los cuales los vértices  $P_n$  son de grado  $v_n = 1$  (vértice terminal), y para  $i=1, \dots, n-1$  el vértice  $P_i$  es de grado  $v_i$ . El número de tales árboles es igual a  $t(n; v_1, \dots, v_{n-1}, 1)$ . Por cuanto el vértice  $P_n$  puede ser unido por una arista con cualquiera de los vértices  $P_1, \dots, P_{n-1}$ , entonces

$$t(n; v_1, \dots, v_{n-1}, 1) = \sum_{i=1}^{n-1} t(n-1; v_1, \dots, v_{i-1}, v_i-1, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}).$$

Supuesta la inducción, tenemos

$$\begin{aligned} &t(n-1; v_1, \dots, v_{i-1}, v_i-1, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}) = \\ &= \frac{(n-3)!}{(v_1-1)! \dots (v_{i-1}-1)! (v_i-2)! (v_{i+1}-1)! \dots (v_{n-1}-1)!}, \end{aligned}$$

por eso

$$\begin{aligned}
 & t(n; v_1, \dots, v_{n-1}, 1) = \\
 & = (n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(v_1-1)! \dots (v_{i-1}-1)! (v_i-2)! (v_{i+1}-1)! \dots (v_{n-1}-1)!} = \\
 & = (n-3)! \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_i-1}{(v_1-1)! \dots (v_i-1)! \dots (v_{n-1}-1)!} = \\
 & = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^{n-1} (v_i-1)!} \sum_{i=1}^{n-1} (v_i-1) = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^n (v_i-1)!} \sum_{i=1}^n (v_i-1),
 \end{aligned}$$

puesto que  $v_n = 1$ . Teniendo presente la condición impuesta en la suma de grados de los vértices, de aquí obtenemos

$$t_n(v_1, \dots, v_{n-1}, 1) = \frac{(n-3)!}{\prod_{i=1}^n (v_i-1)!} [2(n-1) - n] = \frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (v_i-1)!}.$$

Así pues, para el caso particular en consideración, cuando  $v_n = 1$ , la fórmula de Moon queda demostrada. Indiquemos ahora que cualquier árbol con  $n \geq 2$  vértices tiene al menos un vértice terminal (no obligatoriamente  $P_n$ , como se examinaba más arriba). Por eso la fórmula de Moon es válida también en el caso general.

5.95. a) En virtud de la fórmula de Moon del problema 5.94, tenemos

$$\begin{aligned}
 t(n) &= \sum_{r_1 + \dots + r_n = 2(n-1)} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)! \dots (v_n-1)!} = \\
 &= \sum_{\substack{(v_1-1) + \dots + (v_n-1) = n-2 \\ v_i \geq 1}} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)! \dots (v_n-1)!}.
 \end{aligned}$$

Haciendo uso ahora del teorema polinomial, obtenemos de aquí el resultado que se quería.

b) Se debe demostrar la fórmula para el número  $T(n, r)$  de árboles con  $n$  vértices marcados  $P_1, \dots, P_n$ , de los cuales  $r$  vértices son terminales. Supongamos al principio, que son terminales los vértices  $P_{n-r+1}, \dots, P_n$ , y sólo ellos. Por consiguiente,  $v_i \geq 2$ , si  $1 \leq i \leq n-r$ , y  $v_i = 1$ , si  $i \geq n-r+1$ , donde  $v_i$  es el grado del vértice  $P_i$ . El número de árboles de este tipo (véase el problema 5.94) es igual a

$$\sum_{\substack{(v_1-1) + \dots + (v_{n-r}-1) = n-2 \\ v_i > 1}} \frac{(n-2)!}{(v_1-1)! \dots (v_{n-r}-1)!}. \quad (5.11')$$

Observemos que la suma (5.11') es igual a  $(n-r)! S(n-2, n-r)$  (véase el problema 5.79). Por cuanto de vértices terminales pueden servir los vértices de cualquier  $r$ -subconjunto del conjunto  $P_1, \dots, P_n$ , obtenemos

$$T(n, r) = \binom{n}{r} (n-r)! S(n-2, n-r) = \frac{n!}{r!} S(n-2, n-r),$$

lo que se trataba de demostrar.

c) Teniendo presente la fórmula de Moon y suponiendo que el grado del vértice  $P_1$  es igual a  $v_1 = k$ , mientras que los grados  $v_i$  ( $i \neq 1$ ) de otros vértices son arbitrarios, llegamos a que

$$T_h(n) = \sum_{\substack{k-1+(v_2-1)+\dots+(v_n-1)=n-2 \\ v_i \geq 1}} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(v_2-1)! \dots (v_n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \sum_{\substack{(v_2-1)+\dots+(v_n-1)=n-k-1 \\ v_i \geq 1}} \frac{(n-k-1)!}{(v_2-1)! \dots (v_n-1)!}.$$

De acuerdo con el teorema polinomial, la suma en la última expresión es igual a  $(n-1)^{n-k-1}$ . Por eso

$$T_h(n) = \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} (n-1)^{n-k-1} = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

lo que se trataba de demostrar.

5.96. Sea  $p$  el grado del vértice  $P_1$  ( $1 \leq p \leq n-1$ ) y sean  $P_{i_1}, \dots, P_{i_p}$  los vértices adyacentes a  $P_1$ . Los vértices  $P_{i_1}, \dots, P_{i_p}$  pueden elegirse empleando  $\binom{n-1}{p}$  procedimientos. Los  $n-1-p$  vértices restantes  $P_m$  ( $m \neq 1, i_1, \dots, i_p$ ) pueden ser divididos en  $p$  clases definidas del modo siguiente:  $P_m$  pertenece a la  $j$ -ésima clase ( $j = 1, \dots, p$ ), si el único camino de  $P_1$  a  $P_m$  pasa por  $P_{i_j}$ . Supongamos que la  $j$ -ésima clase contiene  $m_j$  vértices ( $m_j \geq 0$ ),  $m_1 + \dots + m_p = n-1$ . Los vértices de la  $j$ -ésima clase forman junto con  $P_{i_j}$  un árbol con  $m_j \geq 1$  vértices de altura  $k-1$  sobre el vértice  $P_{i_j}$ .

Por cuanto el número de particiones en clases es igual al número  $(m_1 - 1, \dots, m_p - 1)$ -muestras y el número de árboles con vértices de la  $j$ -ésima clase es igual a  $d_{k-1}(m_j - 1)$ , el problema queda resuelto.

5.97. La solución se obtiene directamente de la fórmula recurrente del problema 5.87. Teniendo en cuenta la definición de la función generatriz  $D_h(z)$  y empleando dicha fórmula, al igual que el hecho de que  $d_h(1) = 1$  para  $k \geq 1$ , obtenemos

$$D_h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_2+\dots+m_p=n-1 \\ m_i > 0}} \frac{(n-1-p)!}{(m_1-1)! \dots (m_p-1)!} d_{h-1}(m_1) \dots d_{h-1}(m_p) =$$

$$= z + z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{n-1=p}^{\infty} \sum_{m_1+\dots+m_p=n-1} \prod_{i=1}^p z^{m_i} \frac{d_{h-1}(m_i)}{(m_i-1)!} =$$

$$= z + z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \sum_{m=1}^{\infty} d_{h-1}(m) \frac{z^m}{(m-1)!} \right)^p =$$

$$= z \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D_{h-1}^p(z) = z \exp\{D_{h-1}(z)\}, \quad k=1, 2, \dots,$$

y la fórmula requerida queda demostrada, puesto que  $D_0(z) = z$ .

5.98. Veamos un árbol, en el cual la altura de todos los  $n \geq 2$  vértices por encima del vértice  $P_1$  no sobrepasa de  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Todos los vértices del árbol, distintos de  $P_1$ , pueden dividirse en  $k$  clases, con la particularidad de que en la  $j$ -ésima clase se incluyen todos aquellos vértices, cuya altura por encima de  $P_1$  es igual a  $j$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Designemos por  $m_j \geq 0$  el número de vértices en

la  $j$ -ésima clase. Entonces  $\sum_{j=1}^k m_j = n - 1$ . Si los números  $m_j$  están fijados, la distribución de  $n - 1$  vértices en clases puede realizarse empleando  $(n - 1)! / (m_1! \dots m_k!)$  procedimientos. Es evidente que cada uno de  $m_1$  vértices de la primera clase es adyacente a  $P_1$ ; cada uno de los  $m_2$  vértices de la segunda clase es adyacente a cierto vértice de la primera clase, etc.; por fin, cada uno de los  $m_k$  vértices de la  $k$ -ésima clase es adyacente a uno de los  $m_{k-1}$  vértices de la  $(k - 1)$ -ésima clase.

Por cuanto la adyacencia de los vértices de la  $j$ -ésima y  $(j - 1)$ -ésima clases puede ser establecida con ayuda de  $m_j^{j+1}$  procedimientos, el número de métodos de construcción de los árboles para una partición dada de los vértices en clases será igual a  $m_1^{m_1} m_2^{m_2} \dots m_{k-1}^{m_{k-1}}$ .

Llegamos pues, como resultado de nuestros razonamientos, a la fórmula buscada. Notemos que si  $m_j = 0$ , entonces  $m_{j+1} = \dots = m_k = 0$ , de suerte que en realidad se deben tomar no todas las particiones en clases posibles, sino sólo aquellas para las cuales se cumple la condición que acabamos de indicar. Sin embargo, la fórmula para  $d_k(n)$  muestra que este requisito no es esencial: para las particiones que no satisfacen la condición mencionada el segundo miembro se anula.

5.99. La primera igualdad está clara. La segunda igualdad se demuestra igual que la fórmula para los números  $d_k(n)$  del problema antecedente; la diferencia consiste en que la sumación en la fórmula para  $\bar{d}_k(n)$  se realiza respecto de los sumandos positivos.

Las condiciones  $n \geq 3$ ,  $3 \leq k \leq n$  se deben a que el  $(0, 0, 0)$ -grafo (véase el problema 5.66) no tiene bucles (lazos) y aristas paralelas y, por consiguiente, ciclos (circuitos) de longitud 1 y 2.

5.100. Con el fin de enumerar los grafos, de los cuales se trata en las condiciones del problema, hagamos uso del procedimiento siguiente:

a) partimos el  $n$ -conjunto de vértices en partes de un modo tal que  $n - k$  partes se compongan de un solo elemento y una parte contenga  $k$  elementos; esta partición puede ser realizada empleando  $B_n(n - k, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots$

$$\dots 0) = \frac{n!}{(1!)^{n-k} (k!)^1 (n-k)! 1!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \text{ métodos;}$$

b) unimos los elementos del  $k$ -conjunto elegido en a), mediante las aristas, de tal manera que se obtenga un ciclo; es obvio que esta operación puede ser realizada empleando  $(k - 1)!/2$  métodos diferentes.

De resultas tenemos

$$S_k(n) = \frac{(k-1)!}{2} \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{1}{2k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

y el problema queda resuelto.

5.101. Véase el problema anterior en lo que se refiere a las condiciones  $n \geq 3$ ,  $3 \leq k \leq n$ . Si de la familia de aristas de un grafo conexo que tiene el conjunto de vértices  $X$ ,  $|X| = n$ , y un único ciclo de longitud  $k$ , eliminamos las aristas que forman el ciclo, se obtendrá un bosque que contiene  $k$  componentes. (Los últimos pueden estar compuestos, en particular, de un solo vértice aislado.) Por eso, para enumerar los grafos en consideración podemos proceder del modo siguiente:

a) Supongamos que al principio tenemos  $n$  vértices aislados. Construimos un grafo que tiene un único ciclo de longitud  $k$  y  $n - k$  vértices aislados. De



acuerdo con el problema 5.100, podemos construir

$$S_k(n) = \frac{1}{2k} \frac{n!}{(n-k)!} \quad (5.12')$$

grafos de este género. Los vértices del ciclo se designarán por  $P_1, \dots, P_k$ .

b) Prefijamos un juego ordenado de  $k$  números enteros no negativos  $n_1, \dots, \dots, n_k$  que en la suma son iguales a  $n - k$ .

c) Representamos el conjunto  $X \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$  compuesto de  $n - k$  elementos en forma de una unión de  $k$  subconjuntos disjuntos, entre los cuales pueden haber también vacíos, de un modo tal que  $|X_j| = n_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). El número de tales representaciones es igual al número de  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ -particiones y equivale a  $(n - k)! / (n_1! \dots n_k!)$ .

d) Para cada  $j = 1, \dots, k$  elegimos uno de  $T(n_j + 1) = (n_j + 1)^{n_j - 1}$  árboles con el conjunto de vértices  $\{P_j\} \cup X_j$ .

e) Por fin, construimos el grafo final suspendiendo de los vértices  $P_1, \dots, \dots, P_k$  del ciclo, construido en a), los árboles elegidos en c).

Seleccionando en cada punto del algoritmo descrito toda clase de variantes, obtendremos todo el conjunto de  $(0, 0, 0)$ -grafos conexos con  $n$  vértices y un único ciclo de longitud  $k$ . De aquí obtenemos

$$P_k(n) = S_k(n) \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n - k \\ n_j \geq 0}} \frac{(n - k)!}{n_1! \dots n_k!} \prod_{j=1}^k (n_j + 1)^{n_j - 1}. \quad (5.13')$$

De (5.12') y (5.13') llegamos a la primera fórmula citada en las condiciones del problema.

5.102. Al multiplicar ambos miembros de la primera fórmula del problema 5.101 por  $y^k z^n / n!$  y al sumar respecto de  $n$  desde 3 hasta  $\infty$ , y respecto de  $k$  desde 3 hasta  $n$ , obtenemos

$$\begin{aligned} P(z, y) &= \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=3}^n \frac{y^k}{k} z^n \frac{n!}{2k} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n - k \\ n_j \geq 0}} \prod_{j=1}^k \frac{(n_j + 1)^{n_j - 1}}{n_j} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n - k \\ n_j \geq 0}} \prod_{j=1}^k (n_j + 1)^{n_j} \frac{z^{n_j + 1}}{(n_j + 1)!} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)^n \frac{z^{n+1}}{(n + 1)!} \right]^k = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{z^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{y^k \theta^k(z)}{k} = -\frac{1}{2} \left[ \ln(1 - \theta(z)y) + y \theta(z) + \frac{y^2 \theta^2(z)}{2} \right]; \end{aligned}$$

la fórmula para  $P(z)$  se deduce de aquí, si  $y = 1$ , al tomar en consideración que  $P(z) = P(z, 1)$ .

5.103. Para obtener todos los  $(0, 0, 0)$ -grafos conexos que tengan  $n$  vértices y un único ciclo de longitud  $k$  ( $n \geq k \geq 3$ ), es suficiente construir en cada bosque radical con  $n$  vértices y  $k$  componentes diferentes ciclos sobre el conjunto de raíces. Por cuanto el número de bosques radicales con  $n$  vértices y  $k$  compo-

nentes es igual a  $\binom{n-1}{k-1} n^{n-k}$  (véase el problema 5.88) y el número de ciclos de longitud  $k$  es igual a  $(k-1)!/2$ , tenemos

$$P_h(n) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-h} \frac{1}{2} (k-1)!$$

de donde se desprende, precisamente, el resultado que se busca.

La fórmula también se puede obtener haciendo uso de la representación  $P(z, y)$  del problema 5.102, de manera análoga al problema 5.91.

### § 3. Planos finitos

5.104. Hagamos uso del teorema de Desargues (fig. 5.15'). Construimos bajo un ángulo suficientemente estrecho las rectas  $AD$ ,  $AF$ ,  $BD$  y  $BF$ . Trazamos la recta  $DF$  y elegimos en ella el punto  $O$ . Las construcciones posteriores se ven en el dibujo. Hallamos el punto  $C$ . De acuerdo con el teorema de Desargues, el

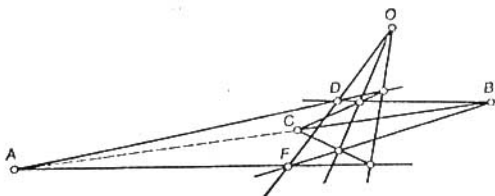


Fig. 5.15'

punto  $C$  se dispone en la recta  $AB$ . Hallando en  $AB$  unos cuantos puntos intermedios más podremos trazar toda la recta.

5.105. Método I. Si fijamos un punto, el segundo se elegirá empleando  $(n^2 + n + 1) - 1 = n^2 + n$  procedimientos; a continuación, el tercer punto puede encontrarse empleando  $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$  procedimientos, donde  $(n + 1)$  es el número de puntos de la recta que pasa por el par de puntos obtenido. El cuarto punto puede elegirse por  $(n^2 + n + 1) - (n - 1)3 + 3 = (n - 1)^2$  procedimientos, donde  $((n - 1)3 + 3)$  es el número de puntos dispuestos en los lados del triángulo (polígono de tres vértices) obtenido. El quinto punto puede elegirse empleando  $(n^2 + n + 1) - (6n - 5) = n^2 - 5n + 6 = (n - 2)(n - 3)$  procedimientos, donde  $(6n - 5)$  es el número de puntos situados en los lados del cuadrilátero obtenido. Mas cada recta en este caso se encuentra tantas veces, cuantas cuaternas ordenadas puedan obtenerse de  $n$  puntos de la curva, distintos del punto dado. Por eso, el número de curvas que se busca es igual a

$$(n^2 + n) n^2 (n - 1)^2 (n - 2) (n - 3) / A_n^4 = n^2 (n^2 - 1).$$

Método II. Designemos por  $x$  el número de curvas que pasan por un punto dado. El producto del número  $x$  por el número de todos los puntos en el plano  $(n^2 + n + 1)$  es igual al producto del número de puntos de la curva  $n + 1$  por el número de todas las curvas en el plano, es decir, por  $n^2 (n - 1) (n^2 + n + 1)$ . Así pues, tenemos una igualdad  $x(n^2 + n + 1) = (n + 1) n^2 \times (n - 1) (n^2 + n + 1)$ , de donde  $x = n^2 (n^2 - 1)$ .

5.106. Si fijamos un par de puntos, el punto tercero puede elegirse empleando  $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$  procedimientos, donde  $(n + 1)$  es el número de puntos de la recta que pasa por el par de puntos dado. A continuación,

el cuarto punto puede ser elegido empleando  $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$  procedimientos. El quinto punto puede elegirse empleando  $(n^2 + n + 1) - (6n - 5) = (n - 2)(n - 3)$  procedimientos; aquí  $(6n - 5)$  representa el número de puntos prohibidos por la elección de la cuaterna dada. Mas en este caso cada curva se encuentra tantas veces, cuantas ternas ordenadas pueden obtenerse a partir de  $n - 1$  puntos de la curva, distintos de los dos iniciales. Por eso el número total de curvas que pasan por el par dado de puntos será igual a

$$n^2 (n - 1)^2 (n - 2) (n - 3) / A_{n-1}^3 = n^2 (n - 1).$$

5.107. La curva de segundo orden en un plano proyectivo finito de orden  $n$  es un  $(n + 1)$ -arco, es decir, un conjunto compuesto de  $n + 1$  puntos que no son colineales tomados tres a tres.

Si fijamos un par de puntos y dos rectas cualesquiera que pasan por un punto de dicho par, el tercer punto puede elegirse empleando  $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$  procedimientos, donde  $(n^2 + n + 1)$  es el número de puntos del plano proyectivo finito de orden  $n$ . Por cuanto en cada recta yacen  $n + 1$  puntos, entonces  $((n - 1) 3 + 3)$  es el número de puntos situados en dos tangentes dadas y en la recta que pasa por el par dado de puntos. Además, cada curva se cuenta  $(n + 1) - 2 = n - 1$  veces, puesto que a título de tercer punto puede ser elegido cualquiera de los  $n + 1$  puntos, a excepción de los dos puntos dados.

El número total de curvas es igual a  $(n - 1)^2 / (n - 1) = n - 1$ .

5.108. Un par de puntos de intersección de la curva hiperbólica con la recta impropia puede ser elegido entre  $(n + 1) - 1 = n$  puntos impropios no colineales respecto de los dos puntos dados, empleando  $C_n^2 = n(n - 1)/2$  procedimientos. El quinto punto puede ser añadido empleando  $(n^2 + n + 1) - ((n - 2) 2 + 1) 3 + 4) = n^2 - 5n + 6$  procedimientos; aquí  $((n - 2) 2 + 1) 3 + 4)$  es el número de puntos prohibidos por la elección de la cuaterna dada. En este caso cada curva se cuenta  $(n + 1) - 4 = n - 3$  veces. Por eso el número de curvas buscadas es igual a

$$n(n - 1)(n - 2)(n - 3) / (2(n - 3)) = n(n - 1)(n - 2) / 2.$$

5.109. Una curva de segundo orden se define unívocamente por cuatro puntos y una tangente en uno de ellos. Para un par inicial de puntos ordinarios un punto impropio, que no sea colineal con ellos, puede elegirse empleando  $n$  métodos. Se tienen  $(n^2 + n + 1) - ((n - 1) 3 + 3) = (n - 1)^2$  puntos que no están situados en los lados del triángulo obtenido. De la cantidad mencionada de puntos están prohibidos, además, para la elección del cuarto punto, todos los puntos impropios distintos del punto impropio de tangencia y del punto impropio de la recta que pasa por el par inicial de puntos: hay en total  $n - 1$  tales puntos. Por eso, para la elección del cuarto punto tenemos  $(n - 1)^2 - (n - 1) = (n - 1)(n - 2)$  métodos. En este caso cada recta se cuenta  $(n + 1) - 3 = n - 2$  veces. Por consiguiente, el número buscado de curvas parabólicas es igual a

$$n(n - 1)(n - 2) / (n - 2) = n(n - 1).$$

5.110. El número de todas las curvas que pasan por un par dado de puntos es igual a  $n^2(n - 1)$  (véase el problema 5.106). Al restar de este número el número de curvas parabólicas y el número de curvas hiperbólicas, encontramos el número de las elípticas:

$$n^2(n - 1) - n(n - 1)(n - 2) / 2 - n(n - 1) = n^2(n - 1) / 2.$$

5.111. En un plano hay en total  $n^2 + n + 1$  puntos; de ellos pueden formarse  $C_{n^2+n+1}^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 + n) / 2$  pares de puntos. Por cuanto a través

de un par de puntos pasan  $n^2 (n - 1)$  curvas y cada curva figura en el cálculo  $C_{n+1}^2$  veces, el número de todas las curvas será igual a

$$(\frac{1}{2} (n^2 + n + 1) (n^2 + n) n^2 (n - 1)) / C_{n+1}^2 = n^2 (n - 1) (n^2 + n + 1).$$

5.112. Por un punto de un arco pasan  $n + 1$  rectas, en las cuales yacen todos los puntos del plano, incluidos todos los puntos del arco. En cada una de dichas rectas yace no más de un punto del arco, distinto del dado. Por eso, el valor máximo de  $k$  es  $(n + 1) + 1 = n + 2$ . El resultado se precisa para los planos proyectivos de orden impar. Supongamos que el arco del plano proyectivo de orden impar  $n$  contiene  $n + 2$  puntos. En cada recta que pasa por uno de los puntos del arco yace exactamente un solo punto del arco, distinto del dado. Por eso, en cada una de las  $n + 1$  rectas que pasan por cierto punto del plano, distinto de los puntos del arco, se disponen o un cero o bien dos puntos del arco. Por consiguiente, el número de puntos  $k$  del arco resulta ser par, mientras que  $n + 2$  es impar cuando  $n$  es impar. La suposición de este modo queda rechazada y el valor máximo de  $k$  para un plano de orden impar  $n$  es igual a  $n + 1$ .

5.113. En un plano de orden impar  $n$  el  $(n + 1)$ -arco será un óvalo. Por cada punto del arco pasa una tangente. En todas las secantes y tangentes, que pasan por el punto  $P$  no perteneciente al óvalo, está situado un número par de  $n + 1$  puntos del óvalo. Por cuanto en cada secante se disponen dos puntos del óvalo, en todas las tangentes que pasan por el punto  $P$  yace un número par de puntos del óvalo, por lo cual el número de tales tangentes es par.

En la tangente se disponen  $n$  puntos, distintos del punto de tangencia. Por cada uno de estos puntos pasa la tangente dada y, de acuerdo con lo demostrado más arriba, por lo menos una tangente más. Pero, además de la tangente dada hay exactamente  $n$  tangentes. Por eso, por cada punto fuera del óvalo que está situado fuera de la tangente en consideración, pasa exactamente una otra tangente. El número  $x$  de todos los puntos, externos con relación al óvalo, que se disponen en todas las tangentes se hallará mediante el cálculo del número de incidencias. En cada una de las  $n + 1$  tangentes yacen  $n$  puntos del tipo requerido, y por cada uno de estos puntos pasan dos tangentes, razón por la cual  $(n + 1) n = 2x$ ,  $x = n(n + 1)/2$ .

5.114. Cada 4-arco cuenta con seis secantes; seis secantes del arco se cortan de dos en dos en tres puntos (diagonales). En cada secante se disponen  $(n - 2)$  puntos, además de dos puntos del arco y un punto diagonal. En seis secantes tenemos  $4 + 3 + 6(n - 2) = 6n - 5$  puntos.

El número de puntos del plano, que no yacen en las secantes del arco, es igual a

$$n^2 + n + 1 - (6n - 5) = (n - 2)(n - 3),$$

$$(n - 2)(n - 3) = 0 \Leftrightarrow n = 2, \text{ o bien } n = 3.$$

Por consiguiente, en los planos de órdenes  $n = 2$  y  $n = 3$  existen 4-arcos completos.

5.115. Cada secante del 5-arco se interseca con tres secantes que pasan por los puntos del arco (no situados en la secante de que se trata) en tres puntos distintos. En diez secantes se encuentran  $3 \cdot 10/2 = 15$  tales puntos. Hay  $n + 1 - 2 - 3 = n - 4$  puntos de la secante que no yacen en otras secantes. En las diez secantes están situados  $5 + 15 + 10(n - 4) = 10n - 20$  puntos. Por consiguiente, fuera de las secantes se encuentran  $n^2 + n + 1 - (10n - 20) = n^2 - 9n + 21$  puntos.

5.116. Un 5-arco es completo, si  $n^2 - 9n + 21 = 0$  (véase el problema 5.115). El discriminante es  $D = 81 - 84 < 0$ . La afirmación está demostrada.

5.117. Tomemos un cuadrilátero completo. En cada uno de sus lados (es decir, en la secante) se encuentran 2 vértices, 1 punto diagonal y 2 puntos más  $5 - (2 + 1) = 2$ . En 6 lados yacen 4 vértices, tres puntos diagonales y, además,  $6 \cdot 2 = 12$  puntos, es decir, 19 en total. Fuera de los lados tenemos  $21 - 19 = 2$  puntos. Tres puntos diagonales se disponen en una misma recta; además de ellos en dicha recta están situados los dos puntos fuera de los lados,

que fueron mencionados. La adición de cada uno de ellos a los cuatro vértices da un 5-arco; por cuanto la recta que pasa por los puntos mencionados no contiene vértices, la adición de ambos puntos a los vértices nos da un 6-arco. De estos razonamientos se ve que un 6-arco se define estricta y unívocamente por un cuadrilátero. El número de cuadriláteros ordenados en un plano de orden 4 es igual a  $21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9$ ; en una sexterna de puntos del arco el número de tales cuadriláteros es igual a  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ; tal número de veces figura en el cálculo cada 6-arco. De aquí, el número de todos los 6-arcos es igual a  $(21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9)/(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 168$ .

5.118. Por cada punto de un  $(n+1)$ -arco pasan (según el número de los puntos restantes del arco)  $n$  secantes y una tangente. En total (según el número de puntos del arco) hay  $n+1$  tangentes. En todas las tangentes y secantes que pasan por el punto  $P$  no perteneciente al arco, yace un número impar  $n+1$  de puntos del arco. Por cuanto en las secantes de este haz está situado un número par de puntos del arco, entonces por lo menos un punto debe encontrarse en la tangente. Con esto queda demostrado que por cada punto, no perteneciente al arco, pasa por lo menos una tangente de este arco. Hay  $n^2 + n + 1 - (n+1) = n^2$  puntos que no pertenecen al  $(n+1)$ -arco. En cada tangente yacen  $n$  tales puntos. Destaquemos una de las tangentes; cada una de las  $n$  tangentes restantes corta la destacada y por eso lleva  $n-1$  puntos que no pertenecen al arco y a la tangente destacada. Ya que  $n + n(n-1) = n^2$ , todos los puntos de las tangentes considerados más arriba han de ser distintos. Esto significa, que las tangentes, diferentes de la destacada, se cortan en cierto punto de la tangente destacada. Así pues, todas las  $n+1$  tangentes pasan por un mismo punto  $O$  y no hay otras rectas que pasen por  $O$ . En particular, por  $O$  no pasa ninguna secante y por consiguiente el  $(n+1)$ -arco en consideración es no completo.

5.119. Véase la resolución del problema 5.118.

5.120. Analicemos el caso de  $n = 2m$  par. Los puntos del plano de orden par  $n$  se dividen respecto del óvalo, que tiene aquí  $n+2$  puntos, en dos clases: los puntos del óvalo y los exteriores. Por un punto exterior pasan  $(n+2)/2 = m+1$  secantes, en cada secante se disponen  $n-1$  puntos exteriores, y a través de los puntos exteriores de la secante pasan todas las  $m(n-1) = C_n^2$  secantes que se definen por  $n$  puntos del óvalo, que no yacen en la secante dada. Por eso, con el haz de  $m$  secantes que pasan por el punto externo y son distintas de la secante dada está relacionada la partición de  $n = 2m$  puntos restantes del óvalo en  $m$  pares. Con todos los  $n-1$  puntos de la secante está ligado el juego de  $n-1$  tales particiones de los  $n$  puntos citados; en este caso cada par de puntos del óvalo fuera de la secante dada figura una y sólo una vez.

Veamos el caso en que  $n = 2m+1$  es impar. Aquí por el punto exterior pasará  $(n-1)/2$  ó  $(n+1)/2$  secantes. Al designar por  $r$  y  $l$  los números de tipos de los puntos que contienen  $(n-1)/2$  y  $(n+1)/2$  secantes, respectivamente, obtenemos las siguientes ecuaciones para la secante dada:

$$r+l=n-1, \quad \frac{n-3}{2}r + \frac{n-1}{2}l = C_{n-1}^2, \quad \text{de donde } r=l=(n-1)/2.$$

Por consiguiente, con todos los  $n-1$  puntos de cada secante del óvalo, distintos de los puntos del mismo, están relacionados dos juegos de  $(n-1)/2$  particiones, a  $(n-1)/2$  pares en cada una, y de  $(n-1)/2$  particiones, a  $(n-3)/2$  pares en cada una, sin pares comunes.

5.121. Para los puntos del  $k$ -arco tenemos  $i = k-1$ , y para los puntos restantes del plano tenemos  $0 \leq i \leq k/2$ .

De las definiciones de plano proyectivo de orden  $n$  y de  $k$ -arco obtenemos las ecuaciones  $K_{k-1} = k$ ,  $K_{k-1} + \sum_i K_i = n^2 + n + 1$ . El cálculo del número de

incidencias de los puntos de tipo diferente con secantes del  $k$ -arco ofrece la ecuación

$$(k-1) K_{k-1} + \sum_i i K_i = \frac{k(k-1)}{2} (n+1).$$

El cálculo del número de pares de secantes que pasan por todos los puntos del plano da la siguiente ecuación

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2} K_{k-1} + \sum_i \frac{i(i-1)}{2} K_i = \frac{(k-2)(k-1)(k+1)k}{8}.$$

El cálculo del número de incidencias de los puntos respecto de otras rectas y del número de pares de otras rectas no presta nuevas dependencias.

De solución del sistema en el caso que se analiza sirven las fórmulas

$$\begin{aligned} K_0 &= n^2 + n + 1 - k - k(k-1)(4n + 5k - k^2 - 10)/8, \\ K_1 &= k(k-1)(2n + 5k - k^2 + 8)/4, \\ K_2 &= k(k-1)(k-2)(k-3)/8. \end{aligned}$$

5.122. El sistema de ecuaciones para determinar el número de puntos  $K_i$  será en este caso como sigue

$$\begin{aligned} K_0 + K_1 + K_2 + K_3 &= n^2 + n - 5, \\ K_1 + 2K_2 + 3K_3 &= 15(n-1), \\ K_2 + 3K_3 &= 45. \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} n^2 - 14n + 40 &\leq K_0 \leq n^2 - 14n + 55, \\ 15(n-7) &\leq K_1 \leq 15(n-4). \end{aligned}$$

5.123. El sistema de ecuaciones para determinar el número de puntos  $K_i$  según el número  $i$  de secantes del arco, que pasan por los puntos del plano, tendrá por expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} K_i &= n^2 + 1, & \sum_{i=0}^{(n-1)/2} i K_i &= \frac{n(n-1)^2}{2}, \\ \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{i(i-1)}{2} K_i &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{8}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema respecto de  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} - \sum_{i=3}^{(n-1)/2} \frac{i(i-1)}{2} K_i, \\ K_1 &= \frac{n(n-1)(7n-n^2+8)}{4} + \sum_{i=3}^{(n-1)/2} i(i-2) K_i, \\ K_0 &= -n^3 + 3n^2 - n + 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{(n-1)/2} (i-1)(i-2) K_i. \end{aligned}$$

Admitamos que el arco en consideración es completo, es decir,  $K_0 = 0$ . Entonces, suponiendo que  $n = 2m + 1$ , de la última condición obtenemos:

$$\sum_{i=3}^m (i-1)(i-2) K_i = -4(4m^3 - 2m - 1).$$

Aquí  $\sum_{i=3}^m (i-1)(i-2) K_i \geq 0$ , puesto que los números  $K_i$  de puntos son no

negativos, mientras que el segundo miembro de la ecuación, para  $m \geq 1$ , es negativo. La contradicción obtenida rechaza la suposición de que el  $n$ -arco en un plano proyectivo de orden impar  $n$  es completo.

5.124. El cuadrilátero completo tiene 4 vértices, 6 lados (secantes) y 3 puntos diagonales, es decir, puntos de intersección de los lados que no son vértices. Si estos puntos no son colineales, entonces definen de dos en dos 3 diagonales. Cada diagonal corta 2 lados, que pasan por el punto diagonal que no está situado en ella, en distintos puntos; hay en total 6 tales puntos. Los puntos citados y las rectas forman una figura que incluye 13 puntos y 9 rectas, con la particularidad de que en cada una de estas rectas se disponen 4 puntos de la figura y los demás  $(n+1) - 4 = n - 3$  puntos de la recta no integran la figura. En las rectas de la figura se disponen en total  $13 + 9(n-3) = 9n - 14$  puntos. El número de puntos restantes es igual a

$$(n^2 + n + 1) - (9n - 14) = n^2 - 8n + 15 = (n-3)(n-5).$$

5.125. Véase el problema 5.124.

5.126. Admitiendo lo contrario, llegamos a que el número de puntos no situados en las secantes del cuadrilátero es igual (véase el problema 5.124) a  $(4-3)(4-5) = -1$ , lo que es imposible.

5.127. Procedimiento I. En toda recta de un subplano baeriano se encuentran  $m+1$  puntos de este subplano y  $(n+1) - (m+1) = n-m$  otros puntos. En las rectas mencionadas yacen en total  $(m^2 + m + 1)$  puntos del subplano y  $(m^2 + m + 1)(n-m)$  otros puntos; la suma de estos números es igual al número de todos los puntos del plano. De aquí

$$(m^2 + m + 1) + (m^2 + m + 1)(n-m) = n^2 + n + 1, \\ n^2 - (m^2 + m)n + m^3 = 0.$$

Resolviendo la ecuación respecto de  $n$ , hallamos:  $n_1 = m^2$ ,  $n_2 = m$ . Por cuanto  $n > m$ , entonces  $n = m^2$ .

Procedimiento II. Por un punto  $P$  de un plano no perteneciente al subplano pasa una recta del subplano; sobre ella yacen  $m+1$  puntos del subplano. Cada una de las  $n$  rectas restantes que pasan por  $P$  contiene un punto del subplano; el número de estos puntos es igual a  $(m^2 + m + 1) - (m + 1) = m^2$ ; de aquí,  $n = m^2$ .

5.128. Por hipótesis existe un punto  $P$  del plano que no se encuentra en las rectas del subplano. La unión de  $P$  con los puntos del subplano da  $m^2 + m + 1$  diferentes rectas. Por cuanto el número de todas las rectas que pasan por  $P$  es igual a  $n+1$ , entonces  $n+1 \geq m^2 + m + 1$ ,  $n \geq m^2 + m$ .

5.130. Indicaciones. Muéstrase que el bloque-esquema generalizado (no todo par del  $v$ -conjunto participa en la construcción del esquema) con los parámetros  $v = n^2$ ,  $b = 3n$ ,  $r = 3$ ,  $k = n$ ,  $\lambda = 1$  es equivalente al cuadrado latino.

5.131. Se sabe que un plano proyectivo finito es equivalente al conjunto completo de cuadrados latinos ortogonales de dos en dos. Lo mismo es cierto (véase el problema 5.130) para un plano afín.

5.132. No existen dos cuadrados latinos de orden 6 (problema de Euler sobre 36 oficiales).

5.133. La respuesta es: 1 2 4, 2 3 5, 3 4 6, 4 5 7, 5 6 1, 1 3 7, 3 4 6, 2 6 7.

5.134. a) Por dos puntos cualesquiera pasa una única recta. Sean  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  dos puntos distintos. Entonces el sistema

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0, \quad ux_2 + vy_2 + wz_2 = 0$$

tiene una única solución (con una exactitud de hasta un factor) respecto de  $(u, v, w)$ .

b) De un modo análogo se comprueba que cualesquiera dos rectas se intersecan en un único punto.

c) Si  $a \neq 0, a \in GF(q)$ , entonces los puntos  $(0, 0, a), (0, a, 0), (a, 0, 0), (a, a, a)$  son todos diferentes y cualesquiera tres de ellos no están situados en una misma recta.

5.135. Si los puntos  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  satisfacen la ecuación  $ux + by + wz = 0$ , entonces la satisfacen también los puntos  $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$ , donde  $\lambda$  y  $\mu$  son cualesquiera elementos de  $GF(q)$ .

5.136. La ecuación  $\lambda + \mu = 1$  tiene exactamente  $q + 1$  soluciones (véase el problema antecedente).

5.137. Los puntos buscados son:  $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ . Las rectas:  $z = 0, y = 0, x = 0, y + z = 0, x + z = 0, x + y = 0, x + y + z = 0$ .

5.138. Cerciórese previamente de la validez de las propiedades siguientes de los campos de Galois  $GF(p^h)$ :

a)  $(a + b)^p = a^p + b^p, (a + b)^{p^r} = a^{p^r} + b^{p^r}$ , donde  $r$  es un número natural cualquiera;

b) cada elemento del campo de Galois  $GF(q)$  satisface la ecuación  $x^q - x = 0$ .

Hágase uso también de la segunda definición de recta (problema 5.135).

Se necesita demostrar que un punto y una recta conservan su incidencia en las transformaciones proyectivas. Tenemos dos puntos  $A(x_1, y_1, z_1)$  y  $B(x_2, y_2, z_2)$ . Por dichos puntos pasa la recta  $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$ , donde  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0), \lambda, \mu \in GF(p^h)$ . Hallemos la imagen de esta recta en la transformación proyectiva. Tenemos una colineación

$$s = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{p^r} \\ y^{p^r} \\ z^{p^r} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo aquí los puntos de la recta y haciendo uso de la propiedad a), tenemos un conjunto de imágenes de los puntos de la recta dada

$$\{\lambda^{p^r}(a_{11}x_1^{p^r} + a_{12}y_1^{p^r} + a_{13}z_1^{p^r}) + \mu^{p^r}(a_{11}x_2^{p^r} + a_{12}y_2^{p^r} + a_{13}z_2^{p^r}), \dots, \dots\}.$$

Ahora, con el fin de demostrar que este conjunto de imágenes es una recta, incidente con relación a los puntos  $A$  y  $B$ , basta demostrar que los conjuntos  $\{(\lambda, \mu)\}$  y  $\{(\lambda^{p^r}, \mu^{p^r})\}$  son equipotentes, donde  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  y  $\lambda, \mu \in GF(p^h)$ ;  $r$  es fijo. Esto es evidente.

Demostremos a continuación que en el sistema

$$sx' = a_{11}x^{p^r} + a_{12}y^{p^r} + a_{13}z^{p^r},$$

$$sy' = a_{21}x^{p^r} + a_{22}y^{p^r} + a_{23}z^{p^r},$$

$$sz' = a_{31}x^{p^r} + a_{32}y^{p^r} + a_{33}z^{p^r}$$

podemos limitarnos a los valores de  $r = 0, 1, \dots, h-1$ , es decir, cualquiera que sea  $m \geq h$ , llegamos a uno de los  $h$  tipos de colineaciones. Basta demostrar que

$$\begin{pmatrix} x^{p^m} \\ y^{p^m} \\ z^{p^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{p^r} \\ y^{p^r} \\ z^{p^r} \end{pmatrix}, \quad m \geq h, \quad r = 0, 1, \dots, h-1.$$



Tenemos  $m = ch + r$ , donde  $r = 0, 1, \dots, h-1$ . Luego,  $x^{p^m} = x^{p^{ch+r}} = x^{p^{ch}} p^r = (x^{p^{ch}})^{p^r} = x^{p^r}$ , puesto que  $x^{p^{ch}} = x$ .

Análogamente procedemos para  $y$  y  $z$ . Todo está demostrado.

5.139. En el plano  $P(2, q)$  se tienen en total  $q^2 + q + 1$  puntos y  $q^2 + q + 1$  rectas. Mientras tanto, el número de puntos en cualquier recta es igual a

$$(q^2 - 1)/(q - 1) = q + 1.$$

El triángulo es una terna de puntos que no yace en su totalidad en una misma recta. Calculemos su número. A título del primer punto podemos tomar cualquiera de los  $q^2 + q + 1$  puntos; a título del segundo, cualquiera de los  $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$ . A título del tercer punto elegimos cualquiera, salvo los puntos de la recta que pasa por los dos primeros. Este número es igual a  $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$ . De acuerdo con la regla del producto, el número buscado de triángulos es igual a  $(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2$ .

5.140. En el plano  $P(2, q)$  se tienen  $q^2 + q + 1$  puntos. Supongamos que los vértices del cuadrilátero son  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . A título de  $M_1$  tomamos cualquiera de los  $q^2 + q + 1$  puntos. A título de  $M_2$ , cualquiera de los  $(q^2 + q + 1) - 1 = q^2 + q$  puntos. A título de  $M_3$ , cualquiera de los  $(q^2 + q + 1) - (q + 1) = q^2$  puntos; a título de  $M_4$ , cualquiera de los puntos que no yacen en  $M_2M_3, M_1M_2, M_3M_1$ , es decir, cualquiera de los  $(q^2 + q + 1) - (q + 1 + q + 1 + q + 1 - 3) = (q - 1)^2$  puntos. De acuerdo con la regla del producto, el número buscado de cuadriláteros es igual a  $(q^2 + q + 1)(q^2 + q) \times (q - 1)^2$ .

5.141. Se tienen  $h$  tipos de transformaciones proyectivas. Hallemos el número de colineaciones para cualquier tipo. Toda colineación se define unívocamente por la clase de matrices regulares asociadas. En toda clase de asociatividad hay  $q - 1$  matrices. Hallemos el número de matrices regulares en un espacio euclídeo  $(n + 1)$ -dimensional  $V$  sobre el campo  $GF(q)$ . Supongamos que  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  es la base del espacio  $V$ ;  $\sigma$  es la matriz de la transformación lineal regular;  $B_i = \sigma A_i$ ;  $\{B_i\}$  es un sistema linealmente independiente. A todo sistema linealmente independiente  $\{B_i\}$  le corresponde unívocamente una matriz regular  $\sigma$  y viceversa. Calculemos, por inducción, el número de elecciones de  $\{B_i\}$  del espacio  $V$ .

El número  $|\{B_1, \dots, B_1, \dots, B_{n+1}\}| = (q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q) \dots (q^{n+1} - q) \dots (q^{n+1} - q^n)$  da la cantidad de matrices regulares. Al dividir este número por  $q - 1$ , obtendremos el número de colineaciones para el tipo dado de la transformación proyectiva  $n$ -dimensional. En nuestro caso  $n = 2$ . Entonces, el número de colineaciones del tipo  $i$  es igual a

$$(q^3 - 1)(q^3 - q)(q^3 - q^2)/(q - 1) = (q^2 + q + 1)(q^2 + 1)q^3(q - 1)^2.$$

El grupo proyectivo general de transformación es de orden  $h(q^2 + q + 1) \times (q^2 + 1)q^3(q - 1)^2$ .

5.142. Exáminese la colineación con la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.145. Cada fila de la matriz puede elegirse empleando siete procedimientos  $y$ , al combinarlos, se obtiene  $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ . Es obvio que las matrices degeneradas serán aquellas que se obtienen con ayuda de los puntos de una recta, pues en este último caso las filas matriciales son linealmente dependientes. Con ayuda de tres puntos de una recta obtendremos  $3^3 = 27$  matrices, y para todas las 7 rectas, un total de 189 matrices de este tipo. Sin embargo, entre ellas hay

las que se repiten, por ejemplo, las matrices que se obtienen sólo de un punto. Por cuanto cada punto pertenece a tres rectas, el número de tales matrices será igual a 21. Por consiguiente, cada tal matriz se cuenta tres veces. Hay, pues, 14 matrices superfluas. Obtenemos finalmente 175 matrices degeneradas y 168 regulares.

5.146. Hágase uso de la forma canónica de la cónica

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 0, \quad a_1, a_2, a_3 \neq 0$$

y analícese dos casos: la recta  $z = 0$  corta la cónica dada y no la corta.

## SISTEMAS DE CONJUNTOS

### § 1. Problemas extremales en los grafos e hipergrafos

6.1.  $\lfloor n^2/4 \rfloor$ ; un grafo extremal es único y tiene forma de un grafo bipartido completo con partes que son, en lo posible, iguales:  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$ . Sea  $a_1$  un vértice de grado máximo  $d$ ; los extremos de las aristas que tienen por origen  $a_1$  son los vértices  $a_2, \dots, a_{n-d+1}$ , los cuales, estando ausentes los triángulos, forman un conjunto independiente; esto quiere decir que  $|G| \leq d(a_1) + \dots + d(a_{n-d}) \leq (n-d)d \leq n^2/4$ .

Entre los problemas extremales éste es de un significado especial. Siendo en el aspecto histórico uno de los primeros resultados extremales, sirve al mismo tiempo de modelo para varios tipos de problemas extremales sobre grafos e hipergrafos. Mantel W. [Wiskundige Opgaven. 1907, 10, S, 60] fue el primero en obtener este resultado; a continuación el resultado se volvió a demostrar y descubrir reiteradamente. La primera ampliación cualitativa de él, junto con la demostración de la unicidad de la construcción extremal, fue obtenida por P. Turán [Mat. Fiz. Lapok., 1941, 48, p. 436—453; véase el problema 6.13, 1]. Una solución absolutamente no constructiva se deduce de 6.61. Véase la solución aducida aquí en [Jadjiivanov N., Nenov N. — Reportes de la Academia de Ciencias de Bulgaria, 1976, 25, No 11, p. 1575—1578].

6.2.  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ; la construcción extremal se representa por el  $l$ -grafo completo  $C^l(S_n)$  con  $l$  que realiza el valor extremal. Si el hipergrafo  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$  es una anticadena (es decir, se compone de las hiperaristas que no pueden ser encajadas de dos en dos), se verifica para él la desigualdad de Lubel—Meshalkin—Yamamoto  $\sum_{e \in F} \binom{n}{|e|}^{-1} \leq 1$ , de la cual obtenemos en seguida la desigualdad requerida  $1 \geq \sum_{e \in F} \binom{n}{|e|}^{-1} \geq |F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1} \Rightarrow |F| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ . El resul-

tado recibe el nombre de *teorema de Sperner* [Sperner E. — Math. Z., 1928, 27, p. 544—548], y las familias de conjuntos que no encajan uno en otro, se llaman a veces *spernerianas*. Históricamente este resultado representa el primer problema extremal sobre  $\mathcal{P}(S_n)$  como sobre un conjunto parcialmente ordenado por inclusión ( $\subseteq$ ); este problema está estrechamente vinculado con los fenómenos estructurales del tipo de teoremas de Dilworth [véase Frank A. — J. Comb. Th., 1980, 29, p. 176—184]; con respecto a la desigualdad de Lubel—Meshalkin—Yamamoto véanse los problemas 6.62, 6.63, 6.65.

6.3.  $2^{n-1}$ ; las construcciones extremales pueden ser de naturaleza dual:

$$F = C^1(a) \mathcal{P}(S_n \setminus a) \quad (a \in S_n);$$

$$F = \begin{cases} C^n(S_n) + \dots + C^{(n+1)/2}(S_n), & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ C^n(S_n) + \dots + C^{(n+2)/2}(S_n) + C(a) C^{n/2-1}(S_n \setminus a), & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Su carácter extremal es casi obvio:  $F$  puede contener o bien  $X \subset S_n$ , o bien  $S_n \setminus X$ , por consiguiente, no más de la mitad de todos los subconjuntos, es decir,  $|F| \leq 2^{n-1}$ . La condición extremal puede ser debilitada, al sustituirla por la condición  $\forall A, B \in F \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A| + |B| \leq t \leq n$ ; la respuesta quedará invariable.

El problema puede servir de prototipo de los problemas sobre intersecciones: ¿cuántas hiperaristas puede tener un hipergrafo, en el cual está especificada la estructura (el volumen) de las intersecciones de ciertas totalidades de sus hiperaristas? [Erdős P., Chao Ko. Rado R. — Quart. J. Math. (2), 1964, No 12, p. 313—320].

6.4. El número mínimo  $n_0$  se determina a partir de las desigualdades  $\binom{n_0-1}{k} < m \leq \binom{n_0}{k}$ . El  $k$ -grafo extremal se representa por  $C^k(S_n)$ , siempre que  $m = \binom{n}{k}$ . Si, en cambio,  $\binom{n-1}{k} < m < \binom{n}{k}$ , entonces se trata de  $C^k(S_{n-1})$  y, además, de  $m - \binom{n-1}{k}$  cualesquiera  $k$ -aristas en los vértices de  $S_{n-1} + \{a\}$ , donde  $a \notin S_{n-1}$ . El carácter extremal de tal construcción está claro: para  $n < n_0$  el número de  $k$ -aristas sobre  $n$  vértices sería inferior a  $m$ , puesto que,  $\binom{n}{k} \leq \binom{n_0-1}{k} < m$ .

Este problema es un prototipo de los problemas sobre las uniones: ¿cuántas  $l$ -aristas puede tener un  $l$ -grafo  $G^l = \bigcup_{S \in F} H^l(S)$ , si en el  $l$ -grafo  $H^l$  y en el hipergrafo  $F$  están impuestas ciertas restricciones [Kruskal F. B. — In: Math. Opt. Techn./Ed. R. Bellman, 1963, p. 251—278; Katona Gy. — In: Theory of graphs, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, p. 187—207].

6.5.  $\binom{k+l}{l}$ ; los hipergrafos extremales son  $\mathcal{A}^k = C^k(S_{k+l})$  y  $\mathcal{B}^l = C^l(S_{k+l})$ . Sobre  $S_n = \{a_1, \dots, a_n\}$  hagamos fija la numeración de los vértices y definamos  $C_i, D_i \subset S_n: C_i \cap D_i = \emptyset, |C_i| = k, |D_i| = l, 1 \leq i \leq \binom{n}{k+l}$ , con la particularidad de que  $\forall c \in C_i \forall d \in D_j \quad c < d$ . Pongamos  $\mathcal{F}_i = \{C_i, D_i\}$ . Está claro que  $\forall i, j$  o bien  $C_i \cap D_j = \emptyset$ , o bien  $C_j \cap D_i = \emptyset$ . Supongamos ahora que  $\mathcal{F}_1^i, \dots, \mathcal{F}_i^{n-l}$  son todos sistemas de este tipo (según el número de numeraciones posibles de  $n$ ),  $\mathcal{F}_i^\pi = \{C_i^\pi, D_i^\pi\}$ . Para ellos también  $\forall i, j$  o bien  $C_i^\pi \cap D_j^\pi = \emptyset$ , o bien  $C_j^\pi \cap D_i^\pi = \emptyset$ . Empleando dos métodos, estimemos el número de pares  $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_\nu, B_\nu))$ , donde  $A_\nu = C_i^\pi, B_\nu = D_i^\pi, A$  y  $B$  son aristas de los hipergrafos iniciales. El número de pares  $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_\nu, B_\nu))$  no sobrepasa  $nl$ , en virtud de la no intersección disyuntiva mencionada más arriba. Por otra parte, fijando  $(A_\nu, B_\nu)$ , vemos que el número de  $\mathcal{F}_i^\pi$  convenientes es igual a  $\binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l)!$ , o sea, el número de pares  $(\mathcal{F}_i^\pi, (A_\nu, B_\nu))$  es exactamente igual a  $m \binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l)$ . Por consiguiente,  $m \times \binom{n}{k+l} k!l!(n-k-l) \leq n!$  [Katona Gy. — J. Comb. Th., 1974, No 2, p. 256—266].

Este problema puede servir de prototipo de los problemas de los pares o sistemas de hipergrafos.

6.6. Una familia  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$  se llamará  $p$ -inseparada, si la intersección de cualesquiera  $p$  términos suyos es no vacía, y se llamará  $q$ -separada, si la intersección de cualesquiera  $q$  términos suyos es vacía. Si el volumen de la familia

mayor  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ , 2-inseparada y 3-separada, lo designamos por  $m_n(2, 3)$ , entonces  $m_n(2, 3) = \lfloor (1 + \sqrt{8n+1})/2 \rfloor$ .

**Estimación superior.** Sea  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$  una familia arbitraria de  $m$  términos 2-inseparada y 3-separada. Examinemos en los elementos de  $S_n$  una nueva familia  $D$  compuesta por todas las intersecciones posibles de diferentes términos de la familia  $F = \{e_i\}$ , es decir,  $D = \{e_i \cap e_j\} (i \neq j)$ . Por ser  $F$  2-inseparada, la familia  $D$  contiene exactamente  $\binom{m}{2}$  términos no nulos, pero, por otro lado, esta familia es 2-separada, puesto que la presencia de dos términos de la familia  $D$  que se intersecan tendría por resultado la presencia de por lo menos tres términos de la familia  $F$  que se intersecan, y de este modo contradiría la 3-separación de la familia  $F$ . Finalmente, por la misma razón, la familia  $D$  no puede tener términos múltiples. Debido a que el volumen máximo posible de una familia 2-separada es igual a  $n$ , obtenemos la estimación  $\binom{m}{2} = |D| \leq n$ , la cual tras las transformaciones elementales y tomando en consideración que  $m$  es un número entero, adquiere la forma  $m \leq \lfloor (1 + \sqrt{8n+1})/2 \rfloor$ .

**Construcción.** Sea  $n_\Delta$  un número máximo triangular que no sobrepasa  $n$ . Coloquemos en un plano  $n_\Delta$  puntos tal como se muestra en la fig 6.1'. Tracemos a partir de cada punto de la fila superior una línea hasta alcanzar la diagonal y luego a la izquierda hasta la última columna vertical; tales líneas contienen un número igual de puntos. Además, desde el punto que está más a la derecha de la fila superior trazamos una línea más que va a lo largo de la diagonal. Las líneas obtenidas se entenderán como términos de la familia  $F_n(S_{n_\Delta})$  la cual es, lo que no es difícil de ver, 2-inseparada y 3-separada y contiene exactamente  $\lfloor (1 + \sqrt{8n_\Delta+1})/2 \rfloor$  términos. Los demás  $n - n_\Delta$  puntos se disponen formando una fila superior adicional; ellos no figuran en ningún término. ¿La familia obtenida  $F_n(S_{n_\Delta})$  contiene  $\lfloor (1 + \sqrt{8n_\Delta+1})/2 \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{8n+1})/2 \rfloor$  términos y constituye una construcción suficiente.

Si  $m = m(p, p+1)$  es el volumen de la familia mayor  $F \subset \mathcal{P}(S_n)$ ,  $p$ -inseparada y  $(p+1)$ -separada, entonces  $m$  se define como una raíz entera máxima de la desigualdad  $\binom{m}{p} \leq n$  [Stechkin B. S. — Notas matemáticas, 1967, 19, No 1, p. 155—160, en ruso].

En adelante  $d_G(a)$  denota siempre el grado del vértice  $a$  en el grafo  $G$ ;  $\Delta(G)$ , el grado máximo en  $G$ ;  $t(G)$ , el número máximo de aristas independientes en  $G$ ;  $\chi'(G)$ , el número cromático de arista;  $G_n$ , el grafo de  $n$  vértices;  $G(S)$ , un grafo en el conjunto de vértices  $S$ . Si  $S \subset S_n$ , la notación  $G_n(S)$  significa un subgrafo propio del grafo  $G_n \subset C^2(S_n)$  inducido por los vértices de  $S$ , es decir,  $G_n(S) = G_n \cap C^2(S)$ .

**6.7. Teorema de Wizing** [Wizing V. G. — Análisis discreto, 1965, No 3, p. 25—30, en ruso]: si  $\chi'(G)$  es el número cromático de arista buscado del grafo  $G$ , entonces para todo  $G$  tenemos  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

En una serie de casos se logra precisar este teorema. Es fácil mostrar que  $|G| > \Delta(G) t(G) \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G) + 1$ , en particular,  $|G| > \Delta(G) t(G) \Rightarrow \Delta(G) < 2t(G) + 1$ . El caso alternativo de  $\Delta(G)$  «grandes» está estudiado por completo:  $\Delta(G) \geq 2t(G) + 1 \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$  [A. V. Kóstochnka].

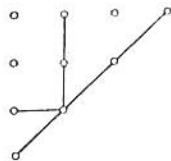


Fig. 6.1'.

**6.8.** [nd/2]. La estimación se deduce de la identidad de Euler  $\sum_{i=1}^n d_G(a_i) = 2|G|$ , y su realización, del teorema de Erdős—Gallai: un sistema de  $n$  números no negativos  $d_1, \dots, d_n$ ,  $\sum_{i=1}^n d_i = 2m$ ,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  se realiza

por los grados de cierto grafo de  $n$  vértices cuando y sólo cuando para cualquier  $r$  natural,  $1 \leq r \leq n-1$ , se verifica la desigualdad

$$\sum_{i=1}^r d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^n \min\{r, d_i\}$$

[Erdős P., Gallai T. — Mat. Lapok, 1960, 11, p. 264—274].

6.9. Designemos el máximo que se busca por  $E(n, t)$ , entonces

$$E(n, t) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leq 2t+1, \\ \max \left\{ \binom{2t+1}{2}, \binom{n}{2} - \binom{n-t}{2} \right\}, & n \geq 2t+1 \end{cases}$$

[Erdős P., Gallai T. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1959, 10, p. 337—357].

6.10. Designemos el máximo que se busca por  $f(d, t)$ , entonces

$$f(d, t) = \begin{cases} dt, & d \geq 2t+1 \\ dt + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{t}{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \right\rfloor, & d \leq 2t. \end{cases}$$

Según la definición de  $\chi'(G)$ ,  $\forall G \mid G \mid \leq \chi'(G) t(G)$ ; esto quiere decir que del teorema de Wizing (véase la resolución del problema 6.7), tenemos  $\forall G \mid G \mid \leq \chi'(G) t(G) \leq t(G) (\Delta(G) + 1)$ , lo que lleva consigo la estimación superior general:  $f(d, t) \leq t(d+1)$ .

Si  $d \geq 2t+1$ , entonces, conforme al resultado de Kóstochka (véase la solución del problema 6.7), tenemos  $\mid G \mid \leq \chi'(G) t(G) = t(G) \Delta(G)$ , lo que lleva consigo la estimación:  $d \geq 2t+1 \Rightarrow f(d, t) \leq dt$ ; esta estimación se realiza por el grafo completo bipartido  $K_{t,d}$ .

Si  $d \leq 2t$ ,  $d \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $d \mid 2t$ , entonces el valor requerido coincide con la estimación superior general, la que se realiza por el sistema de  $2t/d$  grafos completos  $K_{d/2}$ .

El caso de  $d \leq 2t$ ,  $d \equiv 1 \pmod{2}$  se realiza por una construcción propuesta por Sauer: el grafo se compone de  $a = \lfloor 2t/(d+1) \rfloor$  componentes conexos  $S_1, \dots, S_a$ , donde cada componente  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq a$  es tal que todos los puntos en  $S_i$ , salvo uno, son de grado  $d$ , y un punto es de grado  $d-1$ ; todos los  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq a-1$ , tienen  $d+r$  vértices, y  $S_a$  contiene  $d+2+2t-(d+1) \times \lfloor 2t/(d+1) \rfloor$  vértices [Sauer N. — In: Comb. Math. and its Appl./Ed. D.J.A. Welsh, A. P. London, 1971, p. 253—257].

La construcción para el caso alternativo de  $d \leq 2t$ ,  $d \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $d \nmid 2t$ , se construye de un modo recurrente: como un sistema de  $\lfloor 2t/d \rfloor$  grafos completos  $K_{d+1}$  y una construcción más que realiza el valor de  $f(d, t - \lfloor 2t/d \rfloor \times d/2)$ .

6.11. Denotemos el máximo que se busca por  $g(n, d, t)$ . Si  $d \geq t-1$ , entonces tendremos las condiciones del problema 6.9:  $g(n, d, t) = g(n, n-1, t) = E(n, t)$ . Si  $n \leq 2t+1$ , tendremos las condiciones del problema 6.8:  $g(n, d, t) = \lfloor nd/2 \rfloor$ .

Sea  $n \geq 2t+1$ . Entonces, si  $d \leq 2t$ ,  $n \leq 2t + \lfloor t/((d+1)/2) \rfloor$ , tendremos

$$g(n, d, t) = \begin{cases} \min \left\{ \left\lfloor \frac{nd}{2} \right\rfloor, dt + \left\lfloor \frac{2(n-t)}{d+3} \right\rfloor \frac{d-1}{2} \right\}, & d \equiv 1 \pmod{2} \\ \lfloor nd/2 \rfloor, & d \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

si  $d \leq 2t$ ,  $n \geq 2t + \lfloor t/((d+1)/2) \rfloor$ , entonces

$$g(n, d, t) = dt + \left\lfloor \frac{t}{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} \right\rfloor \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor;$$

si  $d \geq 2t + 1$ , entonces

$$g(n, d, t) = \begin{cases} \text{máx} \left\{ \binom{2t+1}{2}, \left\lfloor \frac{t(n+d-t)}{2} \right\rfloor \right\}, & n \leq t+d, \\ dt, & n \geq t+d \end{cases}$$

[Chvatal V., Hanson D. — J. Comb. Th. (B), 1976, 20, p. 128—138].

Es obvio que si  $f(d, t)$  es la función del problema 6.10, entonces  $f(d, t) = \text{máx}_n g(n, d, t)$ .

El estudio de los sistemas de aristas independientes en los grafos está vinculado en muchos aspectos con el teorema de Berge:

$$t(G(S_n)) = \min_{S \subset S_n} \frac{1}{2} (n + |S| - k_0(G(S_n \setminus S))),$$

donde  $k_0(G(S_n \setminus S))$  es el número de componentes conexos impares (según el número de vértices) del grafo  $G(S_n \setminus S)$  [Berge C. — R. Acad. Sci. Paris, 1958, No 247, p. 258—259].

6.12. Denotemos el máximo buscado por  $E(n, t, k)$ . Con motivo de  $E(n, t, k)$  se conoce que existe tal constante  $C_k$  (dependiente solamente de  $k$ ) que, para  $n > C_k$ ,  $E(n, t, k) = \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k}$ ; existe también la hipótesis general de Erdős

$$E(n, t, k) = \text{máx} \left\{ \binom{kt+k-1}{k}, \binom{n}{k} - \binom{n-t}{k} \right\}, \quad n \geq kt+k-1.$$

[Erdős P. — Ann Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 1965, 8, p. 93—96].

6.13. Si  $\mu(n; H_k)$  es el número máximo de aristas en el grafo  $G_n \subset C^2(S_n)$  tal que  $\forall S_k \subset S_n (C^2(S_k) \cap G_n) \subseteq H_k$ , entonces es válida la igualdad  $m(n; H_k) + \mu(n; \bar{H}_k) = \binom{n}{2}$ , donde, como siempre,  $\bar{H}_k = K_k - H_k$ . Por eso en adelante vamos a referirnos en los casos adecuados al  $\mu$ -planteamiento de este problema, empleando la designación estándar  $F_k = \bar{H}_k$ .

1) Designamos el máximo buscado  $m(n; H_k)$  por  $T(n, k, 2)$ , entonces

$$T(n, k, 2) = \sum_{i=0}^{k-2} \binom{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor}{2}.$$

La construcción extremal es única y tiene forma de un grafo compuesto de  $(k-1)$  grafos completos y a ser posible iguales:

$$\sum_{i=0}^{k-2} C^2\left(S_{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor}\right), \quad S_{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor} \cap S_{\left\lfloor \frac{n+j}{k-1} \right\rfloor} = \emptyset, \quad \sum_{i=0}^{k-2} S_{\left\lfloor \frac{n+i}{k-1} \right\rfloor} \equiv S_n.$$

En particular, si  $n \leq 2(k-1)$ , entonces  $T(n, k, 2) = n - k + 1$ ; en este caso como construcción extremal interviene el sistema de  $n - k + 1$  aristas independientes.

La afirmación concerniente a la unicidad de la construcción extremal y al número de sus aristas lleva el nombre de *teorema de Turán*; véase la literatura referente al problema 6.1, y también Turán P. — Colloq. Math., 1954, No 3, p. 13—30.

2) Denotemos el mínimo buscado por  $m(n, k, q, 2)$ . Para este problema la construcción extremal también tiene forma de un bloque:  $r$  vértices aislados y  $t$  grafos completos, a ser posible iguales, sobre los demás vértices, con la particularidad de que los parámetros  $r$  y  $t$  se eligen de un modo tal que el número

total de aristas se minimiza:

$$m(n, k, q, 2) = \min_{k-q \geq r \geq r_1} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{\lfloor \frac{n-r+i}{2} \rfloor}{i}.$$

$$r_1 = \left\lfloor \frac{k-r-1}{q-1} \right\rfloor, \quad r_2 = \begin{cases} (k-1)q - n(q-1), & n \leq (k-1)q/(q-1), \\ (k-1) - (q-1)t_0, & n \geq (k-1)q/(q-1). \end{cases}$$

En particular, si  $n$  es suficientemente grande, entonces

$$m(n, k, q, 2) = \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/(q-1) \rfloor - 1} \binom{\lfloor \frac{n-k+1+i}{(k-1)/(q-1)} \rfloor}{i} + q - 1.$$

Está completamente resuelto el caso en que  $q=3$ :

$$m(n, k, 3, 2) = \begin{cases} 3(n-k+1), & n \leq 3(k-1)/2, \\ \sum_{i=0}^{(h-3)/2} \binom{\lfloor 2 \frac{n+i}{k-1} \rfloor}{i}, & n \geq 3(k-1)/2, k \equiv 1 \pmod{2}, \\ \sum_{i=0}^{(h-4)/2} \binom{\lfloor 2 \frac{n-1+i}{k-2} \rfloor}{i}, & n \geq 3(k-1)/2, k \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Además, se sabe que  $k \leq 2(q-1) \Rightarrow m(n, k, q, 2) = \binom{n-k+q}{2}$ .

Demostremos la última fórmula. Realicemos la inducción según  $q$ . Cuando  $q \geq 2$ , esto es evidente. Supongamos que  $q \geq 3$ . Analicemos un grafo arbitrario  $G_n$  que posee la propiedad requerida y destaquemos en él un conjunto máximo  $S_r$  de  $r$  vértices. Está claro que  $r \leq p - q + 1$ . Además, siendo  $G_n$  suficiente y  $S_r$  independiente llegamos inmediatamente a que el subgrafo  $G_n(S_n \setminus S_r)$  posee la misma propiedad con los parámetros  $n - r, p - r, q - 1$ ; esto significa que de acuerdo con la suposición de inducción,

$$|G_n(S_n \setminus S_r)| \geq \binom{n-r-(p-r)+(q-1)}{2} = \binom{n-p+q-1}{2}.$$

Por cuanto el conjunto  $S_r$  es máximo, cada vértice de  $S_n \setminus S_r$  es adyacente por lo menos a un vértice de  $S_r$ . Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |G_r| &\geq (n-r) + |G_n(S_n \setminus S_r)| \geq n-r + \binom{n-p+q-1}{2} \geq \\ &\geq n-p+q-1 + \binom{n-p+q-1}{2} = \binom{n-p+q}{2}. \end{aligned}$$

De construcción que realiza esta estimación puede servir un grafo completo sobre el conjunto de  $(n-p+q)$  vértices, completado con  $(p-q)$  vértices aislados [Kopilov G. N. — Notas matemáticas, 1979, 26, No 4, p. 593-602; Stechkin B. S. Frankl P. — Notas matemáticas, 1981, 29, No 1, p. 83-94, en ruso].

3) Pongamos  $m(n; H_k) = m(n, k)$ , entonces

$$m(n, k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - \binom{k-1}{2}, & k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \binom{n}{2} - \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \binom{k-1}{2} \right\}, & k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$



La construcción extremal representa o bien  $K_n - \mathcal{F}_n$ , o bien  $K_n - K_{h-1}$  (en función del valor numérico de  $m(n, k)$ ).

Si  $G_n$  posee la propiedad requerida, el grafo complementario  $\bar{G}_n$  poseerá, evidentemente, la propiedad de que todo su subgrafo propio de  $k$  vértices tiene un vértice aislado.

Sea  $k \equiv 0 \pmod{2}$ . Elijamos en  $\bar{G}_n$  un sistema máximo  $F$  de las aristas independientes; está claro que  $|F| \leq k/2$ , puesto que de lo contrario, al tomar  $k/2$  aristas independientes, se obtendría un subgrafo propio de  $k$  vértices sin vértices aislados. Por ser  $F$  máximo, todas las demás aristas de  $\bar{G}_n$  son adyacentes a las aristas de  $F$ , por lo que todo subgrafo propio de  $k$  vértices que comprende los vértices del grafo  $F$  tiene no más de  $(k-1)$  vértices aislados y, por tanto, también  $\bar{G}_n$  tiene no más de  $(k-1)$  vértices no aislados, es decir,  $|\bar{G}_n| \leq \binom{k-1}{2}$ .

Sea  $k \equiv 1 \pmod{2}$ . Si  $t(\bar{G}_n) \leq (k+1)/2$ , los razonamientos son los mismos que para  $k \equiv 0 \pmod{2}$ . Si en  $\bar{G}_n$  se tienen  $(k+1)/2$  aristas independientes, entonces toda arista que se corta con ellas llevaría a una contradicción, por consiguiente, en  $\bar{G}_n$  todas las aristas son independientes, es decir,  $|\bar{G}_n| \leq \lfloor n/2 \rfloor$  [D. Katona].

$$4) m(n; H_h) = m(n, k);$$

$$m(n, k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - \binom{k-1}{2} + (k-1), & k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \binom{n}{2} - \max \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \binom{k-1}{2} - (k-1) \right\}, & k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

La construcción extremal tiene la forma o bien de  $K_n - \mathcal{F}_n$ , o bien de  $K_n - (K_{h-1} - C_{h-1})$ , donde  $C_{h-1}$  es un ciclo en  $k-1$  vértices (en función del valor de  $m(n, k)$ ).

Si  $m_1(n, k)$  es una función extremal de 6.13.3), entonces  $m_1(n, k) \leq m(n, k)$  y, por consiguiente

$$m(n, k) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k \equiv 1 \pmod{2}, \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \binom{k-1}{2}.$$

Supongamos primero que  $k \equiv 0 \pmod{2}$ ; la demostración la realizamos por inducción respecto de  $n \geq k$ , apoyándonos en el siguiente lema.

**Lema.** Si  $n \geq k \geq 2$  y  $k \equiv 0 \pmod{2}$ , entonces en todo grafo de  $n$  vértices sin vértices aislados existe un subgrafo propio de  $k$  vértices sin vértices aislados.

La demostración de este lema se realiza por inducción respecto de  $k \leq n$ . Si  $n = k$ , será evidente que  $m(n, k) = 2(k-1)$ . Admitamos que lo requerido es cierto incluso hasta  $n-1$ ; mostremos que es cierto también para  $n$ . Supongamos lo contrario:  $m(n, k) = \binom{n}{k} - \binom{k-1}{2} + (k-1) - \lambda$  ( $\lambda \geq 1$ ).

Examinemos en nuestro grafo un vértice  $a$  de grado  $n-1$ . Si  $k$  es par, tal vértice siempre existe en toda construcción suficiente; en efecto, suponiendo lo contrario, vemos que el grafo complementario  $\bar{G}_n$  no tiene vértices aislados y de acuerdo con el lema, contiene un subgrafo de  $k$  vértices sin vértices aislados. Esto quiere decir que el grafo inicial ni siquiera puede contener una estrella en estos  $k$  vértices, lo que contradice la condición de suficiencia de la construcción. Así pues, al eliminar el vértice de grado  $n-1$ , obtenemos en los  $n-1$  vértices restantes una construcción suficiente que contiene  $\binom{n}{2} - \binom{k-1}{2} + (k-1) - \lambda - (n-1) < \binom{n-1}{2} + \binom{k-1}{2} + (k-1) = m(n-1, k)$  aristas, lo que contradice nuestra suposición de inducción. Está claro que esta demostración conduce también a la solución de 6.13.3) para  $k \equiv 0 \pmod{2}$ .

Sea ahora  $k \equiv 1 \pmod{2}$ ; siguiendo los razonamientos de 6.13.3), examinemos en  $\bar{G}_n$  un conjunto máximo  $F$  de las aristas independientes. Si  $|F| \geq \geq (k+1)/2$ , entonces no puede haber una arista que no se corte con las aristas de  $F$ , esto significa que en tal caso  $\bar{G}_n$  está compuesto de aristas que no se intersecan, es decir,  $|\bar{G}_n| \leq [n/2]$ . Si  $|F| \leq (k-1)/2$ , cada arista de  $\bar{G}_n$  se interseca con las aristas de  $F$ , razón por la cual el número de vértices aislados en  $\bar{G}_n$  no es superior a  $k-1$ , más, por cuanto en todo subgrafo propio  $\bar{G}_n$  debe haber, además de un vértice aislado, un ciclo vacío en  $k-1$  vértices, entonces  $|\bar{G}_n| \leq \leq \binom{k-1}{2} - (k-1)$  [A. V. Kóstochka, B. S. StéCHKin].

5) Demostremos una afirmación un tanto más fuerte.

**Teorema.** Sea  $H_k$  un grafo arbitrario fijo de  $k$  vértices que posee un vértice de grado  $k-1$ . Entonces, el grafo  $G_n$  poseerá la propiedad de que  $\forall S_k \subset S_n$   $G_n(S_k) = = (C^2(S_k) \cap G_n) \supset H_k$  cuando y sólo cuando  $G_n \supset (K_n - \bar{H}_k)$  para  $\bar{H}_k \not\supset \mathcal{F}_k$  y  $G_n \supset (K_n - H_k) \vee G_n \supset (K_n - \mathcal{F}_n) = \bar{\mathcal{F}}_n$  para  $H_k \supset \mathcal{F}_k$ .

**Demostración.** La suficiencia de esta afirmación es evidente. Demostremos su necesidad. Supongamos que  $G_n$  posee la citada propiedad. Vamos a estudiar el grafo  $\bar{G}_n$  y destaquemos en él un sistema máximo  $\mathcal{F}_{2t} \subset \bar{G}_n$  de  $t = t(\bar{G}_n)$  aristas independientes.

La desigualdad  $t > t(\bar{H}_k)$  puede cumplirse sólo cuando  $\bar{H}_k \supset \mathcal{F}_k$ , mas en este caso tendremos necesariamente  $\bar{G}_n = \mathcal{F}_{2t} \subset \mathcal{F}_n$ , puesto que al agregar cualquier arista  $e$  al grafo  $\mathcal{F}_{2t}$  ( $e$  debe ser adyacente a una de las aristas del grafo  $\mathcal{F}_{2t}$ , por ser este último máximo), obtendremos un grafo  $(\mathcal{F}_{2t} + \{e\})$ , en el cual siempre habrá  $k$  vértices  $S_k$ , sobre los cuales el subgrafo propio  $(\mathcal{F}_{2t} + \{e\})(S_k)$  no tendrá vértice aislado prescrito al grafo  $\bar{H}_k$  por la condición  $H_k \supset K_{1,k-1}$ .

Sea ahora  $t \leq t(\bar{H}_k)$ . En este caso el número de vértices no aislados del grafo  $\bar{G}_n$  no sobrepasa de  $k-1$ . En efecto, al elegir en el caso contrario, a título de  $S_k \subset S_n$ , cualquier conjunto de  $k$  vértices no aislados del grafo  $G_n$  que incluya  $2t$  vértices del grafo  $\mathcal{F}_{2t}$ , en virtud de que este último es máximo llegamos a que el subgrafo propio  $\bar{G}_n(S_k)$  sobre estos  $k$  vértices no tiene vértice aislado, lo que contradice la hipótesis del teorema. Está claro que el grafo  $\bar{G}_n$  ha de ser un subgrafo del grafo  $\bar{H}_k$  sobre los vértices no aislados en una magnitud no superior a  $k-1$  de dichos vértices, lo que se trataba de demostrar.

Como corolario, obtenemos la solución de nuestro problema:

$$m(n; H_k) = \begin{cases} \binom{n}{2} - |\bar{H}_k|, & \bar{H}_k \not\supset \mathcal{F}_k \\ \binom{n}{2} - \text{máx} \left\{ \left[ \frac{n}{2} \right], |\bar{H}_k| \right\}, & H_k \supset \mathcal{F}_k \end{cases}$$

que, evidentemente, lleva consigo también los resultados de los problemas (6.13.3—6.13.5).

6)  $m(n; C_k) = m(n, k) = ]n(n-k+2)/2[$ . Con el objeto de describir las construcciones extremales, numeremos el conjunto de vértices en forma cíclica desde 1 hasta  $n$ , considerando que  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$ , ... Introduzcamos una distancia  $\rho(a_i, a_j) = \min\{|i-j|, n-|i-j|\}$ , donde la diferencia se entiende también cíclicamente, es decir,  $\rho(a_1, a_2) = 1$ ,  $\rho(a_1, a_3) = 2$ , ...,  $\rho(a_1, a_{n-1}) = 2$ , ...,  $\rho(a_1, a_n) = 1$ ,  $n-k \equiv 0 \pmod{2}$ . Consideramos que los vértices  $a_i, a_j$  forman una arista en el grafo extremal cuando y sólo cuando  $\rho(a_i, a_j) \leq (n-k+2)/2$ .

Demostremos la suficiencia de la construcción regular para  $n-k \equiv 0 \pmod{2}$ . Sea  $S_k = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ , donde  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

Caso 1. Existen los vértices  $a_{ij}, a_{i_{j+1}}, a_{il}, a_{i_{l+1}} \in S_h, 2 \leq j+1 \leq l \leq n$  tales que  $\rho(a_{nj}, a_{i_{j+1}}) > (n-k+2)/2 < \rho(a_{i_l}, a_{i_{l+1}})$ , pero en este caso el número de vértices que no integran  $S_h$  y están situados entre  $a_{ij}$  y  $a_{i_{j+1}}$ , no es menor que  $(n-k+2)/2$  (lo mismo es lícito para los vértices dispuestos entre  $a_{i_l}$  y  $a_{i_{l+1}}$ ) y por consiguiente, el número total de vértices que no integran  $S_h$  no es inferior a  $n-k+2$ , lo que contradice el volumen de  $S_h$ .

Caso 2.  $\forall a_{ij} \in S_h \rho(a_{ij}, a_{i_{j+1}}) \leq (n-k+2)/2$ , pero en tal caso, obviamente, el conjunto de aristas  $(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}) \dots (a_{i_h}, a_{i_1})$  forma un ciclo sobre los vértices de  $S_h$ .

Caso 3. Sea  $\rho(a_{i_1}, a_{i_2}) > (n-k+2)/2$  y  $\rho(a_{ij}, a_{i_{j+2}}) > (n-k+2)/2$ , pero, en este caso, el número de vértices que no integran  $S_h$  y que están situados entre  $a_{i_1}, a_{i_2}$  y  $a_{ij}, a_{i_{j+2}}$ , no es inferior a  $(n-k+2)/2 + (n-k+2)/2 - 1 = n-k+1$ , lo que contradice el volumen de  $S_h$ . Sea  $\rho(a_{i_1}, a_{i_2}) > (n-k+2)/2$ , entonces existe un ciclo en  $S_h$ , a saber, para  $k$  par tenemos  $(a_{i_1}, a_{i_h})(a_{i_h}, a_{i_{h-2}}) \dots (a_{i_4}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_1})(a_{i_1}, a_{i_2}) \dots (a_{i_{h-1}}, a_{i_1})$  y para  $k$  impar tenemos  $(a_{i_1}, a_{i_h})(a_{i_h}, a_{i_{h-2}}) \dots (a_{i_4}, a_{i_2})(a_{i_2}, a_{i_1})(a_{i_1}, a_{i_2}) \dots (a_{i_{h-2}}, a_{i_1})$ .

Queda demostrada, pues, la suficiencia de la construcción regular; demos-tremos ahora que la construcción es extremal. Todo vértice de un subgrafo propio de  $k$  vértices yace en el ciclo. Esto es indicio de que su grado en el grafo propio no es menor de dos, o sea su grado en el grafo inicial no es menor de  $n-k+2$ , por consiguiente

$$|G| \geq |n(n-k+2)/2|$$

[G. Katona, A. V. Kóstochka, B. S. Stéckin].

7), 8) Designemos la construcción extremal del problema 6.13.6) por  $C(n, k)$ ; está claro que  $|C(n, k+1)| = |n(n-k+1)/2|$ , por otra parte, el grafo  $C(n, k+1)$  posee, evidentemente, la propiedad de que todo conjunto  $k$  de sus vértices es un conjunto de  $k$  vértices de cierto ciclo en el vértice  $k+1$ . Por consiguiente, todo subgrafo propio de  $k$  vértices del grafo  $C(n, k+1)$  es conexo y contiene el camino  $P_k$  y  $\mathcal{F}_k^*$ . Además, cada uno de los grafos mencionados no contiene vértices aislados y, por lo tanto, para  $n > k, m(n; P_k) = m(n; \mathcal{F}_k^*) = |n(n-k+1)/2|$ .

9), 10) Si  $F_k = C_k$  o  $F_k = P_k$ , entonces, cuando  $k \geq 4$ , en la construcción suficiente no hay vértices de grado  $\geq 3$ , lo que quiere decir que  $\mu(n; F_k) \leq n$ . Por otra parte, la construcción  $C_n$  es suficiente, razón por la cual

$$m(n; \overline{C}_k) = n(n-3)/2, \quad k \geq 4, \quad m(n; \overline{P}_k) = \begin{cases} \binom{k-1}{2}, & n=k, \\ n(n-3)/2, & n \geq k+1, \end{cases} \quad k \geq 4.$$

11) Está claro que

$$k \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow m(n; \overline{\mathcal{F}}_k^*) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k \geq 4.$$

Si, en cambio,  $k \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces es fácil ver que

$$m(n; \overline{\mathcal{F}}_k^*) = \binom{n}{2} - 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \binom{n-3}{2} \lfloor n/3 \rfloor,$$

$$m(n; \mathcal{F}_k^*) = \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad k \geq 7.$$

12), 13) Está claro que si  $F_h \not\supset K_{1,h-1}$ ,  $F_h \not\supset \mathcal{F}_h$ , entonces  $|F_h| \leq \mu(n; F_h) \leq g(n, \Delta(F_h), t(F_h))$ , donde  $g$  viene del problema 6.11; de los resultados obtenidos en los problemas 6.10 y 6.11 se comprueba con facilidad que en los casos de

$$F_h = K_{1,h-1} (k \geq 3l+1 \geq 7) \text{ y } F_h = \frac{2t}{d} K_{d,1} (2 \leq d \leq 2t, d \equiv 0 \pmod{2}), \\ d|2t, k=2t+2t/d \text{ estas estimaciones bilaterales coinciden y dan respectivamente } m(n; C^2(S_l) + C^2(S_h \setminus S_l)) = \binom{n}{2} - l(k-l) \text{ y } m\left(n; \underbrace{k_{d+1}, \dots, d+1}_{2t/d}\right) = \\ = \binom{n}{2} - t(d+1).$$

En general, si  $F_h$  es un grafo de  $k$  vértices, extremal respecto a las propiedades del problema 6.10, y tal que  $F_h \not\supset K_{1,k-1}$ ,  $F_h \not\supset \mathcal{F}_h$ ,  $|F_h| = f(d, t)$ ,  $d = \Delta(F_h)$ ,  $t = t(F_h)$ , donde la función  $f$  viene del problema 6.10, entonces  $m(n; K_h - F_h) = \binom{n}{2} - f(\Delta(F_h), t(F_h))$ .

14) Si  $t = 1$ , véase el problema (6.13.1). Si  $2t = k$ , véase el problema 6.13.8). Para otros  $t$  el problema no está resuelto por ahora, no obstante, pueden indicarse construcciones suficientes que, quizás, resultarán extremales.

Una de tales construcciones es la de bloque, compuesta, a ser posible, de  $k - 2t + 1$  grafos completos iguales sobre  $n$  vértices, de suerte que

$$m(n; H_k) \leq \sum_{i=0}^{k-2t} \binom{n+i}{k-2t+1}.$$

El número de bloques  $(k - 2t + 1)$  de esta construcción especificado aquí da el siguiente problema extremal de números enteros: se maximizará  $p$  a condición de que  $k \geq 2t \geq 0$ ,

$$\sum_{i=1}^p k_i = k, k \geq k_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor \geq t.$$

Está claro que si un grafo posee la propiedad requerida con los parámetros  $(k, t)$ , la poseerá también con los parámetros  $(k-1, t-1)$ , como también con los parámetros  $(k-t+1, 1)$ , lo que, de acuerdo con 6.13.1), lleva consigo la estimación inferior:

$$m(n; H_k) \geq \sum_{i=0}^{k-t-1} \binom{n+i}{k-t}.$$

Para  $n$  pequeños la estimación superior citada no es exacta, las correspondientes construcciones extremales también tienen forma de un bloque con la única diferencia de que cada bloque en este caso representa o bien una arista independiente, o bien una construcción extremal para los problemas 6.13.6), 7), 8). Así por ejemplo,  $n \leq 2(k-t) \Rightarrow m(n; H_k) = n - k + t$ . Este valor se realiza por un sistema de  $n - k + t$  aristas independientes. Como ejemplo de otra construcción de este tipo puede servir el sistema de  $k - 2t$  aristas independientes y el grafo  $C(n - 2k + 4t, t)$  del problema 6.13.11) sobre los demás  $n - 2k + 4t$  vértices.

6.14.  $m(n, k) = (k-1)n - \binom{k}{2} + \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor + 1$ . La construcción extremal

tiene por expresión  $C^2(S_n) - C^2(S_{n-k+1}) + \mathcal{F}^*(S_{n-k+1})$  [Erdős P.,

Moser L., — J. Austral. Math. Soc., 1970, 11, p. 42—47]; véase la aplicación de este resultado en: [Sós V.—In: Comb. Struct. and their appl. Gordon and Breach, 1970, p. 407—410].

6.15.  $3n-6$ . El grafo extremal aquí es una triangulación. El carácter extremal de esta construcción se deduce inmediatamente de la correlación de Euler:  $n - m + \Gamma + 2$ , donde  $\Gamma$  es el número de caras del grafo plano y  $m$ , el número de sus aristas.

6.18. 4) Véase el problema 6.8. 5) Véase el problema 6.9. 6) Tiene lugar la estimación general  $f(n; P_k) = \frac{k-2}{2}n$ , la cual es exacta, si  $k$  divide  $n$ . Véase la resolución completa: [Kopylov G. N.—Informes de la Academia de ciencias de la URSS, 1977, 234, N° 1, p. 19—21, en ruso]. 8) El resultado de Ore afirma que  $f(n; C_n) = \binom{n-1}{2} + 1$ . La construcción extremal representa  $C^2(S_{n-1})$  y una arista más que es incidente con relación al vértice  $a = S_n \setminus S_{n-1}$ . 9)—14) Pongamos

$$m(n; l) = \max_{G_n^2 \not\supset C_l} |G_n^2|, \quad m(n; l_1, \dots, l_t) = \max_{G_n^2 \not\supset C_{l_i}} |G_n^2|, \\ i=1, \dots, t$$

Está claro que  $m(n; \{\emptyset\}) = \binom{n}{2}$ ,  $m(n; 3, 4, \dots, n) = n - 1$ ,  $m(n; n) = \binom{n-1}{2} + 1$  (véase 6.18,8). Se sabe que

$$m(n; l) = \binom{l-1}{2} + \binom{n-l+2}{2}, \quad l \leq n \leq 2l-3;$$

$$m(n; 2l+1) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leq 2l. \\ \binom{2l}{2} + \binom{n-2l+1}{2}, & 2l \leq n \leq 4l-1; \\ \lfloor n^2/4 \rfloor, & n \geq 4l-1. \end{cases}$$

$$m(n; 4) = \frac{n^2}{2} (1 + 0(1));$$

$$m(n; l, l+1, \dots, n) = n(l-1)/2 - r(r-1)/2,$$

$$n = q(l-2) + r, \quad 0 < r \leq l-2; \quad m(n; 4, 6, 8, \dots) = n-1 + \lfloor (n-1)/2 \rfloor,$$

de construcción puede servir el grafo  $C^1(a) C^1(S_n \setminus a) + \mathcal{F}(S_n \setminus a)$ ;

$$m(n; 3, 4, \dots, 2k) > C_{kn}^{1+1/(2k-1)}.$$

[Woodall D. R.—Proc. London Math. (3), 1972, 24, p. 739—755; Erdős P.—In: Terie Combinatorie. Roma: Academia Nazionale, 1976, p. 3—17; Kopylov G.N.—Informes de la A.C. de la URSS, 1977, 234, N° 1, p. 19—21, en ruso].

6.19. El  $m$  extremal se determina de la desigualdad  $n \leq \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$ . Es suficiente estudiar este problema en un hipergrafo conjugado y cerciorarse de que en tal forma el problema es equivalente al problema 6.2.

6.20. La suma de  $k$  coeficientes binomiales máximos. La construcción extremal es  $\sum_{i=1}^k C^{l_i}(S_n)$ , donde  $\binom{n}{l_i}$  se realiza por los coeficientes binomiales máximos.

Supongamos en el problema 6.62 que  $G$  es una cadena máxima y  $\mathcal{S}$ , el conjunto de todas las cadenas máximas. Entonces, si  $F$  tiene como máximo una cadena de  $k$  términos, concluimos que  $|F \cap G| \leq k$ , por consiguiente, al tomar en consideración que  $|\mathcal{S}| = n!$ ,  $\text{deg}_{\mathcal{S}}(S) = |S|!(n - |S|)!$ , obtenemos la desi-

gualdad

$$\sum_{i=0}^n f_i \binom{n}{i}^{-1} \leq k, \text{ donde } f_i = |F \cap C^i(S_n)|.$$

6.21. Sea  $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{A}_i$ . Si  $\mathcal{A}$  contiene una cadena de longitud  $k+1$ , entonces uno de  $\mathcal{A}_i$  contiene una cadena de longitud 2, es decir,  $\mathcal{A}_i$  no es anticadena. Del problema 6.20 se desprende que  $|\mathcal{A}|$  no es superior a la suma de  $k$  coeficientes binomiales máximos; de que  $|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^h |\mathcal{A}_i|$  se deduce (puesto que  $\mathcal{A}_i$  son disjuntos) que de construcción extremal pueden servir  $C^{l_i}(S_n)$ , donde  $\binom{n}{l_i}$  realizan  $k$  coeficientes binomiales máximos.

6.22. Si  $F$  contuviera la cadena  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_{h+1}$ , entonces  $A_1 \supset A_{h+1}$ ,  $|A_1 - A_{h+1}| \geq h$ , es decir, se obtendría una contradicción con la hipótesis del problema. Esto significa que según 6.20,  $|F|$  no es superior a la suma de  $h$  coeficientes binomiales máximos; la construcción extremal es la misma que en los problemas 6.20 y 6.21 (Erdős P. — Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, p. 898–902).

6.23.  $2^{n-1}$ ; las construcciones extremales son

$$F = \sum_{i \equiv 0 \pmod{2}}^n C^i(S_n), \quad F = \sum_{i \equiv 1 \pmod{2}}^n C^i(S_n).$$

En el problema 6.02, c) basta poner  $G = \{S\} + \{S+a\}$ , donde  $S \subset S_n$ ,  $a \notin S$ ,  $\mathcal{G} = \{G\}_{a \in S_n \supset S \not\supset a}$ , entonces, evidentemente,  $|F \cap G| \leq 1$ , y es fácil ver que  $|\mathcal{G}| = n 2^{n-1}$ ,  $\deg_{\mathcal{G}}(S) = |S| + (n - |S|) = n$ , por consiguiente

$$|F|/2^{n-1} = \sum_{S \in \mathcal{F}} n/2^{n-1} \cdot n \leq 1.$$

6.24.  $\sum_{i \equiv [n/2] \pmod{h}} \binom{n}{i}$ ; a título de construcción extremal puede tomarse

$$F = \sum_{i \equiv [n/2] \pmod{h}} C^i(S_n) \text{ [Katona G. — Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 1972, N°20, p. 54-67].}$$

6.27. a) véase el problema 6.3.

$$b) \sum_{i \equiv (n+2)/2}^n \binom{n}{i}, \quad n+r \equiv 0 \pmod{2}, \quad \sum_{i \equiv (n+r+1)/2}^n \binom{n}{i} + \binom{n-1}{(n+r-1)/2}, \\ n+r \equiv 1 \pmod{2}.$$

La construcción extremal es

$$F = \sum_{i \equiv (n+r)/2}^n C^i(S_n), \quad n+r \equiv 0 \pmod{2},$$

$$F = \sum_{i \equiv (n+r+1)/2}^n C^i(S_n) + C^{(n+r-1)/2}(S_n - a), \quad n+r \equiv 1 \pmod{2}$$

[Katona G. — Acta Math. Soc. Hungar, 1964, 15, p. 329–337].

c)  $2^{n-2}$ ; la construcción extremal es  $F = C^2(S_2) \mathcal{F}(S_n - S_2)$  [Frankl P. — Bull. Austral. Math. Soc., 1976, N° 15, p. 73—79].

6.28. Véase la literatura en el problema 6.27 c).

6.29.  $\binom{n}{k}$ ,  $k > n/2$ ;  $\binom{n-1}{k-1}$ ,  $k \leq n/2$ . Las construcciones extremales son:  $C^k(S_n)$ ,  $k > n/2$ ;  $C^1(a)C^{k-1}(S_n - a)$ ,  $k \leq n/2$ .

Sea  $k \leq n/2$ . Fijemos la numeración cíclica de los elementos  $a_1, \dots, a_n$ . Veamos las  $k$ -aristas  $B_1, \dots, B_l$ , cuyos elementos son sucesivos con tal numeración, es decir,  $B_j = \{a_{j_1}, a_{j_1+1}, a_{j_1+2}, \dots, a_{j_1+k-1}\}$ , con la particularidad de que se supone que  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ . Está claro que si  $k \leq n/2$ , entonces el número de tales  $k$ -aristas no es inferior a  $k$ .

Sea  $A_1, \dots, A_m$  una familia de  $k$ -aristas de tal índole que  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ; enumeremos los pares  $(\zeta, A_i)$ , donde  $\zeta$  es una numeración cíclica, y los vértices  $A_i$  son sucesivos en  $\zeta$ . Para cada  $A_i$  existen  $k!(n-k)!$  tales  $\zeta$ , lo que quiere decir que en total hay  $mk!(n-k)!$  de tales pares. Por otra parte, para  $\zeta$  fijo se tienen no más de  $k$  conjuntos  $A_i$ , por lo cual el número de pares no sobrepasa de  $(n-1)!k$ . Obtenemos la desigualdad

$$(n-1)!k \geq m k! (n-k)! \Rightarrow m \leq \binom{n-1}{k-1}$$

[Katona G. — J. of Comb. Th. Erdős, 13, N° 2, p. 183—184]. Este resultado lleva el nombre de teorema de Erdős—Ko—Rado; véase 6.3.

Si complementariamente  $\bigcap_{i=1}^m A_i = \emptyset$ , entonces

$$m = 1 + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1}.$$

La construcción extremal es

$$F = C(S_h) + \sum_{i=1}^{h-1} C^1(a)C^{i-1}(S_n - S_h - a)C^{h-i}(S_h), a \notin S_h.$$

[Hilton A.J.W., Milner E.C. — Quart. J. Math. Oxford (2), 1967, N° 18, p. 369—384].

6.30.  $\binom{n}{k}$ ,  $\frac{tk}{t-1} > n$ ;  $\binom{n-1}{k-1}$ ,  $\frac{tk}{t-1} \leq n$ . Las construcciones extremales son  $C^k(S_n)$  y  $C^1(a)C^{k-1}(S_n - a)$ .

Sea  $tk/(t-1) \leq n$ . Apliquemos el método usado en el problema 6.29. Será suficiente mostrar que, siendo cíclica la numeración de los vértices, el sistema de  $k$ -aristas sucesivas  $B_1, \dots, B_l$  en el que cualesquiera  $t$  tienen intersección no vacía, puede tener no más de  $k$  términos, es decir, que  $l \leq k$ . Estudiamos las  $(n-k)$  aristas complementarias de  $C_i = S_n - B_i$ . Ellas también tienen vértices sucesivos y su unión no coincide con  $S_n = \{1, \dots, n\}$ . Supongamos que el último vértice de  $C_1$  es igual a  $n$ . Definamos la aplicación  $f$  del modo siguiente:

$$f(C_i) = \begin{cases} \text{último vértice de } C_i, & \text{si } i \geq 2, \\ \{n, n+1, \dots, t(n-k)\}, & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

La desigualdad  $t(n-k) \geq n$  se deduce de la condición  $tk/(t-1) \leq n$ . Está claro que los conjuntos  $f(C_i)$  son disjuntos. Es fácil ver que para  $j$  fijo ( $1 \leq j \leq n-k$ ) todos los números  $r \equiv j \pmod{n-k}$ ,  $1 \leq r \leq t(n-k)$  se encuentran en  $\bigcup_{i=1}^l f(C_i)$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^l C_i = \{1, \dots, n\}$ , lo que contradice la condición. Por

consiguiente, existen por lo menos  $n - k$  números dentro del segmento  $[1, 2, \dots, t(n - k)]$  y fuera de la  $\bigcup_{i=1}^l f(C_i)$ , es decir,

$$\left| \bigcup_{i=1}^l f(C_i) \right| + n - k = t(n - k) - n + 1 + l - 1 + n - k \leq t(n - k),$$

lo que trae consigo el que  $l \leq k$  [Frankl P. - J. Comb. Th. (A), 1976, N° 20, p. 1-11].

6.31. Existe  $n_0 = n_0(k, l)$  tal que

$$\max |G_n^k| = \binom{n-l}{k-l}.$$

La construcción extremal es  $G_n^k = C^l(S_l) C^{k-l}(S_n - S_l)$ . Sin embargo, para  $n$  pequeños esto no es así:  $n = 8, k = 4, l = 2$ , entonces el 4-grafo  $\{A: |A| = 4; |A \cap \{1, 2, 3, 4\}| = 3\}$  tiene  $16 > \binom{6}{2}$  aristas [Erdős P., Chao Ko, Rado R. - Math. Oxford (2), 1961 N° 12, p. 313-318]. El valor exacto de  $n_0(k, l)$  fue hallado por Frankl.

6.32. La demostración se realiza por inducción respecto de  $k$ .

**Existencia.** Si  $k = 1$ , entonces  $m = \binom{m}{1}$ . Supongamos la existencia hasta  $k-1$ . Determinemos  $a_h$  de las desigualdades  $\binom{a_h}{k} \leq m < \binom{a_h+1}{k}$ . Si en este caso se realiza la igualdad, queda cumplido lo que se requiere; si no se realiza, el número  $m - \binom{a_h}{k}$  tiene la forma canónica

$$m - \binom{a_h}{k} = \binom{a_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t};$$

resta demostrar que  $a_h > a_{h+1}$ ; en el caso contrario tendríamos la desigualdad

$$m \geq \binom{a_h}{k} + \binom{a_{h-1}}{k-1} \geq \binom{a_h}{k} + \binom{a_k}{k-1} = \binom{a_h+1}{k},$$

que contradice la definición de  $a_h$ .

**Unicidad.** Si  $k = 1$ , la unicidad es obvia. Supongamos que ella tiene lugar hasta  $k-1$ , y mostremos que esto es así también para  $k$ . Supongamos lo contrario:

$$m = \binom{a_h}{k} + \dots + \binom{a_t}{t} = \binom{a'_k}{k} + \dots + \binom{a'_t}{t'}.$$

Si  $a_k = a'_k$ , tendríamos dos formas para  $m - \binom{a_h}{k}$  y, según la suposición de inducción, obtendríamos una contradicción. En cambio, si  $a_h < a'_h$ , otra vez llegaríamos a una contradicción:

$$\begin{aligned} m &\leq \binom{a_h}{k} - \binom{a_h-1}{k-1} + \dots + \binom{a_k-k+1}{1} = \\ &= \binom{a_h+1}{k} - 1 < \binom{a_h+1}{k} \leq \binom{a'_h}{k} \leq m. \end{aligned}$$

6.33. Enumeremos el número de pares  $(A, B): A \supset B, A \in F, B \in C_{h-1}(F)$ . Para cada  $A \in F$  hay exactamente  $k$  de tales  $B$ . Por consiguiente, el número



ro de pares es igual a  $|F| \cdot k$ . Mas, si fijamos  $B \in C_{h-1}(F)$ , tenemos no más de  $n - k + 1$  conjuntos  $A \supset B$ . Esto quiere decir que el número de pares no sobrepasa de  $|C_{h-1}(F)| (n - k + 1)$ . Hemos obtenido, pues, la desigualdad requerida  $|C_{h-1}(F)| (n - k + 1) \geq |F| \cdot k$ .

6.34. Mostremos por medio de la inducción que tal  $k$ -grafo existe sobre un número de vértices no superior a  $a_h + 1$ . El caso cuando  $k = 1$  es trivial. Supongamos que la afirmación es válida para  $k - 1$ . Elijamos  $a_h$  vértices (conjunto  $A$ ) y todas las posibles  $k$ -aristas sobre ellos:  $C^k(A)$ . Por cuanto  $a_{h-1} + 1 \leq a_h$ , entonces, según la suposición de inducción, existe un  $(k-1)$ -grafo

$$F' \subset C^{k-1}(A) \text{ tal que } C_{h-2}(F') = f_{h-1} \left( m - \binom{a_h}{k} \right). \text{ Sea } a \in A \text{ un vértice nuevo. Agreguemos } a \text{ a todas las aristas de } F', \text{ es decir, supongamos que } F'' = \sum_{c \in F'} C(a+c). \text{ Es fácil ver que } |C_{h-1}(C^k(A) + F'')| = f_{h-1} \left( m - \binom{a_h}{k} \right) + \binom{a_h}{k-1} = f_h(m).$$

El  $k$ -grafo buscado  $F$  puede definirse en la forma explícita del modo siguiente: fijemos la numeración de los vértices e introduzcamos la ordenación de las aristas:  $B$  es inferior a  $C$ , si el primer elemento del conjunto  $(C - B) \cup (B - C)$  cae en  $C$ . Entonces  $F$  se define como un  $k$ -grafo de las primeras (en este sentido)  $m$   $k$ -aristas.

6.35. Si  $m_2 = 0$ , la afirmación es trivial. Sea  $m_2 > 0$ , entonces analicemos dos casos.

Caso 1.  $f_h(m_1) \leq m_2$ . Supongamos que la representación canónica  $m_2$  tiene por expresión

$$m_2 = \binom{a_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_1}{1}.$$

Sea  $s$  un número mínimo, para el cual  $a_s > s$ . Pongamos

$$M = \begin{cases} 0, & a_h = k, \\ \binom{a_{h-1}}{k} + \dots + \binom{a_s}{s+1}, & a_h > k. \end{cases}$$

Entonces,  $f_h(M) \leq m_2$ , y para  $M' > M$  tenemos  $f_h(M') > m_2$ , es decir  $f_h(m_1) \leq m_2 \Rightarrow m_1 \leq M$ . Por cuanto  $f_h(x)$  es monótona, tenemos  $f_h(m_1 + m_2) \leq f_h(M + m_2)$ . Es fácil ver que  $f_h(M + m_2) = m_2 + f_{h-1}(m_2)$ , de donde obtenemos inmediatamente

$$f_h(m_1 + m_2) \leq m_2 + f_{h-1}(m_2).$$

Caso 2.  $f_h(m_1) > m_2$ . Hagamos uso de la inducción según  $m_2$ . Cuando  $m_2 = 0$ , la afirmación es, evidentemente, cierta. Sea

$$m_2 = \binom{b_h}{k} + \dots + \binom{b_q}{q} > 0.$$

Veamos tres casos

$$(2a) \quad q \leq t + 1, \quad a_t = t, \text{ entonces } f_h(m_1 + 1) = f_h(m_1) + q - 1, \quad f_{h-1}(m_2 - 1) = f_{h-1}(m_2) - t.$$

Por inducción tenemos:

$$f_h(m_1 + m_2) \leq f_h(m_1 + 1) + f_{h-1}(m_2 - 1) = f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2) + q - t - 1 \leq f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2).$$

(2b)  $q = 1, a_t > t$ , entonces  $f_h(m_1 + 1) = f_h(m_1), f_{h-1}(m_2 - 1) = f_{h-1}(m_2)$ , y lo requerido se obtiene igual que en (2a).

(2c)  $q > t + 1$ , o bien ( $a_t > 1$  y  $q > 1$ ). Introduzcamos el concepto de representación semicanónica. Si  $a_t = t$ , o bien  $t = 1$ , entonces todo va como antes, si  $a_t > t > 1$ , entonces

$$m_2 = \binom{a_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_{t+1}}{t+1} + \binom{a_t-1}{t} + \\ + \binom{a_t-2}{t-1} + \dots + \binom{a_t-t+1}{2} + \binom{a_t-t+1}{1}.$$

Convergamos en escribir brevemente  $m_2 = \binom{c_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{c_r}{r}$ . Está claro que  $t \geq r+1$  y  $f_{h-1}(m_2) = \binom{c_{h-1}}{k-2} + \dots + \binom{c_r}{r-1}$ .

De  $f_h(m_1) > m_2$  se desprende la existencia de tal  $u$  mínimo que  $b_u > c_{u-1}$ . Pongamos

$$M_1 = \binom{b_h}{k} + \dots + \binom{b_u}{u} + \binom{c_{u-1}}{u-1} + \dots + \binom{c_r}{r}, \\ M_2 = \binom{c_{h-1}}{k-1} + \dots + \binom{c_u}{u} + \binom{b_{u-1}}{u-1} + \dots + \binom{b_q}{q}.$$

Es evidente que  $M_1 + M_2 = m_1 + m_2$ . Mostremos ahora que  $f_h(M_1) + f_{h-1}(M_2) = f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2)$ . Por cuanto  $b_u > c_{u-1}$ , la expresión para  $M_1$  es o bien canónica, o bien una representación semicanónica de  $M_1$ , por lo que  $f_h(M_1)$  puede obtenerse disminuyendo los números inferiores en la representación de  $M_1$ . Si  $c_u > b_{u-1}$ , lo mismo será válido con relación a  $M_2$  y  $f_{h-1}(M_2)$ . Por fin, la variante  $b_{u-1} \geq c_u \geq c_{u-2}$  contradice la definición de  $u$ . La desigualdad  $M_2 < m_2$  se obtiene de un modo análogo. Así pues, de las últimas desigualdades y de la suposición de inducción tenemos

$$f_h(m_1 + m_2) = f_h(M_1 + M_2) \leq f_h(M_1) + \\ + f_{h-1}(M_2) = f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2).$$

6.36.  $f_h(m)$ . Demostrémoslo por inducción según el número de vértices  $n$ . Si  $n = 1$ , esto es evidente. Supongamos que lo requerido está demostrado incluso hasta  $n-1$  y mostremos que esto es así también para  $n$ . Fijemos un vértice  $a$  y veamos la siguiente partición de nuestro  $k$ -grafo:

$$F' = \{A: a \notin A, A \subseteq_1^k F\}, \quad F'' = \{(A-a): a \in A, A \in F\}.$$

Es fácil ver que  $C_{h-1}(F) \supset C_{h-1}(F') \cup (\{a\} \cup C_{h-2}(F''))$ . Aquí  $\{a\} \cup C_{h-2}(F'') = \sum_{e \in C_{h-2}(F'')} C(a+e)$ . Por otra parte,  $C_{h-1}(F') \cap (\{a\} \cup C_{h-2}(F'')) = \emptyset$ . De aquí

$$|C_{h-1}(F)| \geq |C_{h-1}(F')| + |\{a\} \cup C_{h-2}(F'')| = \\ = |C_{h-1}(F')| + |C_{h-2}(F'')|.$$

Pongamos  $m_1 = |F'|$ ,  $m_2 = |F''|$ , entonces, de acuerdo con la inducción  $|C_{h-1}(F')| \geq f_h(m_1)$ ,  $|C_{h-2}(F'')| \geq f_{h-1}(m_2)$ , es decir,

$$|C_{h-1}(F)| \geq f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2).$$

Análogamente

$$C_{h-1}(F) \supseteq F'' \cup (\{a\} \cup C_{h-2}(F'')), \\ F' \cap (\{a\} \cup C_{h-2}(F'')) = \emptyset,$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} |C_{h-1}(F)| &\geq |F^*| + | \{a\} \cup C_{h-2}(F^*) | = \\ &= |F^*| + |C_{h-2}(F^*)| \geq m_2 + f_{h-1}(m_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo con 6.35,

$$\begin{aligned} |C_{h-1}(F)| &\geq \max \{f_h(m_1) + f_{h-1}(m_2), m_2 + \\ &+ f_{h-1}(m_2)\} = \max \{f_h(m_1), m_2\} + f_{h-1}(m_2) \geq f_h(m_1 + m_2), \end{aligned}$$

es decir,  $|C_{h-1}(F)| \geq f_h(m_1 + m_2) = f_h(m)$ . La construcción extremal se aduce en el problema 6.34. Para la  $l$ -sombra  $|C_l(F)| = f_{h,l}(m)$ , donde  $f_{h,l}(m)$  se determina a partir de la representación canónica binomial según la regla

$$f_{h,l}(m) = \binom{a_h}{l} + \dots + \binom{a_l}{l-k+1}$$

es decir,  $f_h(m) = f_{h,h-1}(m)$ .

6.37. Sea  $n$  grande y supongamos que  $F'$  es tal  $k$ -grafo con  $m$  aristas sobre  $S_n$  que  $|C_{h-1}(F')| = f_h(m_1)$ ; sea, ahora,  $F''$  tal  $k$ -grafo con  $m_2$  aristas sobre  $S_n$  que  $|C_{h-1}(F'')| = f_h(m_2)$ . Si  $n$  es grande, elijamos  $F'$  y  $F''$  de tal modo que  $C_{h-1}(F') \cap C_{h-1}(F'') = \emptyset$ , es decir,

$$\begin{aligned} |C_{h-1}(F' \cup F'')| &= |C_{h-1}(F') \cup C_{h-1}(F'')| = \\ &= |C_{h-1}(F')| + |C_{h-1}(F'')| = f_h(m_1) + f_h(m_2). \end{aligned}$$

Del problema 6.36 se sabe que  $|C_{h-1}(F' \cup F'')| \geq f_h(m_1 + m_2)$ , de suerte que lo requerido queda demostrado.

6.38.  $m = \binom{2k-1}{k} + \binom{2k-3}{k-1} + \dots + \binom{1}{1}$ . Supongamos que el grafo  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$  es tal que  $|C_{h-1}(\mathcal{A})| = f_h(m)$ . Si, en este caso,  $m > \binom{2k-1}{k} + \dots + \binom{1}{1}$ , entonces  $f_h(m) < m$ , es decir, el número de todos los  $(k-1)$ -subconjuntos es, en general, menor que lo que se necesita en  $\mathcal{B}$ . Hagamos uso del teorema de M. Hall, de acuerdo con el cual para  $\mathcal{A}$  existe un grafo requerido  $\mathcal{B}$ , si para cada subfamilia  $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\} \subset \mathcal{A}$  tenemos

$$|C_{h-1}(\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\})| \geq r.$$

Pero, según 6.36,  $|C_{h-1}(\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\})| \geq f_h(r)$ , de modo que para poder aplicar el teorema de Hall es suficiente mostrar que  $f_h(r) \geq r$ ,  $1 \leq r \leq m = \binom{2k-1}{k} + \dots + \binom{1}{1}$  [Katona G.—In: Theory of graphs, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1968, p. 187—207]. Para un  $l$ -grafo  $\mathcal{B}$  la respuesta tiene la forma

$$m = \binom{k+l}{k} + \binom{k+l-2}{k-1} + \dots + \binom{k-l}{k-l}.$$

6.39. La construcción extremal: tomemos los primeros (en el sentido de la solución del problema 6.34)  $m$  subconjuntos a título de  $F = \{A_1, \dots, A_m\}$ . De modo que, si  $m = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_r}$  ( $b_1 > b_2 > \dots > b_r \geq 0$ ), entonces el máximo buscado es igual a  $b_1 2^{b_1-1} + (b_2 + 2) 2^{b_2-1} + (b_3 + 4) 2^{b_3-1} + \dots$  [Lindsey J.H.—Amer. Math. Monthly, 1964, 71, p. 508—516; Clements G.F., Lindström B.—J. Comb. Th., 1969, 7, p. 230—238; Clements G.F.—Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 27, N° 1, p. 13—15; Ahlswede R., Katona G.—Discrete Math., 1977, 17, N° 1, p. 1—21].

6.40. La desigualdad  $n \geq p_1 + f_2(p_2 + f_3(p_3 + \dots + f_n(p_n) \dots))$  es una condición necesaria y suficiente. Necesidad.  $F_l = C^l(S_n) \cap F, B_i \cup_{S \in F} C^i(S)$ . De 6.36 tenemos  $|C_{n-1}(F_n)| \geq f_n(p_n), B_{n-1} = C_{n-1}(F_n) \cup F_{n-1}$ . Además,  $C_{n-1}(F_n) \cap F_{n-1} = \emptyset$ , por consiguiente,  $|B_{n-1}| = |C_{n-1}(F_n)| + |F_{n-1}| \geq p_{n-1} + f_n(p_n)$ ; análogamente,  $B_{n-2} = C_{n-2}(B_{n-1}) \cup F_{n-2}, C_{n-2}(B_{n-1}) \cap F_{n-2} = \emptyset$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} |B_{n-2}| &= |C_{n-2}(B_{n-1})| + |F_{n-2}| \geq \\ &\geq p_{n-2} + f_{n-1}(|B_{n-1}|) \geq p_{n-2} + f_{n-1}(p_{n-1} + f_n(p_n)). \end{aligned}$$

Al continuar estas iteraciones, llegamos a que  $n \geq |B_1| \geq p_1 + f_2(p_2 + \dots + f_n(p_n) \dots)$ .

**Suficiencia.** Construyamos un  $F$  que satisfaga nuestra desigualdad. Fijemos la numeración sobre  $\mathcal{P}(S_n)$ . Elijamos los primeros  $p_n$  subconjuntos de  $n$  elementos a título de  $F_n$ , a continuación elijamos los primeros  $p_{n-1}$  subconjuntos  $S_{n-1} \subset S_n$  que se disponen tras los elementos de  $C_{n-1}(F_n) = C_{n-1}(B_n)$ , etc. Aquí se utiliza el hecho de que si  $B_l$  se compone de los primeros  $|B_l|$  subconjuntos  $S_{l-1} \subset S_n$ , también  $C_{l-1}(B_l)$  se compone de los primeros subconjuntos  $S_{l-1} \subset S_n$ . De 6.34 se deduce que  $|B_l| = |F_l| + |C_1(B_2)| = p_1 + f_2(|B_2|) = p_1 + f_2(p_2 + f_3(|B_3|)) = \dots = p_1 + f_2(p_2 + \dots + f_n(p_n) \dots)$ ; esto quiere decir que se han usado no más de  $n$  vértices, así que la construcción es correcta.

6.41. La forma general del par extremal es

$$\begin{aligned} A &= C^\lambda(S_\lambda) C^{k-\lambda}(S_{h+l-2\lambda}), \\ B &= C^\lambda(S_\lambda) C^{l-\lambda}(S_{h+l-2\lambda}), \quad S_\lambda \cap S_{h+l-2\lambda} = \emptyset. \end{aligned}$$

Si  $\lambda = 0$ , véase el problema 6.5. Si  $\lambda = l - 1, l \leq k$ , se debe notar que la condición inicial adquiere una forma particularmente simple:  $A_i \supset B_j \Leftrightarrow i = j$ . En 1983 Füredi comprobó por completo esta hipótesis.

6.42. Basta aprovechar el método del problema 6.5.

6.43. Para la condición  $|A_i \cap B_i| = \lambda, |A_i \cap B_j| \geq \lambda, i \neq j$ , el par extremal es, supuestamente, el mismo que en el problema 6.41; sin embargo, esta cuestión queda por ahora abierta.

6.44. [Kleitman D.J. — J. Comb. Th., 1968, 5, p. 153—156].

6.45. Hagamos uso de la inducción respecto de  $n$ . Para  $n = 1$  la afirmación es trivial. Supongamos que lo requerido tiene lugar incluso hasta  $n-1$ ; demos-tremos que esto es así también para  $n$ . Fijemos un vértice  $x$  y pongamos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{(A - x) : A \in \mathcal{A}, A \ni x\}, & \mathcal{A}_2 &= \{A : A \in \mathcal{A}, A \not\ni x\}, \\ \mathcal{B}_1 &= \{(B - x) : B \in \mathcal{B}, B \ni x\}, & \mathcal{B}_2 &= \{B : B \in \mathcal{B}, B \not\ni x\}, \\ |\mathcal{A}| &= |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|, & |\mathcal{B}| &= |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2|. \end{aligned}$$

Por cuanto  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  poseen las propiedades de un ideal (véase la hipótesis de problema), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 &\Rightarrow a_1 = |\mathcal{A}_1| \leq |\mathcal{A}_2| = a_2, \\ \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 &\Rightarrow b_1 = |\mathcal{B}_1| \geq |\mathcal{B}_2| = b_2. \end{aligned}$$

Estas familias se disponen sobre el  $(n-1)$ -conjunto de vértices y son, por sí mismas, ideales; por consiguiente, de acuerdo con la suposición de inducción

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1| &< a_1 b_1 / 2^{n-1}, \\ |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2| &< a_2 b_2 / 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Así pues, aprovechando las desigualdades obtenidas más arriba, tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| &= |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1| + |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2| \leq \\ &\leq \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2^{n-1}} = \frac{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2}{2^n} \leq \\ &\leq \frac{a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2}{2^n} = \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{2^n} = \frac{|\mathcal{A}| |\mathcal{B}|}{2^n}. \end{aligned}$$

La última desigualdad en esta cadena se obtiene del modo siguiente:  $a_1 \leq a_2$ ,  $b_1 \geq b_2 \Rightarrow (a_2 - a_1)(b_1 - b_2) \geq 0 \Rightarrow a_1 b_2 + b_1 a_2 - a_1 b_1 - a_2 b_2 \geq 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \leq a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$ .

6.46. b) Si se tienen  $n-k$   $l$ -aristas, entonces, al haber eliminado un vértice en cada arista (y las aristas que contienen dichos vértices), obtenemos por lo menos  $k$  vértices aislados, razón por la cual  $T(n, k, l) \geq n - k + 1$ . De construcción extremal en el dominio  $n \leq l(k-1)/(l-1)$  pueden servir  $(n - k + 1)$   $l$ -aristas que no se intersecan.

c)  $T(n, n-1, l) = \lfloor n/(n-l) \rfloor$ , efectivamente, en este caso a todo vértice ha de corresponder una  $l$ -arista  $S_l$  que no lo contiene o, en otras palabras, un  $(n-1)$ -subconjunto  $S_n - S_l$  que lo cubre. Está claro que el número mínimo posible de  $(n-l)$ -subconjuntos  $S_n$  que cubren todos los vértices es igual a  $\lfloor n/(n-l) \rfloor$ . En lo que se refiere a los números de Turán, se conoce lo siguiente:

$$T(n, n-2, n-3) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \frac{n-1}{2} \left[ \left[ \left[ \text{Fort, Hedland} \right] \right] \right]$$

$$T(n, k, l) \geq \left\lfloor \frac{n}{n-l} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{n-l-1} \right\rfloor \dots \left\lfloor \frac{k+1}{k-l+1} \right\rfloor \left[ \dots \left[ \left[ \text{Shencheim} \right] \right] \right]$$

Con motivo del compartamiento asintótico de los números de Turán véase [Kuzurin N.N. — Notas matemáticas, 1979, 26, N° 4, p. 603—612, en ruso]. De base de la construcción suficiente servía la llamada «construcción de bloques»; si  $l = \lfloor (k-1)/(l-1) \rfloor$ , la construcción representa un sistema de  $l$ -grafos completos e iguales en la medida de lo posible. En particular, existe una hipótesis de Turán que afirma que tal construcción es extremal en toda una serie de casos, a saber,  $T(2n, 5, 3) = 2 \binom{n}{3}$ .

Otro tipo de construcciones representan «torceduras», así, por ejemplo, para  $l=3, k=4$ , tal construcción tiene por expresión

$$\begin{aligned} C^3(A) + C^3(B) + C^3(C) + C^1(A)C^2(B) + \\ + C^1(B)C^2(C) + C^1(C)C^2(A), \end{aligned}$$

donde  $A + B + C = S_n$  (y son equipotentes en la medida de lo posible). Hay también una hipótesis de que esta construcción es extremal cuando  $l=3, k=4$ .

Existen, sin embargo, construcciones diferentes en principio que están relacionadas con

- 1) las características topológicas de los grafos,
- 2) las características aritméticas de los parámetros. [H. Ringel, A.F. Sidorenko.]

d) Designemos el máximo buscado por  $P(n, k, l)$ ; se conoce lo siguiente:  $P(n, n, l) = 1$ ,  $P(n, k, l) = 1$  ( $k \geq 2l$ ),  $P(n, l, l) = \binom{n}{l}$ ,  $P(n, 2l-1, l) = \left\lfloor \frac{n}{l} \right\rfloor$ ,  $P(n, n-1, l) = \left\lfloor \frac{n}{n-l} \right\rfloor$ . Además, se sabe también el siguiente resultado:

$$P(n, 4, 3) = \begin{cases} \lfloor n/3 \rfloor \lfloor (n-1)/2 \rfloor, & n \equiv 5 \pmod{6} \\ \lfloor n/3 \rfloor \lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1, & n \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

[Spencer J. — J. Comb. Th., 1968, 5, p. 1–8]. Se verifica también la siguiente fórmula recurrente:  $P(n, k, l) = P(n, n - 2l + k, n - l)$ ,  $k \leq 2l$ . Examinemos esta recurrencia con un ejemplo:

$$\begin{aligned} P(n, n-2, n-3) &= \text{máx} \# S_{n-3}: \forall S_{n-2} \exists \exists_{\leq 1} S_{n-3} \subset S_{n-2} = \\ &= \text{máx} \# S_3: \forall S_2 \exists \exists_{\leq 1} S_3 \supset S_2 = \\ &= \text{máx} \# S_3: \forall S_3^{(1)}, S_3^{(2)} | S_3^{(1)} \cap S_3^{(2)} | \leq 1 = \\ &= \text{máx} \# S_3: \forall S_4 \exists \exists_{\leq 1} S_3 \subset S_4 = P(n, 4, 3). \end{aligned}$$

§.47. Designemos el número mínimo de aristas en tal  $l$ -grafo por  $m(n, k, l, r)$  y el número máximo de vértices, por  $n(k, l, r)$ . Entonces

$$n(k, l, r) = k + l - r. \quad (6.1')$$

En efecto, si  $n \geq k + l - r + 1$ , tendremos obviamente

$$\forall S_l \subseteq S_n \exists S_k \subseteq S_n: \forall S_l' \subseteq S_k | S_l \cap S_l' | < r;$$

si, en cambio,  $n \leq k + l - r$ , entonces  $C^l(S_{n-k+l}) C^0(S_n - S_{n-k+l}) \sim TD$  y, por consiguiente,

$$m(n, k, l, r) \leq \binom{n-k+l}{l}.$$

Supongamos que  $T(n, k, l) = \min_{G_n^l \sim T} |G_n^l|$ , en este caso

$$\binom{n}{l} \left\{ \binom{k}{l} \right\} \leq T(n, k, l) \leq m(n, k, l, r),$$

y, para  $k \leq n \leq 2l - r$  tendremos la igualdad  $m(n, k, l, r) = T(n, k, l)$  puesto que en este campo todo  $l$ -grafo posee la propiedad  $D$ .

Es evidente también la monotonía respecto de  $r$ :

$$m(n, k, l, r) \leq m(n, k, l, r + 1).$$

Supongamos que  $2r \geq l + 1$ , entonces

$$m(k+l-r, k, l, r) = \binom{2l-r}{l}. \quad (6.2')$$

**Demostración.** Observemos que la condición  $G_n^l \sim T$  es equivalente a que

$$\forall S_{n-h} \subseteq S_n, \quad v(S_{n-h}, 0; G_n^l) \geq 1.$$

La demostración se realiza por construcción sucesiva de las construcciones necesarias  $G_{(b)}^l \subseteq G_{(1)}^l \subseteq G_{(2)}^l \subseteq \tilde{G}^l$ , es decir, de aquellos  $l$ -grafos  $G_{(i)}^l$  los cuales se contienen necesariamente en toda construcción suficiente  $\tilde{G}^l$ ; a partir de este hecho se deduce que la construcción  $\hat{G}^l = C^l(S_{2l-r}) C^0(S_n - S_{2l-r})$  es extremal.

a) Supongamos que  $n = k + l - r$ , y que  $\tilde{G}^l \sim TD$ , entonces  $\exists e_1, e_2 \in \tilde{G}^l: |e_1 \cap e_2| = r$ . En efecto, si  $\forall e_1, e_2 \in \tilde{G}^l, |e_1 \cap e_2| \geq r + 1$ , entonces

$\tilde{G}^l \sim T$  y  $\tilde{G}^l$  representa un  $l$ -grafo  $(r+l)$ -inseparable de dos en dos, mas esto contradice la condición (6.1'). Para  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \tilde{G}^l$ , donde  $|\tilde{e}_1 \cap \tilde{e}_2| = r$ , pongamos

$$S = \tilde{e}_1 \cup \tilde{e}_2, \quad |S| = 2l - r, \quad \beta = \tilde{e}_1 \cap \tilde{e}_2, \\ |\beta| = r, \quad \alpha = \tilde{e}_1 - \beta, \quad \mu = \tilde{e}_2 - \beta, \quad |\alpha| = |\mu| = l - r.$$

Así pues, se ha obtenido la primera inclusión  $\tilde{G}^l \supseteq C(\tilde{e}_1) + C(\tilde{e}_2) = G_{(b)}^l$ . Está claro que siempre  $G_{(b)}^l \not\supseteq TD$ .

b) supongamos primero que  $S_{l-r} \subseteq \beta$  (esto es siempre factible, puesto que la condición  $2r \geq l+1$  lleva consigo la desigualdad  $r \geq l-r$ ), entonces, por ser suficiente  $\tilde{G}^l$ ,

$$\exists e \in \tilde{G}^l: e \cap S_{l-r} = \emptyset, \quad |e \cap \tilde{e}_i| \geq r, \quad i=1, 2,$$

y lo último conduce inmediatamente a que  $e = S - S_{l-r}$ , por lo que tenemos la inclusión

$$\tilde{G}^l \supseteq G_{(0)}^l + \sum_{S_{l-r} \subseteq \beta} C(S - S_{l-r}) = G_{(1)}^l.$$

Demos a conocer algunas propiedades de esta  $G_{(1)}^l$ .

(b.1) Está claro que  $G_{(1)}^l = G_{(b)}^l + C(\alpha) C^{2r-l}(\beta) C(\gamma)$ , de modo que para  $r = l-1$  tenemos  $G_{(1)}^l = C^l(S)$  y, por lo tanto, para este caso el teorema queda ya demostrado, mientras que para  $r < l-1$  es obvio que  $G_{(1)}^l \not\supseteq TD$ .

(b.2) Sea  $G_{(1)}^{l-r+1} = \bigcup_{S_i \in G_{(1)}^l} C^{l-r+1}(S_i)$ , entonces

$$G_{(1)}^{l-r+1} = C^{l-r+1}(S) - \sum_{S_{l-r+1} \subseteq S} C(S_{l-r+1}) \chi(|S_{l-r+1} \cap \beta| \geq 2r-l+1).$$

Efectivamente, si  $S_{l-r+1} \subseteq \tilde{e}_1$  o  $S_{l-r+1} \subseteq \tilde{e}_2$ , entonces, obviamente,  $S_{l-r+1} \in G_{(1)}^{l-r+1}$ ; en cambio, si  $S_{l-r+1} \subseteq S$ :  $|S_{l-r+1} \cap \alpha| \neq 0 \neq |S_{l-r+1} \cap \mu|$ ,  $|S_{l-r+1} \cap \beta| \leq 2r-l$ , entonces  $\exists e \in G_{(1)}^l - G_{(0)}^l$ :  $S_{l-r+1} \subseteq e$  y si, por fin,  $S_{l-r+1} \subseteq S$ :  $|S_{l-r+1} \cap \alpha| \neq 0 \neq |S_{l-r+1} \cap \mu|$ ,  $|S_{l-r+1} \cap \beta| \geq 2r-l+1$ , entonces es evidente que en  $G_{(1)}^l$  no hay aristas que contengan tal  $S_{l-r+1}$ ; la última variante no es, sin embargo, factible cuando  $l-r-1 \leq 2r-l$ , lo que significa:

Si  $3r \geq 2l-1$ , tenemos

$$G_{(1)}^{l-r+1} = C^{l-r+1}(S). \quad (6.3')$$

(b.3) Si  $3r \geq 2l-1$ , entonces (6.2') tiene lugar. Sea  $S_{l-r} \subseteq S$ ,  $S_{l-r} \not\subseteq \alpha, \beta, \mu$ , entonces

$$\exists \tilde{e} \in \tilde{G}^l: S_{l-r} \cap \tilde{e} = \emptyset \quad \forall e \in G_{(1)}^l \quad |\tilde{e} \cap e| \geq r.$$

Mostremos que en este caso también  $\tilde{e} = S - S_{l-r}$ , para lo que resulta suficiente demostrar que

$$\forall S_l \subseteq S_n: |S_l \cap S| = l-1 \quad \exists e \in G_{(1)}^l: |S_l \cap e| < r.$$

Supongamos que  $S_l \subseteq S_n$ ,  $|S_l \cap S| = l-1$ ,  $S_{l-r+1} = S \setminus S_l$ , mas en tal caso, de acuerdo con (6.3'), tenemos

$$\forall S_{l-r+1} \subseteq S \quad \exists e \in G_{(1)}^l: S_{l-r+1} \subseteq e.$$

Por consiguiente, para tal  $e$  se tiene  $|S_l \cap e| = |(S - S_{l-r+1}) \cap e| = r - 1$ , lo que quiere decir que en el campo  $3r \geq 2l - 1$  es válida la inclusión  $\tilde{G}^l \supseteq \hat{G}^l$ .

Para demostrar (6.2'), en todo el campo  $2r \geq l + 1$  aumentamos una vez más el subgrafo necesario.

c) En el campo  $2r \geq l + 1$ ,  $3r < 2l - 1$  de nuestra fórmula para  $G_{(1)}^{l-r+1}$  en (b.2) se deduce la inclusión

$$\tilde{G}^l \supseteq G_{(1)}^l - G_{(0)}^l + \sum_{\substack{S_{l-r} \subseteq S, \\ |S_{l-r} \cap \beta| \leq 2r - l - 1}} C(S - S_{l-r}) = G_{(2)}^l,$$

para cuyo segundo miembro se verifica la igualdad

$$G_{(2)}^{l-r+1} = \bigcup_{S_i \in G_{(2)}^l} G^{l-r+1}(S_i) = G^{l-r+1}(S),$$

de la cual a su vez, por analogía con (b.3), se deduce que  $\tilde{G}^l \supseteq \hat{G}^l$ , de modo que (6.2') queda demostrada.

En particular, esto lleva a que

$$m(n, k, l, l-1) = \binom{n-k+l}{l}.$$

Aquí, o bien  $n = k$ , y en este caso la citada igualdad se verifica con toda evidencia, o bien  $n = k + 1$ , mas en este caso es aplicable (b.3), puesto que la desigualdad  $3r \geq 2l - 1$  lleva consigo  $3(l-1) \geq 2l - 1$ , o bien  $l \geq 2$ .

Se sabe, además, que si  $n = k + 1$ ,  $2k \leq l \leq 2(k + 1/2)/3$ , entonces  $m(k + 1, k, l, r) = 3$ ; en cambio, si  $l > 2(k + 1/2)/3$ ,  $r \leq \max\{(k + 5)/3, 2l - k + 1\}$ , entonces

$$m(k + 1, k, l, r) = \lfloor (k + 1)/(k - l + 1) \rfloor;$$

esta igualdad se deduce de que la última restricción impuesta en  $r$  lleva consigo la desigualdad  $k + 1 \leq 2l - r$  que condiciona el cumplimiento de  $m = T$ . En particular, si  $r = 1, 2, \dots, 5$ ,  $l \geq 2r$ , entonces

$$m(k + 1, k, l, r) = \max\{3, \lfloor (k + 1)/(k - l + 1) \rfloor\}.$$

Sea  $l = 2r(n - k)$ ,  $l(l + r - 1) < 2rk$ , entonces  $m(n, k, l, r) = 2(n - k) + 1$ .

**Demostración.** Si  $n = r \binom{l/r+1}{2}$ , la construcción extremal tendrá por expresión

$$\sum_{a \in S_{2(n-k)+1}} C(rC(a)C^1(S_{2(n-k)+1} - a)),$$

es decir, representa un  $l$ -grafo de  $n$  vértices, dual (conjugado) respecto del multigrafo  $r l^2 (S_{2(n-k)+1})$ ; en cambio, si  $n > r \binom{l/r+1}{2}$ , entonces se deben añadir a la construcción  $n - r \binom{l/r+1}{2}$  vértices aislados. La suficiencia de la construcción es evidente y su existencia se deduce de las condiciones. Mostremos que es extremal.

(a) Si  $G_n^l \sim TD$  y  $|G_n^l| \leq 2(n - k)$ , entonces  $G_n^l$  no contiene vértices cuyo grado sea inferior a 3, puesto que, al suprimir tal vértice (junto con todas las aristas que lo contengan), obtendríamos un  $l$ -grafo con un número de aristas no superior a  $2(n - k) - 3$ , cada par de las cuales tendría una intersección no vacía, por consiguiente, al tachar los vértices en estas intersecciones, eliminamos en el transcurso de los  $n - k - 1$  pasos restantes, por lo menos  $2(n - k - 1) >$



$> 2(n-k) - 3$  aristas, lo que contradice la condición de que  $G_n^l$  es un grafo de Turán.

(b) Si  $G_n^l \sim TD$  y  $|G_n^l| \leq 2(n-k)$ , con la particularidad de que todos los grados de  $G_n^l$  no sobrepasan de 2, entonces, al suprimir sucesivamente  $(n-k)$  vértices en las intersecciones de las aristas de  $G_n^l$ , llegamos otra vez a la contradicción con el carácter turaniano de (T), puesto que suprimimos a ciencia cierta todas las aristas del grafo  $G_n^l$ .

6.48. Si  $p \leq (q-1)k/(k-1)$ , entonces  $\min |G_n^h| = \binom{n-p+q}{k}$ ; la construcción extremal es  $C^k(S_{n-p+q})$ , donde  $S_{n-p+q} \subset S_n$ . Si  $n \leq (p-1)q/(q-1)$  y  $2k \geq q+1$ , entonces  $\min |G_n^h| = (n-p+1) \binom{q}{k}$ , mientras que la construcción extremal representa  $n-p+1$   $k$ -grafos completos  $C^k(S_q)$  que se intersecan [Stechkin B.S., Frankl P. — MIAN, RPH, N° 20, Budapest, 1977].

6.49. [Erdős P. — In: Combinatorial Theory and its Appl. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai. Budapest: 1970, N° 4, p. 311–315]. Szemerédi mostró que si  $G_{2n+2}^2 \subset C^2(S_{2n+2})$ :  $\forall S_{2n-1} \subset S_{2n+2} \exists S_n \subset S_{2n-1}$ :  $C^2(S_n) \subset G_{2n+2}^2$ , entonces necesariamente  $\exists S_{n+1} \subset S_{2n+2}$ :  $C^2(S_{n+1}) \subset G_{2n+2}^2$ .

6.50. Si el máximo buscado lo designamos con  $m(n)$ , entonces  $m(n) \sim \sqrt{2n}$ . Los números  $|e_i \cap e_j|$  son todos diferentes y sus valores posibles son los números  $0, 1, \dots, n-1$ ; esto quiere decir que  $\binom{m}{2} \leq n$ , de donde  $m(n) \leq [(1 + \sqrt{8n+1})/2]$ . La construcción tiene por expresión (en términos de las matrices de incidencia):

$$n \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \underbrace{1 \ 1}_2 & \underbrace{1 \ 1 \ 1}_3 & \dots & \underbrace{1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1}_{n-1} & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right\} n-1$$

[Pach J. 1 Ars Comb. 1980, 9, p. 47–49].

6.51. Supongamos que  $m(n, l)$  denota el máximo buscado. De 6.50 está claro que si  $n \geq 2l$ , entonces

$$m(n, l) \leq [(1 + \sqrt{8l+1})/2]$$

y  $m(n, l) = m(n, n-l)$ ; por eso siempre en adelante  $n \geq 2l$ . Observemos que  $m(6, 3) = 3$ , este valor se realiza por el 3-grafo de la forma  $\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_4, a_5, a_6\}\}$ .

Sea  $\binom{k}{2} \leq l < \binom{k+1}{2}$  para  $k \geq 3$  y supongamos que

$$n \geq \frac{1}{6}(k-1)(k^2+k+6) + l - \binom{k}{2},$$

entonces  $m(n, l) = [(1 + \sqrt{8l+1})/2] = k$ . Demostremos que para  $k \geq 3$

$$m((k-1)(k^2+k+6)/6, (k/2)) = k, \quad (6.4')$$

con la particularidad de que existe siempre una construcción extremal  $G \sim \mathcal{A}$ , en la cual

$$\exists S_{k-1} : \{ |S_{k-1} \cap e_i| \}_{e_i \in G} = \{0, 1, \dots, k-1\}. \quad (6.5')$$

Realicemos la inducción respecto de  $k \geq 3$ . Para  $k = 3$  la validez de (6.4'), (6.5') se desprende de la forma del 3-grafo aducido anteriormente; supongamos que lo requerido se cumple hasta  $k-1$ ; demostremos entonces, que esto es así también para  $k$ . Pongamos  $n_1 = (k-2)(k^2 - k + 6)/6$ ,  $n_2 = (k-1)(k^2 + k + 6)/6$ . Es obvio que

$$n_2 - n_1 = (k/2) + 1. \quad (6.6')$$

Por la suposición de inducción existe tal  $\binom{k-1}{2}$ -grafo extremal  $G_{n_1} \subset C\binom{h-1}{2}(S_{n_1})$  que  $|G_{n_1}| = k-1$ , y

$$\exists S_{h-2} \subset S_{n_1} : \{ |S_{h-2} \cap e| \}_{e \in G_{n_1}} = \{0, 1, \dots, k-2\}.$$

Elijamos y fijemos uno de tales conjuntos  $S_{h-2}$ . Sea, ahora,  $S_{n_2} \supset S_{n_1}$  y supongamos que  $S_{h-1} + S\binom{h}{2}_{-h+2} = S_{n_2} - S_{n_1}$ , lo que siempre es realizable en virtud de (6.6').

Construyamos un  $\binom{k}{2}$ -grafo  $G_{n_2} \subset C\binom{h}{2}(S_{n_2})$ , rigiéndonos por la regla

$$G_{n_2} = \{S_{h-1} + e\}_{e \in G_{n_1}} + \{S_{h-2} + S\binom{h}{2}_{-h+2}\};$$

es evidente que  $|G_{n_2}| = k$  y  $G_{n_2} \sim A$ , por consiguiente este  $\binom{k}{2}$ -grafo es extremal.

Nos resta demostrar si es realizable la propiedad (6.5') en este  $\binom{k}{2}$ -grafo  $G_{n_2}$ . Con este fin elijamos en el conjunto  $S\binom{h}{2}_{-h+2}$  un elemento arbitrario  $a$  y pongamos  $S_{h-1} = S_{h-2} + \{a\}$ . Para tal  $S_{h-1}$  la propiedad (6.5') en el  $\binom{k}{2}$ -grafo  $G_{n_2}$  se cumple con toda evidencia

Sea ahora  $\binom{k}{2} < l < \binom{k+1}{2}$ ; examinemos el  $\binom{k}{2}$ -grafo extremal  $G_{n_2}$  con  $k$  aristas, tomemos un conjunto de  $l - \binom{k}{2}$  vértices  $S_{l-\binom{h}{2}} : S_{l-\binom{h}{2}} \cap \cap S_{n_2} = \emptyset$  y formemos un grafo nuevo sobre  $n_3 = n_2 + l - \binom{k}{2}$  vértices según la regla

$$G_{n_3} = \{S_{l-\binom{h}{2}} + e\}_{e \in G_{n_2}}.$$

El citado  $l$ -grafo es, obviamente, una construcción suficiente y contiene el mismo número de aristas que el  $\binom{k}{2}$ -grafo  $G_{n_2}$ , es decir,  $k$  aristas; esto nos conduce a lo requerido, si tomamos en consideración la estimación superior.

6.52. El vector  $v_i = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  se define según la regla

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in e_i \\ 0, & j \notin e_i \end{cases}, \text{ donde } e_1, \dots, e_m \text{ son aristas de } G_n^h.$$

Demostremos que  $v_1, \dots, v_m$  son los vectores independientes (en este caso  $m \leq n$ ). Sea  $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0$ . Al multiplicar por  $v_i$ , obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \lambda_i + k\lambda_j = 0.$$

Si el determinante de este sistema es distinto de cero, entonces tiene solamente solución trivial, es decir,  $v_1, \dots, v_m$  son independientes. En efecto,

$$\begin{vmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & k \end{vmatrix} = (n-1+k)(k-1)^{n-1} \neq 0 \text{ para } k \geq 2.$$

La estimación  $m \leq n$  no siempre se realiza, por ejemplo, si  $k = 2$ ,  $n > 3$ , entonces el máximo  $m = n - 1$ . Cuando  $k \geq 3$ , la frontera se alcanza a menudo por las geometrías finitas, por ejemplo, para  $k = 3$ ,  $n = 7$ , por el plano de Fano.

6.53. Si designamos por  $\tilde{D}(n)$  el volumen del sistema de conjuntos determinante mínimo en  $S_n$ , entonces  $\tilde{D}(n) = n$ .

La necesidad de distinguir un subconjunto vacío y  $n$  subconjuntos de un solo elemento, cuyas sucesiones  $A_F$  no pueden contener números superiores a 1, da la estimación  $\tilde{D}(n) \geq n$ , la cual se realiza por una cadena de  $n$  elementos

$$C(S_n) = \sum_{i=1}^n C\left(\sum_{j=1}^i C(a_j)\right),$$

La suficiencia de esta construcción es obvia para  $\{T_1\} \neq \{T_2\}$ : si  $T_1 = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$  ( $i_1 < \dots < i_l$ );  $T_2 = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_l}\}$  ( $j_1 < \dots < j_l$ ), entonces de la igualdad del número de ceros en  $A_F(T_1)$  y  $A_F(T_2)$  se deduce que  $i_1 = j_1$ ; de la igualdad del número de unidades en las mencionadas sucesiones se deduce que  $i_2 = j_2$ , etc., es decir,  $T_1 = T_2$ ; dicho de otro modo, está demostrada la suficiencia de  $C(S_n)$ .

6.54. Sea  $G$  un sistema de conjuntos determinante en  $S_n$ . Para  $T \subseteq S_n$  pongamos  $D_G(T) = \{|T \cap e|\}_{e \in G}$  y llamemos tal totalidad de números *espectro*. Introduzcamos una notación convencional  $D_G(T) = 0^{\alpha_0}, 1^{\alpha_1}, \dots, n^{\alpha_n}$  que significa que

$$D_G(T) = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{\alpha_0}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{\{n, \dots, n\}}_{\alpha_n}$$

Está claro que si  $a \in S_n$ , entonces  $D_G(a) = 1^{\deg_G(a)}, 0^{|G| - \deg_G(a)}$ , por consiguiente, si  $G$  es un hipergrafo determinante, los grados de todos los vértices suyos serán positivos y diferentes, razón por la cual  $m(n) \geq n$ .

Pasemos a la demostración de la unicidad de la construcción extremal, para lo cual mostremos que si  $\tilde{G}$  es extremal,  $|\tilde{G}| = n$ , con la particularidad de que  $\deg_{\tilde{G}}(a_i) = i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), entonces necesariamente  $\tilde{G} = C(S_n)$  (véase el problema 6.53). Supongamos lo contrario:

$$\begin{aligned} & (a_{h_1}, \dots, a_n) \notin \tilde{G} \cong \{(a_1, \dots, a_n), \\ & (a_2, \dots, a_n), \dots, (a_{h-1}, \dots, a_n)\}, \end{aligned}$$

y examinemos la única arista  $e \in \tilde{G}$  que contiene el vértice  $a_h$  y es diferente de las aristas  $(a_1, \dots, a_n), \dots, (a_{h-1}, \dots, a_n)$ . Mostremos que necesariamente  $e = (a_h, \dots, a_n)$ . En el caso contrario esto será equivalente a que  $\exists a_i$  ( $k+1 \leq i \leq n$ ):  $a_i \notin e$ . Indiquemos inmediatamente que  $a_i \neq a_n$ , puesto que  $a_n$  figura en todas las aristas; esto significa que si  $k \geq n-1$ , entonces lo requerido queda demostrado y esto nos conduce, en particular, al mismo teorema para  $n \leq 3$ . Así pues, sea

$$\exists a_i (k+1 \leq i \leq n-1) : a_i \notin e.$$

Analicemos dos subconjuntos

$$T_1 = (a_h, a_i), \quad T = \begin{cases} (a_{h-1}, a_{i+1}), & k \geq 2 \\ (a_{i+1}), & k=1. \end{cases}$$

Ambos conjuntos mencionados tienen un mismo espectro

$$D_{\tilde{G}}(T_1) = D_{\tilde{G}}(T_2) = 2h-1, \quad 1^{i-k+2},$$

lo que contradice el carácter determinante de  $\tilde{G}$  [A.V. Kóstochka, B.S. Stechkin].

6.55. La matriz de incidencia de tal hipergrafo tiene por expresión

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

6.56—6.58. Si  $\chi\{\cdot\}$  es una función indicadora de un suceso encerrado entre llaves, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{S \in F} \nu(S, q; G) &= \sum_{S \in F} \sum_{e \in G} \chi\{|e \cap S| = q\} = \\ &= \sum_{e \in G} \sum_{S \in F} \chi\{|e \cap S| = q\} = \sum_{e \in G} \nu(e, q; F). \end{aligned}$$

Está claro que si  $S_p \subset S_n$ , entonces para  $G_n^l \subset C^l(S_n)$  tenemos  $\nu(S_p, q; G_n^l) = \binom{p}{q} \binom{n-p}{l-q}$ . Además,  $\nu(S, q; G+F) = \nu(S, p, G) + \nu(S, q, F)$ , de donde se deduce inmediatamente 6.57. b) y c). Si, en cambio,  $S \not\subset S_n$ , obtenemos de una vez 6.57. d). Para demostrar 6.58, basta examinar a título de  $G$  el  $l$ -grafo completo. [Stechkin B.S. — Notas matemáticas, 1975, 7, N° 3, 433—442, en ruso].

6.59. De 6.57, b) encontramos inmediatamente

$$\mathcal{M}(\nu(S_p, q; G)) = \sum_{i \geq q} \frac{\binom{i}{q} \binom{n-i}{p-q}}{\binom{n}{p}} \nu(S_n; i; G).$$

6.60.  $\binom{p}{k-l} \binom{r}{l}$ ; la construcción extremal es  $Fh = C^{h-l}(S_p) C^l(S_r)$ , donde  $S_r \subset S_{n-p}$ .

Está claro que si  $G_n^h$  posee la propiedad dada, entonces  $G^h \subset C^{h-1}(S_p)C^1(S_{n-p})$ , por eso, si  $S_{h-l} \subseteq S_p$ , entonces, de acuerdo con 6.57,

$$|G^h| = \sum_{S_{h-l} \subset S_p} v(S_p, S_{h-l}; G^h) = v(S_p, k-l; G^h),$$

donde  $v(S_p, S_{h-l}; G^h) = |\{e \in G^h : S_p \cap e = S_{h-l}\}|$ . Si  $G^h$  posee la propiedad dada, entonces  $v(S_p, S_{h-l}; G^h) \geq \binom{r}{l}$ , de donde obtenemos seguidamente

$$|G^h| = \sum_{S_{h-l} \subset S_p} v(S_p, S_{h-l}; G^h) \geq \binom{p}{k-l} \binom{r}{l}.$$

6.61. De acuerdo con el problema 6.57,

$$\sum_{S_{n-1} \subset S_n} v(S_{n-1}, l; G^l) = (n-l) |G^l|. \quad (6.7')$$

Sea  $G^l \sim \mathcal{A}$ , entonces, según (6.1),

$$\forall S_{n-1} \subseteq S_n \quad v(S_{n-1}, l; G^l) \leq m(n-1, l; \mathcal{A})$$

y, por lo tanto, si  $G^l$  es una construcción extremal, entonces de (6.7') obtenemos la desigualdad

$$m(n, l; \mathcal{A}) \leq \left[ \frac{nm(n-1, l; \mathcal{A})}{n-l} \right].$$

Demostremos lo requerido por inducción respecto de  $n \geq n_0$ . Para  $n = n_0$  esto tiene lugar en virtud de (6.2). Supongamos que la afirmación es válida siempre incluso hasta  $n-1$ . Mostremos que también es válida para  $n > n_0$ . Según la suposición de inducción tenemos

$$f(n) \leq m(n, l; \mathcal{A}) \leq \left[ \frac{nm(n-1, l; \mathcal{A})}{n-l} \right] \stackrel{\text{Ind}}{=} \left[ \frac{f(n-1)n}{n-l} \right] \leq f(n). \quad (6.8')$$

Como ejemplo de función que satisface las condiciones de este problema puede servir  $f(n) = \lfloor n^2/4 \rfloor$  (véase el problema 6.1) [Stechkin B.S. — J. Comb. Th. (A), 1980, 29, N° 3, p. 368—369].

6.62. De acuerdo con 6.58 tenemos la identidad

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \deg_{\mathcal{G}}(S) = \sum_{G \in \mathcal{G}} |G \cap F|, \quad (6.9')$$

de modo que si  $|G \cap F| \leq 1$ , se obtiene lo requerido.

Esta desigualdad admite el siguiente principio general de aplicación. Supongamos que se resuelve un problema general de maximización de  $|F|$  para  $F \subset \mathcal{P}(S_n) : \neg \exists A_i, A_j A_i R A_j$ , donde  $R$  es una relación binaria sobre  $\mathcal{P}(S_n)$  prefijada de antemano. Supongamos que los hipergrafos  $G$  son de tales que  $\forall B_1, B_2 \in G \quad B_1 R B_2$ , y a título de  $\mathcal{G}$  se toman todos los  $G$  tales que  $\cup G = \mathcal{P}(S_n)$ , entonces, evidentemente,  $|F \cap G| \leq 1$ , y queda aplicable la desigualdad según la cual obtenemos estimaciones superiores para  $|F|$ . Por ejemplo, examinemos el problema 6.2. A título de  $G$  se toma la cadena máxima desde  $\{\emptyset\}$  hasta  $S_n$ , y a título de  $\mathcal{G}$ , el conjunto de todas las cadenas de este tipo, entonces, si  $F$  es una anticadena, tenemos  $|G \cap F| \leq 1$ . Está claro que  $\deg_{\mathcal{G}}(S) = |S| \times$

$\times (n - |S|)!$ ,  $|S| = n!$ , entonces, de acuerdo con nuestra desigualdad,  $\sum_{S \in F} |S|! (n - |S|)! (n!)^{-1} \leq 1$ . Por consiguiente,

$$\frac{|F|}{\binom{n}{[n/2]}} = \sum_{S \in F} \frac{1}{\binom{n}{[n/2]}} \leq \sum_{S \in F} \frac{1}{(n/|S|)} \leq 1, \quad (6.40')$$

lo que nos lleva a que  $|F| \leq \binom{n}{[n/2]}$ .

6.63. Si  $\mathcal{A}$  es una anticadena, entonces, según el problema antecedente,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{f(|A|) \binom{n}{|A|}}{\binom{n}{|A|}} \leq f(r) \binom{n}{r} \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{(n/|A|)} \leq f(r) \binom{n}{r},$$

donde

$$f(r) \binom{n}{r} = \max_i f(i) \binom{n}{i}.$$

De este modo,  $\sum_{A \in \mathcal{A}} f(|A|) \leq f(r) \binom{n}{r}$ , la estimación se alcanza por el  $r$ -grafo completo.

6.64.  $\binom{n-1}{[n/2]-1}$ ; la construcción extremal es  $C'(a) C^{[n/2]-1}(S_{n-a})$ . La demostración se desprende de la afirmación del problema 6.65. Por cuanto  $|A_i| \leq [n/2]$ , tenemos  $\binom{n-1}{|A_i|-1} \leq \binom{n-1}{[n/2]-1}$  de donde y de 6.65 llegamos a que  $m \binom{n-1}{[n/2]-1}^{-1} \leq 1$  [Bollobas B.—J. Colomb. Th. (A), 1973, 15, p. 363—366].

6.65. Hagamos uso del método aplicado en el problema 6.29. Fijemos la numeración cíclica de los vértices  $\varphi$ . Sea  $\mathcal{A}(\varphi)$  una totalidad de aquellos  $A_i$  que tienen elementos sucesivos en  $\varphi$ .

Mostremos que si  $A_i \in \mathcal{A}(\varphi)$ , el número de  $j$ , para los cuales  $A_j \in \mathcal{A}$ , no sobrepasa de  $|A_i|$ . En efecto, para cada  $A_j \in \mathcal{A}(\varphi)$  tenemos  $A_j \cap A_i \neq \emptyset$ , con la particularidad de que  $A_i \neq A_i \cap A_j \neq A_j$ , puesto que  $A_i \not\supset A_j \not\subset A_i$ . Esto quiere decir que  $A_i \cup A_j$  es el conjunto de los primeros o últimos elementos, es decir, para  $A_i$  se tienen a lo sumo  $2(|A_i| - 1)$  posibilidades para las intersecciones  $A_i \cap A_j$ . Si  $j \neq k$ , entonces  $A_i \cap A_j \neq A_i \cap A_k$  y  $A_i \cap A_j + A_i \cap A_k \neq A_j$ , puesto que  $|A_j|, |A_k| \leq n/2$ , por consiguiente, en  $A_i$  se contienen o bien  $A_i \cap A_j$ , o bien  $A_i \cap A_k$ , es decir, no más de la mitad de todas las intersecciones posibles, a saber,  $2(|A_i| - 1) = |A_i| - 1$ , lo que nos da, junto con la propia  $A_i$ ,  $|A_i|$ .

Definamos ahora la función  $f$  según la regla

$$f(\varphi, A_i) = \begin{cases} 1/|A_i|, & \text{si } A_i \in \mathcal{A}(\varphi), \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Calculemos  $f = \sum_{\varphi} \sum_{A_i} f(\varphi, A_i)$ . Por un lado

$$f = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left( \sum_{A_i \in \mathcal{A}(\varphi)} \frac{1}{|A_i|} \right) = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} (|A_i| - 1)!(n - |A_i|)!$$

y por otro lado, según lo demostrado más arriba,

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}(\Phi)} \frac{1}{|A_i|} \leq 1$$

y, por consiguiente,

$$l = \sum_{\Phi} \left( \sum_{A_i \in \mathcal{A}(\Phi)} \frac{1}{|A_i|} \right) \leq (n-1)l$$

y

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} (|A_i| - 1)!(n - |A_i|)! \leq (n-1)!$$

[Green C., Katona G., Kleitman D.J. — In: Recent Advances in Graph. Theory Academica Prague, Prague: 1975, p. 223–231].

6.66. Se supone que el número máximo de aristas es igual a  $\binom{n}{l} \times \times \left[ \begin{matrix} n+1 \\ l \end{matrix} \right] \dots \left[ \begin{matrix} n+l-1 \\ l \end{matrix} \right]$ ; para  $l=2$  esto está demostrado en [Mantel W. Wis Kunige Op gaven met de Oplossingen. 1907, v. 10, N° 1, 60–61]; para  $l=3$ , en [Bollabas B. Discrete Math., 1974, v. 8, N° 1, 21, 24]; para  $l=4$ , en [Sidorenko A.F. Apuntes matemáticos, 1987, v. 41, edic. 3, 433–454, en ruso]; para  $l \geq 5$  este problema no está resuelto por ahora.

6.67.  $\left( \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \right)$ . La construcción extremal es  $C^1(a) C^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(S_n - a)$ . Si

$n \equiv 0 \pmod{2}$ , entonces la familia  $\{A_1, \dots, A_m, \dots, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m\}$  es una anticadena, lo que quiere decir que  $2m \leq \binom{n}{n/2} \Rightarrow m \leq \binom{n-1}{n/2-1}$ . Si  $n \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces la familia  $F = \{A_1, \dots, A_m, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m\}$  es una anticadena y tiene intersecciones no vacías dos a dos. Pongamos  $F^* = \{A \in F: |A| \leq \leq (n-1)/2\}$ . Al aplicar a  $F^*$  el problema 6.65, obtenemos lo requerido [Kleitman D.J., Spencer J. — Discrete Math., 1973, 6, p. 255–262].

6.68.  $2^{n-2}$ ; la construcción extremal es  $C^0(a) C^1(b, \mathcal{F})(S_n - a - b)$ . Pongamos  $\mathcal{A} = \{A: \exists A_i \in F: A \subset A_i\}$ ,  $\mathcal{B} = \{B: \exists A_i \in F: B \supset A_i\}$ . Los hipergrafos  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{B}$  satisfacen las condiciones del problema 6.45, de modo que  $|\mathcal{U} \cap \mathcal{B}| \leq |\mathcal{U}| |\mathcal{B}| \cdot 2^{-n}$ . De las condiciones se deduce, además, que  $|\mathcal{U}|, |\mathcal{B}| \leq 2^{n-1}$ , entonces  $|\mathcal{U} \cap \mathcal{B}| \leq 2^{n-2}$ , pero, evidentemente,  $F \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{B}$ , y por consiguiente,  $|F| \leq 2^{n-2}$ .

6.69.  $\binom{n-k+l}{l}$ , la construcción extremal es  $C^l(S_{n-k+l})$ , donde  $S_{n-k+l} \subset S_n$ . Supongamos que  $\{A_1, \dots, A_m\} = G_n^l$  satisface las condiciones  $T$  y  $K$ , entonces, en virtud de  $K$ ,

$$\begin{aligned} \forall A_i \in G_n^l \quad \exists! B_i \in C^k(S_n); \\ B_i \supseteq A_i: |A_j \cap B_i| < l \quad (i \neq j), \end{aligned}$$

con la particularidad de que existen exactamente  $m$  tales  $B_i$ . Pongamos ahora

$$S_n - B_i = B'_i, |B'_i| = n - k, i = 1, 2, \dots, m.$$

Está claro que para tales  $A_i$  y  $B_i^c$  tenemos  $A_i \cap B_i^c = \emptyset \iff i = j$ , es decir, se cumplen las condiciones del problema 6.5, según el cual, para nuestros parámetros tenemos  $m \leq \binom{n-k+l}{l}$ .

6.70. Demostremos al principio que cualesquiera 6 vértices tienen una arista que pertenece a ambos grafos. En efecto, si en ciertos 6 vértices los grafos de Turán  $G_1$  y  $G_2$  no se intersecaran, entonces, al pintar las aristas del grafo completo en estos 6 vértices de dos colores (de un color las aristas pertenecientes a  $G_1$  y de otro, todas las demás aristas), obtendríamos una 2-coloración  $K_6$  sin triángulos monocromáticos, lo que es imposible. De este modo, según el teorema de Turán el número total de aristas será no inferior a  $(\lfloor n/5 \rfloor - 1)(n - 5/2) \lfloor n/5 \rfloor$ . Demos a conocer un ejemplo de los grafos  $G_1$  y  $G_2$  sobre el conjunto de vértices  $\{1, \dots, n\}$ , donde tanto  $G_1$ , como  $G_2$  no contienen tres vértices independientes y

$$|G_1 \cap G_2| = (\lfloor n/5 \rfloor - 1)(n - 5/2) \lfloor n/5 \rfloor;$$

los vértices  $i$  y  $j$  son adyacentes en  $G_1$ , si  $i - j \equiv 0, 1 \text{ ó } 4 \pmod{5}$ , y en  $G_2$ , siempre que  $i - j \equiv 0, 2 \text{ ó } 3 \pmod{5}$  [Sidorenko A.F., *ДАН*, 1980, 251, N° 4, p. 805–808, en ruso].

6.71. [Baranyai Zs. — In: Infinite and finite sets/Ed. A. Hajnal, R. Rado, V.T. Sós. — Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 1975, N° 10, N — HPC, p. 91–108].

6.72. El problema fue planteado por Erdős [Erdős P. — Can. Math., Bull., 1964, 7, N° 3, p. 473. Problem N° 88]. Sea  $f(n, k)$  el número máximo de aristas en el grafo de  $n$  vértices, en el que todo subgrafo cuenta con un vértice cuyo grado no sobrepasa de  $k$ ; entonces  $f(n, k) = k(n - k) + \binom{k}{2}$ ; la construcción extremal tiene por expresión  $C^2(S_n) - C^2(S_{n-k})$ . Este resultado se obtiene inmediatamente al realizar la inducción partiendo del número de vértices.

Supongamos ahora que  $f_r(n, k)$  es el número máximo de aristas en un grafo de  $n$  vértices, en el cual todo subgrafo de  $(n - r)$  vértices posee un vértice de grado no superior a  $k$ . En este caso

$$f_1(n, k) = \begin{cases} \binom{n}{2}, & n \leq k + 2, \\ k(n - k) + \binom{k}{2} + 1, & n \geq k + 3, \end{cases}$$

con la particularidad de que se tienen bastantes construcciones extremales diversas. Es notable que para  $r$  mayores la respuesta no cambia su forma  $\forall r, k \exists n_0 \forall n \geq n_0 f_r(n, k) = f_1(n, k)$ .

6.73. La hipótesis de Berge fue recientemente resuelta positivamente por V. Taschkínov.

## § 2. Problemas extremales sobre la partición de los números

6.74. Además de Leonardo de Pisa (Fibonacci) este problema fue analizado por Luca Pacciolo, Claude Gaspar Bachet de Meziriac, L. Euler y D.I. Mendeléiev (cuando era director de la Cámara General de Pesos y Medidas), como también por los sucesores de éste. El problema se denomina, a veces, problema de Bachet o de Bachet—Mendeléiev. En una balanza de brazos iguales se prevén dos clases de pesaje preciso: con un platillo y con dos platillos; en el primer caso las pesas pueden ponerse sólo en un platillo de la balanza, y en el segundo, en ambos platillos. En el «Cálculo infinitesimal» (en el capítulo en que se trata de las particiones de los números) L. Euler argumenta, aplicando el método de funciones generatrices, la eficacia de dos conocidas sucesiones de pesas  $\{(p + 1)^i\}_{i=0,1,2,\dots}$   $p = 1, 2$  de más rápido crecimiento, para pesar usando  $p$  platillos respectivamente. Por supuesto, otros autores también destacaban precisamente estas sucesiones, y, en realidad, ellas representan los más efectivos sistemas de pesas



para pesar cualquier carga entera. Si la carga tiene un valor finito (no más pesada que  $n$ ), resulta natural suponer que el peso sumario de las pesas es igual a  $n$ ; en este caso tampoco las progresiones geométricas son siempre eficaces. Si  $t_p(n)$  es el número mínimo necesario de pesas para pesar  $p$  platillos, entonces  $t_p(n) = \lceil \log_{p+1}(pn+1) \rceil$ , mientras que las propias pesas se determinan de un modo recurrente:

$$y_i = \left[ \left( n + p - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \right) / (p+1) \right], \quad i = 1, 2, \dots, t_p(n).$$

El sentido de todas estas expresiones para  $p > 2$  es muy simple y se realiza pesando en una báscula que tiene construcción natural, aunque un tanto especial. Se trata de una balanza de brazos desiguales. El brazo corto lleva un platillo que se emplea exclusivamente para pesar cargas, en el otro brazo hay  $p$  platillos para pesas, los cuales están uno del otro a una distancia igual a la magnitud del brazo corto.

[Bachet de Meziriac C.G. *Problemes plaisants et delectables qui se font par les nombres*. Lyon, 1612. Davidov E.S. Grupos mínimos de números para la formación de series naturales. San Petersburgo, 1903, p. 36, en ruso. Gartz V.F. El mejor sistema de pesas para pesar. San Petersburgo, 1910, p. 36, en ruso. Euler L. Introducción al análisis infinitesimal. Vol. 1-2, M. Fizmatgiz, 1961, en ruso].

6.75. Serán suficientes 12 billetes: un billete de 10 rublos, tres de 5, dos de 3 y seis de 1 rublo. Si tomamos en consideración la condición adicional, entonces podemos contentarnos con 11 billetes: dos de 10 rublos, un billete de 5, dos de 3 y seis de 1 rublo.

6.78. Baránov V.I. Programación, 1978, N° 3, 46-54, 1985, N° 4, 33-38, 1987, N° 2, 91-102, 1987, N° 5, 75-86, en ruso. Apuntes matemáticos, 29, 1981, N° 2, 303-307, en ruso. Problemas de cibernética (elaboración y empleo de los superordenadores), 1986, 191-215, en ruso. Materiales de la Conferencia Nacional sobre problemas de las matemáticas discretas y sus aplicaciones. M.: Universidad de Moscú, 1986, 62-65, en ruso.

6.79. Para  $n = 6$  las particiones serán:

de rango uno:  $6 = 6$ ; de rango dos:  $6 = 5 + 1$ ,  $6 = 4 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ; de rango tres:  $6 = 4 + 1 + 1$ ,  $6 = 3 + 2 + 1$ ,  $6 = 2 + 2 + 2$ ; de rango cuatro:  $6 = 3 + 1 + 1 + 1$ ,  $6 = 2 + 2 + 1 + 1$ ; de rango cinco:  $6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$ ; de rango seis:  $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ .

Las composiciones para  $n = 6$  son:

de rango uno:  $6 = 6$ ; de rango dos:  $6 = 5 + 1$ ,  $6 = 4 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $6 = 1 + 5$ ,  $6 = 2 + 4$ ; de rango tres:  $6 = 4 + 1 + 1$ ,  $6 = 3 + 2 + 1$ ,  $6 = 2 + 2 + 2$ ,  $6 = 1 + 4 + 1$ ,  $6 = 3 + 1 + 2$ ,  $6 = 1 + 1 + 4$ ,  $6 = 2 + 3 + 1$ ,  $6 = 2 + 1 + 3$ ,  $6 = 1 + 3 + 2$ ,  $6 = 1 + 2 + 3$ ; de rango cuatro:  $6 = 3 + 1 + 1 + 1$ ,  $6 = 2 + 2 + 1 + 1$ ,  $6 = 1 + 3 + 1 + 1$ ,  $6 = 2 + 1 + 2 + 1$ ,  $6 = 1 + 1 + 3 + 1$ ,  $6 = 2 + 1 + 1 + 2$ ,  $6 = 1 + 1 + 1 + 3$ ,  $6 = 1 + 2 + 2 + 1$ ,  $6 = 1 + 2 + 1 + 2$ ,  $6 = 1 + 1 + 2 + 2$ ; de rango cinco:  $6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$ ,  $6 = 1 + 2 + 1 + 1 + 1$ ,  $6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1$ ,  $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$ ,  $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ .

6.81. Demostremos ambas fórmulas. El valor de  $n = n(k_1, \dots, k_r)$  no puede ser inferior a  $\sum_{i=1}^r k_i - r + 1$ , puesto que en tal caso existiría una partición, para la cual la correspondencia requerida no se cumple:

$$\sum_{i=1}^r k_i - r - 1 (k_1 - 1, \dots, k_r - 1) \geq (k_1, \dots, k_r);$$

si, en cambio,  $n = \sum_{i=1}^r k_i - r + 1$ , entonces en cualquier partición  $(n_1, \dots, n_r) \vdash$

—  $n$  siempre se encontrará una parta  $n_i \geq k_i$ , puesto que de lo contrario todos los  $n_i \leq k_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, r$ , y, por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^r k_i - r = \sum_{i=1}^r (k_i - 1) \geq n = \sum_{i=1}^r k_i - r + 1.$$

El valor de  $k = k(n_1, \dots, n_r)$  no puede ser superior a  $\sum_{i=1}^r n_i + r - 1$ , pues-

to que en este caso existiría una partición para la cual la correspondencia requerida no se cumple:

$$(n_1, \dots, n_r) \geq (n_1 + 1, \dots, n_r + 1) - \sum_{i=1}^r n_i + r;$$

si, en cambio,  $k = \sum_{i=1}^r n_i + r - 1$ , entonces  $n = k - r + 1$ , y, por consiguiente,

de acuerdo con la primera fórmula ya demostrada, a la correspondencia requerida le satisfarán todas las particiones  $k$  de rango  $r$  no sólo para la partición  $(n_1, \dots, n_r)$ , sino, en general, para todas las particiones  $n$  de rango  $r$ .

6.84. Partiendo de la definición de encaje, es necesario sólo comprobar el cumplimiento de las siguientes propiedades:

(a) reflexividad:  $(n_1, \dots, n_r) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$ ;

(b) antisimetría: si  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$ ,  $(n_1, \dots, n_r) \subseteq (k_1, \dots, k_t)$ , entonces  $(k_1, \dots, k_t) = (n_1, \dots, n_r)$ ;

(c) transitividad: si  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (m_1, \dots, m_l)$ ,  $(m_1, \dots, m_l) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$ , entonces  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (n_1, \dots, n_r)$ .

6.87. El no encajamiento de  $(k - t + 1, 1^{t-1}) \subset (n - r + 1, 1^{r-1})$  es equivalente a que o bien  $k - t + 1 > n - r + 1$ , o bien  $k > n$ , por consiguiente,  $n_a(k, t, r) \leq \max\{k - 1, k - 1 - t + r\}$ . Por otra parte, si  $n_a(k, t, r) = \max\{k - 1, k - 1 - t + r\}$ , entonces el citado no encajamiento se cumple; efectivamente, para  $t \geq r$  tenemos  $n_a(k, t, r) = k - 1$ , y el no encajamiento es obvio: cuando  $t \leq r$ ,  $n_a(k, t, r) = k - 1 - t + r$ , y, por tanto, si fuera  $(k_1, \dots, k_t) \subset (n_1, \dots, n_r)$ , entonces para  $n_1 \geq \dots \geq n_r$  esto conduciría a que  $(k_1, \dots, k_t) \subset (n_1, \dots, n_t)$ , mas en tal caso  $\sum_{i=1}^t n_i \leq n - (r - t) = k - 1$ , lo que contradice el último encajamiento.

6.93. Pongamos

$$f(k_1, \dots, k_t; r) = \max_{t \leq i \leq t} \left( \sum_{j=1}^i k_j + (k_i - 1)(r - 1) \right).$$

Está claro que  $n(k_1, \dots, k_t; r) \geq f(k_1, \dots, k_t; r)$ , puesto que el encajamiento  $(k_1, \dots, k_t) \subset (n - (r - 1)(k_i - 1), (k_i - 1)^{r-1})$  conduce a la desigualdad  $n - (r - 1)(k_i - 1) \geq k_1 + \dots + k_t$ . Además si  $t > 1$ , entonces  $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq k_1 + f(k_2, \dots, k_t; r)$ , puesto que, si  $i$  es un índice que maximiza  $f(k_2, \dots, k_t; r)$ , entonces  $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq \sum_{j=1}^i k_j + (r - 1)(k_i - 1) = k_1 + \sum_{j=2}^i k_j + (r - 1)(k_i - 1) = k_1 + f(k_2, \dots, k_t; r)$ .

Empleemos la inducción respecto  $t$ . Para  $t = 1$ , esto es exactamente el principio de Dirichlet. Para el paso de inducción de  $t - 1$  a  $t$ , es suficiente mostrar que si  $n = f(k_1, \dots, k_t; r)$ , entonces el encaje requerido se cumple. Veamos una partición arbitraria  $(n_1, \dots, n_r) \vdash n$ ; en ésta siempre  $n_1 \geq k_1$ , puesto que  $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq k_1 + (r - 1)(k_1 - 1)$ ; por eso, el encajamiento de  $(k_2, \dots, k_t) \subset (n_1 - k_1, n_2, \dots, n_r)$  tiene por resultado el encajamiento de  $(k_1, \dots, k_t) \subset (n_1, \dots, n_r)$ . El encajamiento penúltimo se deduce, a su vez, de la desigualdad  $f(k_1, \dots, k_t; r) \geq k_1 + f(k_2, \dots, k_t; r)$  y de la suposición

de inducción  $n_1 - k_1 + n_2 + \dots + n_r = n - k_1 = f(k_1, \dots, k_t; r) - k_1 \geq f(k_2, \dots, k_t; r)$ . Si, en este caso,  $n_1 = k_1$ , se debe hacer uso, además, de la monotonía evidente de  $f$  según  $r$ .

En la formulación del principio de alojamiento completo la condición eno más de puede omitirse siempre, salvo en el caso degenerado de  $k = t < r$ .

6.94. En efecto, el  $r$  buscado es, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, la raíz entera máxima de la desigualdad  $n \geq n(k_1, \dots, k_r; r)$ .

$$6.95. m(n; H_h) = \frac{n^2}{2r(k_1, \dots, k_t; k)} + o(n^2).$$

6.98. Por  $\{x\}$  se designará la parte fraccionaria y por  $[x]$ , la parte entera del número  $x$ ;  $|x| = -[-x]$ . En la notación vectorial  $[X]$  denota el vector  $([x_1], \dots, [x_t])$ , y  $\{X\}$ , el vector  $(\{x_1\}, \dots, \{x_t\})$ .  $R^t$  es, como siempre, un espacio euclídeo  $t$ -dimensional.

Supongamos que los índices  $u, v, w$  maximizan  $f(X + Y; r)$ ,  $f(X; r)$  y  $f(Y, r)$ , respectivamente, entonces

$$f(X; r) + f(Y; r) + r - 1 = \sum_{j=1}^v x_j + (x_v - 1)(r - 1) + \sum_{j=1}^w y_j + (y_w - 1)(r - 1) + r - 1 \geq \sum_{j=1}^u (x_j + y_j) + (x_u + y_u - 1)(r - 1) = f(X + Y; r).$$

1. Supongamos lo contrario:  $x_t < 0$  y analicemos el  $m \in [t - 1]$  máximo para el cual  $x_m \geq 0$ , entonces

$$\sum_{j=1}^m x_j + (x_m - 1)(r - 1) > \sum_{j=1}^t x_j + (x_t - 1)(r - 1)$$

puesto que  $x_{m+1}, \dots, x_t$  son negativos. Si tal  $m$  no existe, estudiemos el máximo  $m \in [i + 1, t] = [t] \setminus [i]$ , para el cual  $x_m \geq 0$ , mas en este caso también se verifica la desigualdad

$$\sum_{j=1}^m x_j + (x_m - 1)(r - 1) > \sum_{j=1}^t x_j + (x_t - 1)(r - 1),$$

puesto que  $p \geq 0$ , y  $x_1, \dots, x_i, x_m, \dots, x_t$  son todos negativos. En efecto, en este caso esta desigualdad es equivalente a la siguiente

$$\sum_{j=i+1}^m x_j + (x_m - 1)(r - 1) > (x_t - 1)(r - 1),$$

la cual se desprende de que  $x_m \geq 0 > x_i$ , y  $\sum_{j=i+1}^m x_j \geq 0$ , ya que  $p \geq 0$ , y la última suma incluye todos los  $x_j$  positivos.

$$2. \sum_{j=1}^t x_j + (x_t - 1)(r - 1) = f(x_t, \dots, x_1, x_{t-1}, \dots, x_t) \leq \max_{s \in S_t} f(X_s) \leq \max_s \max_i \sum_{j=1}^i x_{s(i)} + \max_s \max_i (x_{s(i)} - 1)(r - 1) = \sum_{j=1}^t x_j + (x_1 - 1)(r - 1),$$

y de este modo queda calculado el máximo.

Para demostrar el mínimo, tomemos en consideración dos circunstancias.

(a) Mostremos al principio que existe una permutación de la forma  $(x_1, \dots, x_t, x_{s(1)}, \dots, x_{s(t)})$  que minimiza la función  $f$ . Con este fin basta comprobar que si en una permutación arbitraria  $Y = (y_1, \dots, y_t)$   $y_q < 0$ , entonces para

$Y' = (y_q, y_1, \dots, y_{q-1}, y_{q+1}, \dots, y_t)$  se verifica la desigualdad  $f(Y') \leq f(Y)$ .

Efectivamente, si  $f(Y') = y_q + \sum_{j=1, j \neq q}^p y_j + (y_p - 1)(r - 1)$ , entonces  $f(Y) = \sum_{j=1}^p y_j + (y_p - 1)(r - 1) \geq y_q + \sum_{j=1, j \neq q}^p y_j + (y_p - 1)(r - 1) = f(Y')$ , y, por cuanto  $\sum_{j=1}^t y_j \geq 0$ , tendremos, en virtud del p. 1,  $p \neq q$ .

(b) Mostremos ahora que si  $x_1 \geq \dots \geq x_t$ , entonces

$$\min_{x \in S_t} f(x_1, \dots, x_t; r) = f(x_1, \dots, x_t; r),$$

para lo cual comprobemos que si  $x_i \leq x_{i+1}$ , tendremos

$$f(x_1, \dots, x_i; r) \geq f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_t; r).$$

En efecto, pongamos  $X = (x_1, \dots, x_t)$ ,  $X' = (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_t)$ ; entonces si  $f(X') = \sum_{j=1}^p x_j + (x_p - 1)(r - 1)$ , donde  $p \in [i-1] \cup [1+2, t]$ , es decir,

$$p \neq i, i+1, \text{ entonces } f(X) \geq \sum_{j=1}^p x_j + (x_p - 1)(r - 1) = f(X'); \text{ si } f(X') = \sum_{j=1}^{i-1} x_j + x_{i+1} + (x_{i+1} - 1)(r - 1), \text{ entonces } f(X) \geq \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_{i+1} - 1)(r - 1) \geq \sum_{j=1}^{i-1} x_j + x_{i+1} + (x_{i+1} - 1)(r - 1) = f(X'); \text{ si } f(X') = \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_i - 1)(r - 1),$$

$$\text{entonces } f(X) \geq \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_{i+1} - 1)(r - 1) \geq \sum_{j=1}^{i+1} x_j + (x_i - 1)(r - 1) = f(X').$$

Y, por cuanto toda permutación es representable mediante un producto de transposiciones, el mínimo queda calculado. En particular, esto tiene por resultado que si  $X$  es un vector de números enteros que cuenta con componentes positivos, entonces

$$\min_{x \in S_t} f(X; r) \geq \sum_j x_j$$

3.  $1 - r + dr/2 = f(d/2, 0, \dots, 0, -d/2; r) \leq \max f(X; r) \leq \max_i \sum_{j=1}^i x_i + \max_i (x_i - 1)(r - 1) \leq d/2 + (d/2 - 1)(r - 1) = 1 - r + dr/2$ , y, por consiguiente, el máximo queda calculado.

El mínimo buscado se realiza para

$$z = \left( \frac{-d}{2}, \frac{dr^{t-2}}{2(r^{t-1} - (r-1)^{t-1})}, \frac{dr^{t-3}(r-1)}{2(r^{t-1} - (r-1)^{t-1})}, \dots, \frac{d(r-1)^{t-2}}{2(r^{t-1} - (r-1)^{t-1})} \right).$$

Mostremos que la igualdad que se demuestra se verifica como estimación inferior. Sea  $f(X) = \sum_{j=1}^i x_j + (x_i - 1)(r - 1)$ ; de acuerdo con el p. 1,  $x_i \geq 0$ , mas en este caso

$$f(X) = -\frac{d}{2} + \min_{\substack{x_j: \sum x_j = d/2 \\ x_j \geq 0}} f(x_1, \dots, x_i; r) = -\frac{d}{2} + \frac{dr^t}{(r^t - (r-1)^t)} - r + 1 = \\ = \frac{d(r-1)^t}{2(r^t - (r-1)^t)} - r + 1 \geq \frac{d(r-1)^t}{2(r^t - (r-1)^t)} - r + 1,$$

y lo requerido está demostrado.

4. Sea  $q_i = \frac{pr^{t-1}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t}$ ,  $i = 1, \dots, t$ ;  $Q = (q_1, \dots, q_t)$ , entonces

$$\sum_{i=1}^t q_i = p \text{ y}$$

$$f(Q, r) = \frac{pr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1,$$

con la particularidad de que para cada  $i \in [t]$  se verifica la igualdad  $\sum_{j=1}^i q_j + (q_i - 1)(r - 1) = f(Q; r)$ . De lo último se deduce, para  $X = (x_1, \dots, x_t)$ :  $\sum_{i=1}^t x_i = k \geq p$ , la igualdad

$$f(X; r) = \frac{pr^t}{r^t - (r-1)^t} + f(X - Q; r).$$

A su vez

$$\min_{\mathbf{x}: \sum x_i = 0} f(X; r) = f(0; r) = -r + 1.$$

En efecto, suponiendo lo contrario, es decir que  $\min f < -r + 1$ , llegamos al sistema  $\sum_{j=1}^t x_j = 0$ ,  $\sum_{j=1}^i x_j + rx_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, t$ , el cual es incompatible cuando  $r \geq 1$ . Efectivamente, al sustraer la igualdad de todas las  $t$  desigualdades, obtenemos que  $(r-1)x_t < x_{t-1} + \dots + x_1$ ,  $i = 1, \dots, t$ , de donde encontramos sucesivamente que  $x_t < 0$ ,  $x_{t-1} < 0$ ,  $\dots$ ,  $x_1 < 0$ , lo que contradice la igualdad del sistema de partida.

6.108. (a) Si  $f(k_1, \dots, k_t) = \max_{1 \leq i \leq t} \left( \sum_{j=1}^i k_j + \sum_{l=2}^r \min(n_l, k_i - 1) \right)$ , entonces  $f(k_1, \dots, k_t) - k_1 \geq f(k_2, \dots, k_t)$ .

En efecto, si  $i$  maximiza  $f(k_2, \dots, k_t)$ , entonces

$$f(k_1, \dots, k_t) \geq \sum_{j=1}^i k_j + \sum_{l=2}^r \min(n_l, k_i - 1) = \\ = k_1 + \sum_{j=2}^i k_j + \sum_{l=2}^r \min(n_l, k_i - 1) = k_1 + f(k_2, \dots, k_t).$$

(b) Sea  $(p_1, \dots, p_r)$  una partición del número  $f(k_1, \dots, k_t)$  en  $r$  partes, en la cual  $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$ . Entonces en esta partición existe una parte que no es inferior a  $k_1$ . Efectivamente, en el caso contrario tendríamos

$$\begin{aligned} f(k_1, \dots, k_t) &\geq k_1 + \sum_{i=2}^r \min(n_i, k_1 - 1) > \sum_{i=1}^r \min(p_i, k_1 - 1) = \\ &= \sum_{i=1}^r p_i = f(k_1, \dots, k_t). \end{aligned}$$

(c) Ahora realicemos la demostración por inducción respecto de  $t$ . Para  $t = 1$  tenemos:

$$n(k; n_2, \dots, n_r) = k + \sum_{i=2}^r \min(n_i, k-1),$$

y, de acuerdo con (b), en cualquier partición  $(p_1, \dots, p_r)$  del número  $n(k; n_2, \dots, n_r)$  en  $r$  partes tal que  $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$ , existe una parte que no es inferior a  $k$ .

(d) Supongamos ahora que lo requerido se cumple hasta  $t-1$ ; mostremos que esto es así también para  $t$ . Sea  $(p_1, \dots, p_r)$  una partición arbitraria del número  $f(k_1, \dots, k_t)$  en  $r$  partes, en la cual  $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$ . Entonces, con arreglo a (b), en esta partición existe una parte  $p_j \geq k_1$ . Quiere decir, si  $(k_2, \dots, k_t) \subseteq (p_1, \dots, p_j - k_1, \dots, p_r)$ , entonces el encajamiento requerido  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (p_1, \dots, p_r)$  tiene lugar. El encajamiento penúltimo se desprende, a su vez, de la desigualdad demostrada más arriba  $f(k_1, \dots, k_t) - k_1 \geq f(k_2, \dots, k_t)$ , y de la suposición de inducción:

$$\begin{aligned} p_1 + \dots + p_j - k_1 + \dots + p_r &= f(k_1, \dots, k_t) - \\ - k_1 &\geq f(k_2, \dots, k_t) = n(k_2, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r). \end{aligned}$$

6.109. Sea  $M$  un conjunto de todas aquellas particiones  $(p_1, \dots, p_r)$   $n = \sum_{i=1}^r p_i$ , en las cuales  $p_i \leq n_i, i = 2, \dots, r$ , y sea  $M_j$  un subconjunto de aquellas particiones de  $M$ , para las cuales  $p_j \leq n_j - 1, j = 2, \dots, r$ . Está claro que  $M = \bigcup_{j=2}^r M_j \cup (n_1, \dots, n_r)$ . Por cuanto  $n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_r) > n$ , existe en  $M$  una partición  $(q_1, \dots, q_t)$  tal que  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (q_1, \dots, q_r)$ , pero, dado que

$$n \geq \max_{2 \leq j \leq r} n(k_1, \dots, k_t; n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_r),$$

entonces para cada  $(p_1, \dots, p_r) \in \bigcup_{j=2}^r M_j$  tiene lugar el encajamiento  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (p_1, \dots, p_r)$ ; esto quiere decir necesariamente que  $(q_1, \dots, q_r) = (n_1, \dots, n_r)$ .

$$\begin{aligned} 6.110. \quad n(k_1, \dots, k_t; (m^{r-1})) &= \max_{1 \leq i \leq t} \left( \sum_{j=1}^i k_j + (r-1) \min(m, k_i - 1) \right) = \\ &= \max \left( \sum_{j=1}^l k_j + (r-1)m, \sum_{j=1}^l k_j + n(k_{l+1}, \dots, k_t; r) \right) = \sum_{j=1}^l k_j + \max((r-1)m, \\ n(k_{l+1}, \dots, k_t, r) &= \sum_{j=1}^l k_j + n(m+1, k_{l+1}, \dots, k_t; r) - m - 1. \end{aligned}$$

6.111. Veamos las estimaciones para  $m(k, t, r)$  en el caso cuando  $k \neq 0 \pmod{r^t - (r-1)^t}$ . Supongamos que en adelante  $Q$  denota siempre un vector  $t$ -dimensional con componentes

$$q_i = \left( \frac{kr^{t-i}(r-1)^{i-1}}{r^t - (r-1)^t} \right), \quad i = 1.$$

y  $l = \sum_{i=1}^t \{q_i\}$ . Señalemos una propiedad del vector  $Q$ . Precisamente, las componentes  $q_i$  del vector  $Q$  o son simultáneamente números no enteros, o bien son todos números enteros y este último caso tiene lugar cuando y sólo cuando  $k$  es múltiplo de  $r^t - (r-1)^t$ . Esta propiedad se deduce directamente de que los números  $r^{t-i} (r-1)^{(t-1)}$  y  $(r^t - (r-1)^t)$  son recíprocamente primos para cada  $i \in [t]$ . Por consiguiente, para cada  $i \in [t]$  son válidas las estimaciones:

$$\frac{1}{r^t - (r-1)^t} \leq \{q_i\} \leq 1 - \frac{1}{r^t - (r-1)^t}.$$

Además, es evidente que  $1 \leq l \leq t-1$ .

Demostremos ahora la siguiente estimación inferior

$$m(k, t, r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - r + 1 + l - f(\{Q\}; r)$$

Si  $K = (k_1, \dots, k_t) | -k$ , tenemos

$$f(K; r) = \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + f(K-Q; r).$$

o.z

$$f(K-Q; r) = f(K - [Q] - \{Q\}; r) \geq f(K - [Q]; r) - f(\{Q\}; r) - r + 1.$$

La última desigualdad se deduce de la desigualdad para la función  $f$ , d mostrada en el problema 6.98, si ponemos en ella  $X = K - [Q] - \{Q\}$ ,  $Y = \{Q\}$ . Además, por cuanto  $X$  es un vector de números enteros que cuenta con componentes positivas, entonces

$$\min_{s \in S} f(X_s; r) \geq \sum_j x_j,$$

y, por consiguiente  $f(K - [Q]; r) \geq \sum_{i=1}^t (k_i - [q_i]) = l$ ; lo que significa que

$$f(K - [Q]; r) - f(\{Q\}; r) - r + 1 \geq l - r + 1 - f(\{Q\}; r).$$

Es notable que el segundo miembro de la estimación obtenida es siempre un número entero.

De la estimación demostrada se deduce que si  $\{q_M\} = \max_{1 \leq i \leq t} \{q_i\}$ , entonces

$$m(k, t, r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - \{q_M\} (r-1),$$

puesto que

$$f(\{Q\}; r) \leq \max_{1 \leq i \leq t} \sum_{j=1}^i \{q_j\} + \max_{1 \leq i \leq t} (\{q_i\} - 1)(r-1) \leq l + (\{q_M\} - 1)(r-1).$$

Hay otra estimación inferior que tiene una forma más geométrica, a saber, si  $d = \min \|Z - Q\|_1$ , donde  $\min$  se toma por todos los vectores de números enteros  $Z = (z_1, \dots, z_t)$  tales que  $\sum_{i=1}^t z_i = k$ , entonces

$$m(k, t, r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + \frac{d(r-1)^{t-1}}{r^{t-1} - (r-1)^{t-1}} - r + 1.$$

En particular, esta estimación indica que una partición minimizante no puede ser un vector entero que está demasiado lejos de  $Q$  según la métrica  $l_1$ . Además, ella puede emplearse al estimar la frontera del alojamiento completo de cualquier partición concreta  $K = (k_1, \dots, k_t) | -k$ :

$$n(K; r) \geq \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + \frac{\|K - Q\|_1 (r-1)^{t-1}}{r^{t-1} - (r-1)^{t-1}} - r + 1.$$

A título de estimación superior demos demos la desigualdad

$$\frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - (q_{mt}) (r-1) \geq m(k, t, r),$$

donde  $(q_{mt}) = \min_{t-l+1 \leq i \leq t} \{q_i\}$ . Con este fin estudiemos la partición  $K = ([q_1], \dots, [q_{t-l}], [q_{t-l+1}], \dots, [q_t]) | -k$ .

Para esta partición

$$\begin{aligned} f(K - Q) &= \max_{t-l+1 \leq i \leq t} \left( \sum_{j=1}^i (k_j - q_j) + (k_t - q_t - 1)(r-1) \right) \leq \\ &\leq \max_{t-l+1 \leq i \leq t} \left( \sum_{j=1}^i (k_j - q_j) + \max_{t-l+1 \leq i \leq t} (k_t - q_t - 1)(r-1) \right) = \\ &= - \min_{t-l+1 \leq i \leq t} \{q_i\} (r-1), \end{aligned}$$

lo que nos lleva a lo requerido.

Obtenemos pues las estimaciones bilaterales:

$$\frac{kr^t - r + 1}{r^t - (r-1)^t} \geq m(k, t, r) \geq \frac{kr^t + r - 1}{r^t - (r-1)^t} - r + 1.$$

Precisemos un tanto las estimaciones generales obtenidas.

Cuando  $r \leq 2$ , la diferencia entre las estimaciones superiores e inferiores es siempre menor que la unidad y, por tanto, en virtud de que  $m(k, t, r)$  es un número entero, ellas dan el valor preciso:

$$m(k, t, r) = \left\lfloor \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} \right\rfloor \left[ -r + 1, r = 1, 2. \right.$$

Cuando  $l=1$  hagamos uso para la estimación superior de la partición

$$K = ([q_1], \dots, [q_{M-1}], [q_M], [q_{M+1}], \dots, [q_t]) | -k.$$

Para esta partición

$$\begin{aligned} f(K - Q) &= - \sum_{j=1}^{M-1} \{q_j\} + (1 - \{q_M\}) - \{q_M\} (r-1) = \\ &= 1 - \sum_{j=1}^M \{q_j\} - \{q_M\} (r-1) = \sum_{j=M+1}^t \{q_j\} - \{q_M\} (r-1) < 1 - \{q_M\} (r-1). \end{aligned}$$

Esto nos da, en comparación con la estimación inferior obtenida, una diferencia inferior a la unidad. Por consiguiente, cuando  $l=1$ , tenemos

$$m(k, t, r) = \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} + \sum_{j=M+1}^t \{q_j\} - \{q_M\} (r-1).$$



o bien

$$m(k, t, r) = \left\lceil \frac{kr^t}{r^t - (r-1)^t} - (q_M)(r-1) \right\rceil.$$

Así pues, cuando  $t = 1$ , la frontera del alojamiento completo se minimiza por el vector de valor entero más próximo a  $Q$  respecto de la métrica  $l_1$ . En particular, esto ofrece la solución completa de la cuestión sobre la minimización para el caso de  $t = 2$ .

6.112. Está claro que siempre  $n(Y; r) \leq C$ , por lo cual pongamos  $C = m(k, t, r)$ . Si en este caso  $\sum_{j=1}^t y_j = k$ , entonces  $n(Y; r) = m(k, t, r)$  por ser mínimo el número  $m(k, t, r)$ . Si  $\sum_{j=1}^t y_j > k$ , entonces, al disminuir la cantidad requerida de componentes  $y_j$  del vector  $Y$  en una magnitud igual a  $(\sum_{j=1}^t y_j - k)$ , obtendremos la partición del número  $k$  que tiene el valor de la frontera del alojamiento completo no superior a  $m(k, t, r)$ , y, por tanto, igual a  $m(k, t, r)$ .

En el caso alternativo de  $\sum_{j=1}^t y_j < k$  veamos una partición minimizante  $X = (x_1, \dots, x_t) \mid -k$ , que es la más «grande» en el sentido del orden lexicográfico sobre el conjunto  $P_t(k)$  y veamos también el  $i \in [t]$  mínimo, para el cual  $x_i > y_i$ . Tal  $i$  existe, evidentemente, siempre, con la particularidad de que  $[i-1] \neq 0$ , puesto que  $x_1 \leq [(m+r-1)/r] = y_1$ .

Existe tal  $j \in [i-1]$  que  $x_j < y_j$ , puesto que de lo contrario: de  $x_j = y_j$ ,  $j = 1, \dots, i-1$ ,  $x_i > y_i$  tenemos que  $\sum_{j=1}^i x_j + (r-1)(x_i - 1) > m(k, t, r)$ . En efecto, por cuanto en tal caso  $x_i \geq y_i + 1$ , entonces

$$\sum_{j=1}^i x_j + (r-1)(x_i - 1) \geq \sum_{j=1}^i y_j + (r-1)(y_i - 1) + r > m(k, t, r),$$

puesto que el incumplimiento de la última desigualdad es equivalente a que

$$y_i \leq \left[ (m-1) - \sum_{j=1}^{i-1} y_j / r \right] = y_i - 1.$$

Examinemos ahora tal  $j \in [i-1]$  que  $x_j < y_j$ , y estimemos para la partición  $X' = (x'_1, \dots, x'_t) = (x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_i - 1, \dots, x_t) \mid -k$  el valor de su frontera de alojamiento completo  $n(X'; r)$ .

Sea  $v$  un índice que maximiza  $n(X'; r)$ , es decir  $n(X'; r) = \sum_{w=1}^v x'_w + (r-1)(x'_v - 1)$ . Si  $v > i$ , está claro que  $n(X'; r) = n(X; r) = m(k, t, r)$ .

Si  $v = i$ , entonces  $n(X'; r) = \sum_{w=1}^i x'_w + (r-1)(x'_i - 1) = \sum_{w=1}^i x_w + (r-1) \times (x_i - 2) + 1 = \sum_{w=1}^i x_w + (r-1)(x_i - 1) - r + 2 \leq n(X; r) - r + 2 = m(k, t, r) - r + 2$ , lo que siempre no sobrepasa de  $m(k, t, r)$  cuando  $r \geq 2$ .

Si  $v < i$ , entonces  $x'_w \leq y_w$ ,  $w = 1, \dots, v$ , lo que quiere decir que en este caso también

$$n(X'; r) = \sum_{w=1}^v x'_w + (r-1)(x'_v - 1) \leq n(Y; r) \leq m(k, t, r).$$

Así pues,  $n(X'; r) \leq m(k, t, r)$ , y, por consiguiente,  $n(X'; r) = m(k, t, r)$ , es decir, la partición  $X'$  es también minimizante, pero al mismo tiempo  $X' \not\geq X$

lo que contradice el hecho de que  $X$  es máximo en el sentido del orden lexicográfico.

Advirtamos que en virtud de las acotaciones obtenidas más arriba para  $m(k, t, r)$ , el tanteo respecto de  $C$  no sobrepasa la diferencia entre estas acotaciones, es decir,  $r - 1$ .

6.113. El  $t$  buscado es una raíz entera mínima de la ecuación  $k = m(k, t, r)$ . Por eso, la solución se obtiene empleando el resultado del problema anterior. El tanteo en este caso es también limitado por las estimaciones que se tienen para  $t$ , las cuales se desprenden de las estimaciones para  $m(k, t, r)$ , a saber,

$$\frac{\ln(k+r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)} \geq t(k, r) \geq \frac{\ln(k+r-1) - \ln(r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)}.$$

De aquí se deduce, en particular, que para  $r$  fijado y  $n \rightarrow \infty$ , el número mínimo posible de composiciones por medio de las cuales pueden realizarse todas las salidas en el esquema de alojamiento de  $n$  partículas indistinguibles en  $r$  células indistinguibles se porta asintóticamente como la magnitud  $\frac{\ln(k+r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)}$  y el término residual (que siempre no sobrepasa de cero), como una magnitud de orden  $\frac{\ln(r-1)}{\ln(r) - \ln(r-1)}$ .

El propio sistema compuesto de un número mínimo de composiciones se define por el vector  $Y = (y_1, \dots, y_t)$  de la formulación del problema.

6.114. La relación existente entre los encajamientos de las particiones y los pesajes se basa en el siguiente hecho simple. El sistema de pesas  $(k_1, \dots, k_t) | -k$  asegura el pesaje (empleando un solo platillo) de la carga  $v \leq k$  cuando y sólo cuando  $(k_1, \dots, k_t) \subseteq (v, k - v)$ . Por consiguiente, este sistema de pesas asegura el pesaje de cualquier carga entera no más pesada que  $k$  cuando y sólo cuando la partición  $(k_1, \dots, k_t) | -k$  se encaja en toda partición  $k$  en dos partes a lo sumo, y, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, esto es posible si y sólo si  $k \geq n(k_1, \dots, k_t; 2)$ , lo que, a su vez, es equivalente al sistema de desigualdades

$$k_t \leq 1 + \sum_{j=1}^{t-1} k_j, \quad t=1, \dots, t.$$

De aquí se deduce, en particular, que

$$k_t \leq \frac{k+1 - \sum_{j=1}^{t-1} k_j}{2} \leq 2^{t-1}, \quad t=1, \dots, t.$$

Esto significa que el número mínimo posible de pesas  $t_1(k)$  para pesar empleando un solo platillo es la raíz entera mínima de la desigualdad  $k \geq m(k, t, 2)$ , lo que nos conduce a que  $t_1(k) = \lceil \log_2(k+1) \rceil$ .

El pesaje empleando dos platillos se reduce al pesaje con un platillo. El sistema de pesas  $(k_1, \dots, k_t) | -k$  asegura el peso con dos platillos de una carga  $v \leq k$ , si y sólo si  $(k_1^2, \dots, k_t^2) \subseteq (k-v, k+v)$ .

En efecto, la igualdad  $v = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j k_j$ , donde  $\varepsilon_j = 0, 1, -1$ , es equivalente

a la igualdad  $k+v = \sum_{j=1}^t \eta_j k_j$ , donde  $\eta_j = (\varepsilon_j + 1) = 0, 1, 2$ .

Por eso el sistema de pesas  $(k_1, \dots, k_t) | -k$  asegura el pesaje preciso con dos platillos de cualquier carga entera no más pesada que  $k$ , si y sólo si  $2k \geq$

$\geq n(k_1^2, \dots, k_t^2; (k)) = n(k_1^2, \dots, k_t^2; 2)$ , lo que, de acuerdo con el principio de alojamiento completo, es equivalente al sistema de desigualdades

$$k_i \leq 1 + 2 \sum_{j=i+1}^t k_j, \quad i=1, \dots, t.$$

De aquí se deduce, en particular, que

$$k_i \leq \left[ \frac{2k+1-2 \sum_{j=1}^{i-1} k_j}{3} \right] \leq 3^{t-i}, \quad i=1, \dots, t.$$

Por consiguiente, el número mínimo posible de pesas  $t_2(k)$  para poder pesar empleando dos platillos es igual a  $t_2(k) = \lceil \log_3(2k+1) \rceil$ .

Los pesajes empleando un solo platillo en  $p = r - 1$  balanzas con ayuda de las pesas  $(k_1, \dots, k_t) | -k$  son equivalentes a que  $k \geq n(k_1, \dots, k_t; r)$ , por lo cual el número mínimo de pesas es  $t$ , es decir, la raíz mínima de la desigualdad  $k \geq m(k, t, r)$ .

El pesaje de una carga  $v$  empleando  $p$  platillos en una balanza con ayuda de las pesas  $(k_1, \dots, k_t) | -k$  es equivalente al encaje  $(k^p, \dots, k^p) \subseteq (k-r, (p-1)k+v) | -pk$ . En este caso el peso de cualquier carga es equivalente a la desigualdad  $pk \geq n(k_1^p, \dots, k_t^p; (k)) = n(k_1^p, \dots, k_t^p; 2)$ , por lo que el número mínimo de pesas es  $t$ , es decir, la raíz mínima de la desigualdad  $pk \geq p\mu(k, t, 1 + 1/p)$ , donde  $\mu(k, t, 1 + 1/p)$  es el mínimo de la función de alojamiento completo.

### § 3. Constantes geométricas extremales

Demos a conocer una identidad muy útil. Si  $k \geq l \geq t$ ,

$\sigma_t \subseteq \sigma_h$ , entonces

$$\sum_{\sigma_t \subseteq \sigma_l \subseteq \sigma_h} (\sigma_l) = (\sigma_h) \binom{k-t}{l-t} + (\sigma_h - \sigma_l) \binom{k-t-1}{l-t-1} \quad (6.11')$$

6.116. Sea  $\sigma_t^*$  tal que  $\max_{\sigma_t \subset \sigma_h} \|\sigma_l\| - \|\sigma_t^*\|$ ; entonces, de acuerdo con (6.11'), para  $k \geq 2l$  tenemos

$$\sum_{\sigma_l \subseteq \sigma_h - \sigma_t^*} (\sigma_l) = (\sigma_h - \sigma_t^*) \binom{k-l-1}{l-1},$$

de donde

$$\|\sigma_t^*\| \geq \frac{l}{k-l} \|\sigma_h - \sigma_t^*\|, \quad (6.12')$$

por consiguiente, para  $k \geq 2l$  en cualquier sistema  $\sigma_h$  siempre existe un subsistema  $\sigma_l \subset \sigma_h$  que satisface (2). En cambio, si  $k \leq 2l$ , entonces, de acuerdo con (6.11'),

$$\sum_{\sigma_h \subset \sigma_l^* \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) = (\sigma_h - \sigma_l^*) \binom{l}{2l-k} + \sigma_l^* \binom{l-1}{2l-k-1},$$

de donde

$$\|\sigma_l^*\| \geq \frac{l}{3l-k} \|\sigma_h - \sigma_l^*\|, \quad (6.13')$$

por consiguiente, para  $k \leq 2l$ , en cualquier sistema  $\sigma_h$  existe un subsistema  $\sigma_l \subset \sigma_h$  que satisface (6.13').

La inmejorabilidad de las desigualdades (6.12') y (6.13') se demuestra por el sistema  $\sum (k, l_\infty^h)$  de  $k$  vectores unitarios del espacio  $l_\infty^h$  (espacio  $R^k$  con la norma  $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$ ) de la forma siguiente:

$$x_1 = \left( -1, \frac{1}{2l-1}, \dots, \frac{1}{2l-1} \right), \\ x_2 = \left( \frac{1}{2l-1}, -1, \frac{1}{2l-1}, \dots, \frac{1}{2l-1} \right), \dots, x_h = \\ = \left( \frac{1}{2l-1}, \dots, \frac{1}{2l-1}, -1 \right).$$

Además, (6.12') no puede ser mejorado en todo  $X$ , lo que se demuestra por un haz de  $k$  vectores unitarios. Al mismo tiempo (6.13') puede ser reforzada, por ejemplo, en el espacio de Hilbert: ¿en cuánto? Así pues,

$$\text{para } k \geq 2l \quad A(k, l; X) = l/(k-l), \\ \text{para } k \leq 2l \quad \inf_X A(k, l; X) = A(k, l; l_\infty^h) = l/(3l-k).$$

6.117. De acuerdo con (6.11'), si  $k \geq r \geq l \geq 1$ ,  $\sigma_r \subset \sigma_h$ , entonces  $\sum_{\sigma_l \subset \sigma_r} (\sigma_l) = (\sigma_r) \binom{r-1}{l-1}$ ; por consiguiente,

$$\max_{\sigma_l \subset \sigma_r} \|\sigma_l\| \geq \frac{l}{r} \|\sigma_r\|. \quad (6.14')$$

Evidentemente, (6.14') no puede ser mejorado en todo  $X$ , lo que se demuestra por un haz de  $k$  vectores unitarios

Sea  $k \geq l+r \geq 2r$ ,  $\sigma_r \subset \sigma_h$ , entonces, de acuerdo con (6.11'),

$$\binom{k-r-1}{l-1} \sum_{\sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) - \binom{k-r-1}{l-r-1} \sum_{\sigma_l \subset \sigma_h - \sigma_r} (\sigma_l) = \\ = \sigma_r \left( \frac{k-l}{l-r} \right) \binom{k-r-1}{l-1},$$

de donde

$$\|\sigma_l\| \geq \frac{l}{2l-r} \|\sigma_r\|. \quad (6.15')$$

Las desigualdades (6.14') y (6.15') no pueden ser mejoradas en la clase de vectores unitarios, basta a título de  $\sigma_h$  considerar  $\sum (k, l_\infty^h)$ . La desigualdad (6.15') tampoco se mejora en todo  $X$ : hágase la construcción correspondiente (unidimensional).

Sea  $r \leq l$ ,  $k \leq l+r$ ,  $\sigma_r \subseteq \sigma_h$ , entonces, de acuerdo con (6.11')

$$\binom{r}{l-k+r} \sum_{\sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) - \binom{k-r-1}{l-r-1} \sum_{\sigma_h - \sigma_r \subset \sigma_l \subset \sigma_h} (\sigma_l) = \\ = (\sigma_r) \left[ \binom{k-1}{l-r} \binom{r}{l-k+r} - \binom{r-1}{l-k+r-1} \binom{k-r-1}{l-r-1} \right]$$

de donde

$$\|\sigma_l\| \geq \frac{l}{r} \frac{(k-l)}{(k+l-2r)} \|\sigma_r\|, \quad (6.16')$$

La estimación (6.16') no puede ser mejorada en todo  $X$ : constrúyase un ejemplo (unidimensional).

Así pues,

$$\begin{aligned} \text{para } k \geq r \geq l & \quad B(k, l, r; X) = l/r, \\ \text{para } k \geq l + r \geq 2r & \quad B(k, l; r; X) = l/(2l - r), \\ \text{para } k \leq l + r, l \geq r & \quad B(k, l, r; X) = l(k-l)/r(k+l-2r). \end{aligned}$$

6.118. Sea, ahora  $\delta(l, k; X) = \inf_{\sigma_h \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_h} \|\sigma_l\|$ , entonces de acuerdo con las definiciones de  $B$  y  $\delta$ , tenemos la desigualdad  $\delta(l, k; X) \geq B(k, l, r; X)$   $\delta(r, k; X)$ , la cual sugiere, para  $r = 1, k > l$ , la estimación  $\delta(l, k; X) \geq l/(2l - 1)$  que se realiza por  $\sum (k, l_\infty^h)$ , por consiguiente, cuando  $k > l$ ,

$$\inf_X \delta(l, k, X) = \delta(l, k; l_\infty^h) = l/(2l - 1),$$

Para un espacio de Hilbert cuya dimensión no es inferior a  $k - 1$  tenemos

$$\delta(l, k; H) = \sqrt{l(k-l)/(k-1)}. \quad (6.17')$$

La demostración de (6.17') véase en la solución del problema 6.121. Además, puede mostrarse [Sidorenko A.F.], que si  $l_\infty^d$  es un espacio  $R^d$  con la norma

$$\|x\| = \sum_{i=1}^d |x_i|, \text{ entonces } \delta(l, l+1; l_1) = u/(2u-1), \quad (6.18')$$

$$\delta(2, k; l_1) = \begin{cases} (k-2)/(k-1), & k \equiv 0 \pmod{2}, \\ (k-1)/k, & k \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad (6.19')$$

con la particularidad de que la dimensión mínima  $d(k)$  del espacio  $l_1^d$ , que realiza (6.19'), se porta de una manera muy irregular:  $d(2) = 1, d(3) = d(4) = 3, d(5) = d(6) = 10, d(7) = d(8) = 7$ .

6.119. Pongamos  $z_{i_1}, \dots, i_l = \sum_{j=1}^l V_j x_{ij}$ . Entonces tiene lugar la identidad

$$\sum_{i_1, \dots, i_l} z_{i_1, \dots, i_l} = (\sigma_h) \left( \sum_{i=1}^l V_i \right) \binom{k-1}{l-1} (l-1)! \quad \text{Por consiguiente,}$$

$\max_{i_1, \dots, i_l} \|z_{i_1, \dots, i_l}\| \geq \|\sigma_h\| \left| \sum_{i=1}^l V_i \right| / k$ . La inmejorabilidad de esta desigualdad se demuestra por un haz de  $k$  vectores unitarios. Así pues,  $C(\bar{V}_l, \bar{I}_h) = \left| \sum_{i=1}^l V_i \right| / k$ . En particular, llegamos a que para cada sistema  $\sigma_h \subset X$  y cualquier sistema de números  $V_1, \dots, V_h$  existe tal permutación de índices  $\pi$ , para la cual  $\left\| \sum_{i=1}^h V_{\pi(i)} X_i \right\| \geq \left| \sum_{i=1}^h V_i \right| k^{-1} \|\sigma_h\|$ .

6.120. Para  $\sigma_h \subset X$  pongamos  $b_j = i \binom{k-i}{l-i} (l-i)!$ ,  $A = \sum_{\sigma_j \subset \sigma_h} \left( \sum_{i=1}^l V_i x_i \right)^2$ , donde el cuadrado se entiende en el sentido de un producto escalar, y en este caso tenemos

$$\begin{aligned} A &= b_1 \sum_{i=1}^l V_i^2 \sum_{i=1}^h x_i^2 + 2b_2 \sum_{i < j} V_i V_j \sum_{i < j}^h x_i x_j = \\ &= b_2 \sum_{i < j} V_i V_j \left( \sum_{i=1}^h x_i \right)^2 + \left[ b_1 \sum_{i=1}^l V_i^2 - b_2 \sum_{j < i} V_i V_j \right] \sum_{i=1}^h x_i^2 = \\ &= b_1 \sum_{i=1}^l V_i^2 - b_2 \sum_{i < j} V_i V_j, \end{aligned}$$

después de lo cual basta pasar a las normas.

6.121. En la clase de todos los espacios lineales normados tiene lugar la fórmula siguiente

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = \frac{|V(V_1 - V_n)|}{|V - V_1| + |V - V_n|}, \quad (6.20')$$

donde  $V = \sum_{i=1}^n V_i$ ,  $V_1 \geq V_2 \geq \dots \geq V_n$ . La fórmula (6.20') se realiza o bien

por un haz de  $n$  vectores unitarios, o bien en  $l_\infty$  por una construcción del tipo  $x_1 = (1, a, \dots, a)$ ,  $x_2 = (a, 1, \dots, a)$ ,  $\dots$ ,  $x_n = (a, a, \dots, 1)$ , donde  $a = (V_1 + V_n)/(2V - V_1 - V_n)$ . El vector  $\bar{V}_n$  se llama *equilibrado*, si  $\forall t$  ( $1 \leq t \leq n$ )  $V(V - V_t) > 0$ . De (6.20') tenemos:

si  $\bar{V}_n$  no está equilibrado, entonces  $\delta(\bar{V}_n; X) = |V|$ ;

si  $\bar{V}_n$  es de signo constante y  $|V_1| \geq |V_2| \geq \dots \geq |V_n| \geq 0$ , entonces

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = V \cdot V_1 / |2V - V_1|;$$

si  $\bar{V}_n$  está equilibrado y es de signo constante, entonces

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = (V(V_1 - V_n)) / (2V - V_1 - V_n);$$

si el vector ponderal está equilibrado y si  $V_1 = -V_n$ , entonces

$$\inf_X \delta(\bar{V}_n; X) = \delta(\bar{V}_n; l_\infty^n) = V_1.$$

En el espacio de Hilbert  $H$  tenemos:

si  $\dim(H) \geq n-1$ ,  $\sum_{i \neq j} V_i V_j > 0$ , entonces

$$\delta(V_n; H) = \left( \frac{n \sum_{i=1}^n V_i^2 - V^2}{n-1} \right)^{1/2};$$

si  $\dim(H) \geq 1$ ,  $\sum_{i \neq j} V_i V_j \leq 0$ , entonces

$$\delta(\bar{V}_n; H) = |V|.$$

La demostración repite casi por completo la resolución del problema 6.120. 6.122. De acuerdo con el problema 6.53, el grafo  $G^2(S_n)$  posee para  $p \leq \leq 2(q-1)$  la propiedad de que  $\forall S_p \subset S_n \exists S_q \subset S_p : C^2(S_q) \subset G^2(S_n)$ , cuando y sólo cuando  $\exists S_{n-p+q} \subset S_n : C^2(S_{n-p+q}) \subset G^2(S_n)$ . Por consiguiente, aplicada dicha propiedad a nuestros vectores en el espacio de Hilbert, llegamos a que siempre existe un subsistema  $\sigma_{n-p+q} \subset \sigma_n$ , que consta de los vectores ortogonales de dos en dos (para  $p \leq 2(q-1)$ ,  $k=2$ ,  $c=\sqrt{2}$ ), por consiguiente,

$$|\sigma_n| \leq |\sigma_{n-p+q}| + |\sigma_n - \sigma_{n-p+q}| \leq \sqrt{n-p+q} + p-q;$$

la exactitud de esta estimación la demuestra el punto de referencia de  $n-p+q$  vectores unitarios y el haz de  $p-q$  vectores unitarios dirigido según el vector de la suma de todos los vectores del punto de referencia mencionado.

6.123. Sobre un conjunto de puntos  $\sigma_n \subset X$  construyamos, como sobre los vértices, un  $l$ -grafo  $G^l \subset C^l(\sigma_n)$ , rigiéndonos por la regla:  $\sigma_l \in G^l \iff \|\sigma_l\| \geq \geq \delta(l, k; X)$ . Si  $|G^l| < T(n, k, l)$ , entonces

$$\exists \sigma_k^* \subset \sigma_n; \forall \sigma_l \in \sigma_k \quad \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X)$$

o bien  $\exists \sigma_k^* \subset \sigma_n$ :  $\max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X)$ , pero en tal caso

$$\min_{\sigma_n \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| \leq \max_{\sigma_l \subset \sigma_k^*} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X),$$

y, por consiguiente,

$$\min_{\sigma_n \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \|\sigma_l\| < \delta(l, k; X),$$

lo que contradice la definición de  $\delta(l, k; X)$ .

6.125. Indicaciones. 1) Muéstrase que para  $n$  suficientemente grande

$$\delta(2, n; l_1^n) = 1 - 1 / \left( 2 \right) \frac{n}{2} \left[ -1 \right]$$

y, en particular,  $\delta(2, 4n; l_1^{4n-1}) \geq (4n-2)/(4n-1)$ .

2) Muéstrase que si

$$\max_{1 \leq i \leq j \leq 4n} \|X_1 + X_2\| = \delta(2, 4n; l_1^{4n-1}),$$

donde  $x_1, \dots, x_{4n} \in l_1^{4n-1}$ ,  $\|X_i\| = 1$ ,  $i=1, \dots, 4n$ , entonces, para cualesquiera  $i$  y  $j$  ( $1 \leq i < j \leq 4n$ )  $\|X_i + X_j\| = \delta(2, 4n; l_1^{4n-1})$ .

Acerca de los problemas 6.115—6.125 véanse Katona G., Stechkin B.S. — Memorias de la A.C. de la URSS, 1980, 251, N° 6, p. 1293—1296, en ruso; Sidorenko A.F., Stechkin B.S. — Apuntes matemáticos, 1981, 29, N° 5, p. 691—709, en ruso; Kashin B.S., Konyagin S.V. — Obras del Instituto de Matemática de la A.C., 1981, 157, p. 64—67, en ruso.

6.126. El problema fue planteado por L. Moser. Las estimaciones para la figura convexa que cubra un tornillo sin fin unitario véanse en [Poole G., Garrriets J., Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, N° 2, p. 462—463]. Si se omite la condición de convexidad, la situación cambia. Aquí es de interés el caso de un tornillo sin fin de  $n$  eslabones (cada eslabón es un segmento). Si las longitudes de todos los eslabones son racionales, existe una región de recubrimiento de área tan pequeña como se quiera y de diámetro  $\leq 2$  (K.A. Borovkov).

## ANÁLISIS COMBINATORIO EN LOS CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

### § 1. Conjuntos parcialmente ordenados

7.6. El diagrama de Hasse se representa en la fig. 7.1'. El conjunto parcialmente ordenado a examinar tiene un único elemento maximal  $\{a, b, c, d\}$  que es 1, y también un único elemento minimal  $\emptyset$  que es 0. Como ejemplo de anticadenas intervienen:  $\{a\}$ ,  $\{bc\}$ ,  $\{bd\}$  (anticadena no máxima y no saturada;  $\{a\}$ ,

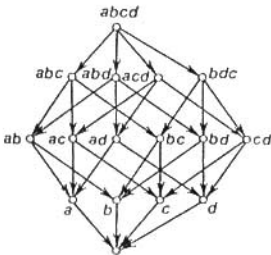


Fig. 7.1'.

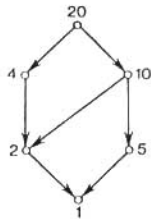


Fig. 7.2'.

$\{bc\}$ ,  $\{bd\}$ ,  $\{cd\}$  (anticadena no máxima, pero saturada);  $\{ab\}$ ,  $\{ac\}$ ,  $\{ad\}$ ,  $\{bc\}$ ,  $\{bd\}$ ,  $\{cd\}$  (anticadena máxima y saturada). Las cadenas aquí son, por ejemplo,  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ ,  $\{ab\}$ ,  $\{abc\}$ ,  $\{abcd\}$  y  $\emptyset$ ,  $\{ab\}$ ,  $\{abcd\}$ . La primera de estas cadenas es máxima y saturada.

7.7. El diagrama de Hasse para divisores naturales del número 20, ordenados según la divisibilidad, se representa en la fig. 7.2'.

7.11. El diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado  $P(S)$  está representado en la fig. 7.3'. Los coátomos en  $P(5)$  son  $(1,4)$  y  $(2,3)$ , y el átomo,  $(1^3, 2)$ . En total en  $P(2)$  hay 2 elementos, en  $P(3)$ , 3, en  $P(4)$ , 5, en  $P(5)$ , 7, y en  $P(10)$ , 42 elementos.

7.14. El conjunto  $\mathcal{D}(n)$  de todos los divisores del número natural  $n$  ordenado según la divisibilidad es, por ejemplo, un conjunto finito parcialmente ordenado; el conjunto  $N$  de todos los números naturales ordenados de un modo habitual es un conjunto linealmente ordenado y localmente finito; el conjunto  $N$ , ordenado según la divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado localmente finito.

7.18. Un booleano  $\mathcal{P}(S)$  sobre un conjunto infinito  $S$  no es un conjunto parcialmente ordenado y localmente finito. Todos los subconjuntos de un solo elemento del conjunto  $S$  son átomos; el conjunto vacío es 0, y todo el conjunto  $S$  es 1. En el booleano  $\mathcal{P}(S_n)$  los subconjuntos  $A$  son tales que  $|A| = n - 1$  son coátomos.



7.19. Véase el lema 1, § 1 del capítulo 8 [1].

7.20. Véase el teorema 1, § 1 del capítulo 8 [1].

7.22. Sea  $\mathcal{P}(S_n)$  un booleano, en el cual  $S_n = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . Analicemos la familia de todos los vectores binarios  $n$ -dimensionales  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$  con la relación de orden:  $\bar{a} \leq \bar{b}$  cuando y sólo cuando  $a_i \leq b_i$ , cuales-

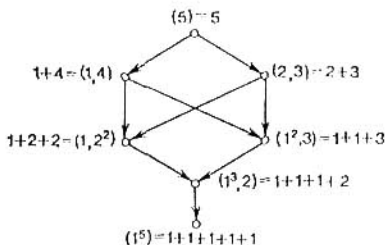


Fig. 7.3'.

quiera que sean  $i = 1, 2, \dots, n$ . Designemos este conjunto parcialmente ordenado por  $\sum_n$ . No es difícil comprobar que  $\mathcal{P}(S_n) \cong \sum_n$ . En efecto, si  $x \in S_n$ , pongamos entonces  $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ , donde

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si } x_i \notin X; \\ 1, & \text{si } x_i \in X. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $\varphi$  es un isomorfismo. Más, aún  $\sum_n \cong \sum_1 x \dots \sum_1 x$ , y, en virtud del problema 7.21, cada  $\sum_1$  es isomorfo a la cadena de longitud 2.

7.26. Supongamos que  $(\mathcal{D}(n), |)_k$  es un conjunto de divisores enteros positivos del número natural  $n$  el  $k$ -ésimo nivel del diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{D}(n), |)_k$ . Se afirma que el número  $d \in (\mathcal{D}(n), |)_k$  cuando y sólo cuando

$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_t^{\beta_t}$ , donde  $p_i$  son unos números primos y  $\beta_i$  son números naturales tales que  $\sum_{i=1}^t \beta_i = k$ .

7.32. Hágase uso del teorema de unicidad del desarrollo de un número en factores simples.

7.33. a)  $|\mathcal{P}(S_n)| = 2^n$ ;  $|\mathcal{D}(n)| = \prod_{i=1}^s (\alpha_i + 1)$  (hágase uso del resultado del problema 7.32).

El número de elementos en un belliano  $(B(S_n), \subset)$  se llama *número de Bell* y se designa por  $B(n)$ .

$$B(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}};$$

$$|P(n)| = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} 1.$$

El número de subespacios del espacio vectorial  $n$ -dimensional  $V_n(q)$  sobre un campo finito de  $q$  elementos se denomina *número de Galois* y se designa por  $G(n, q)$ .

$$G(n, q) = \sum_{h=0}^n \frac{(q^n - 1) \dots (q^{n-h+1} - 1)}{(q^h - 1) \dots (q - 1)}$$

$$b) |(\mathcal{P}(S_n), \subseteq)_h| = \binom{n}{k};$$

$|(\mathcal{Z}(n, l))_h| = \binom{s+k-1}{k}$  (o al número de combinaciones con repetición de  $s$  elementos tomados de  $k$  a  $k$ ), donde  $k \leq \min_{1 \leq i \leq s} \alpha_i$ .

El número de elementos del  $k$ -ésimo nivel del diagrama de Hasse para el belliano  $(B(S_n), \subset)$  se llama *número de Stirling de segundo género* y se denota por  $S(n, k)$ .

$$S(n, k) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}};$$

De este modo,  $B(n) = \sum_{h=1}^n S(n, k)$

$$|(P(n), \leq)_h| = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} 1;$$

$$|(V_n(q), \subset)_h| = \frac{(q^n - 1) \dots (q^{n-h+1} - 1)}{(q^h - 1) \dots (q - 1)} = \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q.$$

El número  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q$  se llama *coeficiente gaussiano  $q$ -binomial* [Goldman J., Rota G.C. — In: Comb. Th. and its Appl. Collog. Math. Soc. J. Bolyai, 1970, No 2, p. 477—509].

c) En el booleano hay  $n!$  cadenas máximas de 0 a 1; en efecto, en la cadena  $\{S_n \supset S_{n-1} \dots \supset S_1 \supset \{\emptyset\}\}$  el primer término se elige por un método, el segundo, por  $n$  métodos y el tercero, por  $(n-1)$  métodos, etc.

Sea  $g(n)$  un número de cadenas máximas de 0 a 1 en el belliano  $(B(S_n), \subset)$ .

Entonces, de la recurrencia  $g(n) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \binom{n-2}{r-1} g(r) g(n-r)$  ó

de la recurrencia  $g(n) = \binom{n}{2} g(n-1)$  se deduce inmediatamente que  $g(n) = n!(n-1)!/2^{n-1}$ . Si  $g(x, y)$  es el número de cadenas máximas en el belliano de  $x$  a  $y$ , entonces, por analogía tenemos que si  $\pi \in (B(S_n), \subset)_h$ , entonces  $g(\pi, 1) = k!(k-1)!/2^{k-1}$ ; si  $\pi \in (B(S_n), \subset)_{n_1, \dots, n_h}$  es un conjunto de todas las particiones del tipo  $(n_1, \dots, n_h)$ , entonces

$$g(0, \pi) = (n-k)! \prod_{i=1}^h n_i! / 2^{n-h}.$$

El problema sobre el cálculo de  $f(n)$ , o sea del número de cadenas máximas de 0 a 1 en  $(P(n), \leq)$ , fue planteado por B. Morgan.

Existen tales constantes  $c_1 > 0,31553$ ,  $c_2 < 11,31374$  que  $c_1^n n^{n/2} < f(n) < c_2^n n^{n/2}$ . Si  $f(p)$  es el número de cadenas máximas de 0 a  $p$  en  $(P(n), \subseteq)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 f(2^h, 3^i) &= \binom{h+2i}{i} - \binom{h+2i}{i-1}; \\
 f(2^h, 3^i, 4^1) &= (i+1) \left\{ \binom{h+2i+4}{i+2} - \binom{h+2i+4}{i+1} \right\}; \\
 f(2^h, 4^2) &= (h+1)(h^3 + 19h^2 + 118h + 228)/12; \\
 f(2^h, 3^1, 4^2) &= (h+1)(h+6)(h^3 + 26h^2 + 225h + 636)/24; \\
 f(2^h, 5^1) &= (h+1)(h+3)(h+8)/6; \\
 f(2^h, 3^1, 5^1) &= (h+1)(3h^3 + 59h^2 + 358h + 648)/24; \\
 f(2^h, 3^2, 5^1) &= (h+1)(2h^4 + 63h^3 + 717h^2 + 3458h + 5800)/40; \\
 f(2^h, 4^1, 5^1) &= (h+1)(h^4 + 30h^3 + 323h^2 + 1458h + 2376)/24; \\
 f(2^h, 6^1) &= (h+1)(h+3)(h^2 + 22h + 88)/24; \\
 f(2^h, 3^1, 6^1) &= (h+1)(h^4 + 34h^3 + 386h^2 + 1784h + 2910)/30; \\
 f(2^h, 7^1) &= (h+1)(h^4 + 49h^3 + 606h^2 + 2764h + 3960)/120
 \end{aligned}$$

{Erdős P., Guy R.K., Moon J.W. — J. London Math. Soc. (2), 1975, 9, p. 365—370}.

Si  $C(x, y)$  es el número de cadenas máximas de  $x$  a  $y$  en  $(V_n(q), \subset)$ , entonces el número  $C(0, 1)$  de cadenas  $V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_1$  será, evidentemente, igual a

$$\left[ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]_q \left[ \begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix} \right]_q \dots \left[ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^n - 1) \dots (q - 1)}{(q - 1)^n}.$$

Análogamente,

$$C(x, y) = (q^{d(y)-d(x)} - 1) \dots (q - 1) / (q - 1)^{d(y)-d(x)},$$

donde  $d(x)$  es la dimensión del subespacio  $x$ .

d) De este modo, si  $C(0, v, 1)$  es el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por  $v \in (V_n(q), \subset)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 C(0, v, 1) &= C(0, v) C(v, 1) = \\
 &= (q^{d(v)} - 1) \dots (q - 1) (q^{r-d(v)} - 1) \dots (q - 1) / (q - 1)^n.
 \end{aligned}$$

Para  $x \in (\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$  el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por  $x$ , es igual a  $|x|! (n - |x|)!$ .

Si  $g(0, \pi, 1)$  es el número de cadenas máximas de 0 a 1, que pasan por  $\pi \in (B(S_n), \subset)_{n_1, \dots, n_k}$ , entonces

$$g(0, \pi, 1) = g(0, \pi) g(\pi, 1) = k! (k-1)! (n-k)! \prod_{i=1}^k n_i! / 2^{n-1}.$$

e) La anchura del booleano  $(\mathcal{P}(S_n), \subseteq)$  es igual a  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  (véase el problema 7.20); si  $F$  es una anticadena del belliano  $(B(S_n), \subset)$  y  $F_{n_1, \dots, n_k} = F \cap (B(S_n), \subset)_{n_1, \dots, n_k}$ , entonces

$$\sum_{h=1}^n \frac{k!}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{\substack{n_1 \geq \dots \geq n_h \geq 1 \\ n_1 + \dots + n_h = n}} \frac{|F_{n_1, \dots, n_h}|}{\binom{n}{n_1 \dots n_h}} \leq 1, \quad (7.1')$$

Llamemos *especificación secundaria de la partición*  $\pi \in (B(S_n), \subset)$  un sistema de números  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , de donde  $\alpha_i$  es el número de bloques de  $\pi$  de volumen  $i$ , de suerte que  $1 \cdot \alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n$ . Por  $(B(S_n), \subset)_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  denotemos el conjunto de todas las particiones con especificación secundaria  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Entonces, si  $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = F \cap (B(S_n), \subset)_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  a relación (7.1') puede escribirse en la forma siguiente

$$\sum_{h=1}^n \frac{k!}{\binom{n-1}{k-1}} \sum_{\substack{1 \cdot \alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = h}} \frac{|F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}| (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}}{n!} \leq 1. \quad (7.2')$$

Está claro que si  $F$  es una cadena no saturada, entonces (7.1') y (7.2') se realizan. Pongamos  $F = (B(S_n), \subset)_h$ , en este caso

$$|F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}| = \begin{cases} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n! (1!)^{\alpha_1} \dots (n!)^{\alpha_n}}, & \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k, \\ 0 & \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq k; \end{cases}$$

por consiguiente, de (7.2') tenemos

$$C_h(n) = \sum_{\substack{1 \cdot \alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = h}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} = \binom{n-1}{k-1}, \quad (7.3')$$

donde  $C_h(n)$  es, evidentemente, el número de composiciones de  $n$  en  $k$  sumandos (la composición es una representación de un número natural en forma de una suma ordenada de números naturales).

Si  $F$  es anticadena máxima en  $(V_n(q), \subset)$ , entonces  $|F| = \left[ \frac{n}{[n/2]} \right]_q$ . Observemos que  $\max_{0 \leq h \leq n} \left[ \frac{n}{k} \right]_q = \left[ \frac{n}{[n/2]} \right]_q$ ; en efecto, partiendo de la definición, tenemos

$$\left[ \frac{n}{k+1} \right]_q \geq \left[ \frac{n}{k} \right]_q \iff k \leq \frac{n-1}{2} \quad (q > 1);$$

si  $F_h = F \cap (V_n(q), \subset)_h$  y  $C(0, v, 1)$  es de  $d$ ), entonces

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{v \in F} \frac{C(0, v, 1)}{C(0, 1)} = \sum_{h=0}^n F_h^{(q^h-1) \dots (q-1)(q^{n-h}-1) \dots (q-1)} = \\ &= \sum_{h=0}^n |F_h| \frac{(q^h-1) \dots (q-1)(q^{n-h}-1) \dots (q-1)(q-1)^n}{(q^n-1) \dots (q-1)(q-1)^h (q-1)^{n-h}} = \\ &= \sum_{h=0}^n \frac{|F_h|}{\left[ \frac{n}{k} \right]_q} \geq \frac{F}{\left[ \frac{n}{[n/2]} \right]_q}. \end{aligned}$$

De anticadena máxima puede servir  $(V_n(q), \subset)_{[n/2]}$ .

La anticadena máxima en  $(\mathcal{Z}(n), |)$  se realiza por el  $\left[ \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{2} \right]$  — nivel promedio en el diagrama de Hasse:

$$(\mathcal{Z}(n), |) \left[ \sum_{i=1}^n r_i/2 \right].$$

De Bruijn N., Van C.A., Tengbergen E.; Kruyswijk D.R. — Nieuw Arch. Wisk (2) 1952, 23, p. 191—193; Alexeev V.B. Análisis discreto, 1974, 26, p. 20—35, en ruso.

7.34. Véase el teorema 2 § 1 del cap. 8 [1].

7.35. Por ejemplo, el segmento  $[0, 1]$  no es un conjunto bien ordenado, puesto que el intervalo  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  no contiene elemento mínimo.

7.37. La condición de maximalidad en un conjunto bien ordenado  $P$  no siempre se cumple, pero sí se cumple sin falta en el conjunto  $P^*$ , dual respecto de  $P^*$ . Por ejemplo, un conjunto de números naturales con orden habitual satisface la condición de minimalidad, pero no satisface la de maximalidad.

7.38. Supongamos que se cumple la condición de minimalidad y  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  es una cadena numerable de elementos de  $P$ . Sea  $a$  el elemento mínimo en el subconjunto  $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$  del conjunto  $P$ . Entonces  $a = a_k$  para cierto  $k$ , y, por lo tanto,  $a_n = a = a_k$  para todo  $n \geq k$ . Viceversa, supongamos que se cumple la condición de rotura de las cadenas de crecimientos y que  $B$  es un subconjunto no vacío del conjunto  $P$ . Entonces  $B$  contiene el elemento  $a_1$ , y si  $a_1$  no es mínimo en  $B$ , existe un elemento  $a_2 \in B$  tal que  $a_1 > a_2$ . Supongamos que existen tales  $a_1, \dots, a_n \in B$  que  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ . En este caso o bien  $a_n$  es mínimo en  $B$ , o bien existe un elemento  $a_{n+1} \in B$  tal que  $a_n > a_{n+1}$ . De aquí concluimos que o bien  $B$  tiene elemento mínimo, o bien existe una cadena infinita  $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$  de elementos de  $B$ . Por hipótesis, resulta posible sólo el primer caso.

De un modo dual se establece que la condición de maximalidad es equivalente a la condición de rotura de las cadenas crecientes.

7.43. Véase el teorema 7 del § 1, capítulo 8 [1].

7.44. Véase el teorema 8 del § 1, capítulo 8 [1].

7.45. Aprovechese el diagrama de Hasse teniendo en cuenta que él es, para cualquier conjunto finito parcialmente ordenado, un grafo orientado sin contornos. Entonces el teorema reformulado de Dilworth se enunciará así: el número máximo de vértices reciprocamente incomparables en un grafo orientado sin contornos es igual al número de cadenas en la descomposición mínima del grafo.

7.46. Póngase en correspondencia a la matriz  $A = (a_{ij})$  el grafo bipartido  $G(S \cup T, E)$ , a título de subconjunto de vértices  $S$  tómesse el conjunto de filas, como subconjunto de vértices  $T$  tómesse el conjunto de columnas de la matriz y supóngase que  $(t_j, s_i) \in E$  cuando y sólo cuando  $a_{ij} \neq 0$ ; hágase uso del teorema de König. Por  $t_j$  y  $s_i$  se designan la  $j$ -ésima columna e  $i$ -ésima fila, respectivamente, de la matriz  $A$ .

7.47. A partir del grafo orientado  $G(V, E)$  con dos vértices no adyacentes  $s$  y  $t$  construyamos un nuevo grafo orientado  $G'$ . Dividamos con este fin los vértices  $v \in V \setminus \{s, t\}$  en dos vértices nuevos  $v'$  y  $v''$ , y unámoslos con un arco  $(v', v'')$ . A continuación cada arco del grafo  $G$  con un vértice terminal  $v \in V \setminus \{s, t\}$  se sustituye por un nuevo arco con el vértice terminal  $v'$ , y cada arco con el vértice inicial  $v \in V \setminus \{s, t\}$ , por un arco, en el cual  $v''$  figura como vértice inicial. El grafo  $G$  y el  $G'$ , construido a partir de  $G$ , están representados en la fig. 7.4.

La validez del análogo de vértice del teorema de Menger se desprende del teorema de Menger y de las siguientes afirmaciones que se demuestran con facilidad:

a) cada camino de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G'$  corresponde al camino de  $s$  a  $t$  en el

grafo  $G$ , que se obtiene por contracción de todos los arcos del tipo  $(v', v'')$ , y, viceversa, cada camino de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G$  corresponde al camino de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G'$ , obtenido por partición de todos los vértices del camino distintos de  $s$  y  $t$ .

b) el número máximo de caminos de  $s$  a  $t$ , que no se intersectan en el grafo  $G'$  por los arcos, es igual al número máximo de caminos de  $s$  a  $t$  que no tienen vértices comunes.

c) dos caminos de  $s$  a  $t$  en el grafo  $G'$  no se intersectan por los arcos, cuando y sólo cuando los caminos en el grafo  $G$  que les corresponden no se intersectan por los vértices.

d) la potencia mínima de un conjunto  $(s, t)$ -separador de arcos del grafo  $G'$  es igual a la potencia mínima del conjunto  $(s, t)$ -separador de vértices del grafo  $G$ .

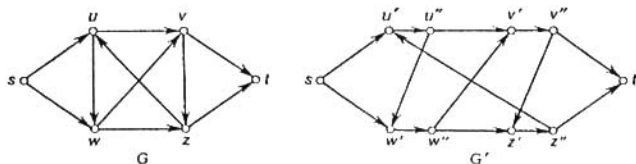


Fig. 7.4'.

7.48. Cerciórese de que si  $\mathcal{D}(G)$  es un grafo orientado que se obtiene del grafo no orientado  $G$  sustituyendo en éste cada arista por un par de arcos opuestamente orientados e incidentes respecto a los mismos vértices, entonces

a) existe una correspondencia biunívoca entre las cadenas en el grafo  $G$  y en el grafo  $\mathcal{D}(G)$ ;

b) para cualesquiera dos vértices  $s$  y  $t$  el número mínimo de aristas cuya eliminación en el grafo  $G$  rompe todas las cadenas de  $s$  a  $t$ , es igual al número mínimo de arcos cuya eliminación rompe todas las cadenas de  $s$  a  $t$  en el grafo orientado  $\mathcal{D}(G)$ . De aquí se deduce inmediatamente la validez de las variantes no orientadas del teorema de Menger y de su análogo de vértice.

7.49. Se deben añadir al grafo  $G(V, E)$  dos vértices nuevos  $s^*$  y  $t^*$ , y también todas las aristas (arcos) del tipo  $(s^*, s)$ , donde  $s \in S$ , y todas las aristas (arcos) del tipo  $(t, t^*)$ , donde  $t \in T$ . En tal caso las afirmaciones del problema se desprenden de la validez de las afirmaciones de los problemas 7.47 y 7.48 para el grafo (orientado)  $G(V \cup \{s^*, t^*\}, E')$ .

7.50. a) Al grafo bipartido  $G(S \cup T, E)$  póngasele en correspondencia un conjunto parcialmente ordenado  $S \cup T$  con una relación de orden  $< : x < y$ , cuando y sólo cuando  $(x, y) \in E$ ; y hágase uso de las siguientes dos afirmaciones:

1) para cualquier descomposición  $\mathcal{D}$  del conjunto  $S \cup T$  en cadenas existe una combinación de pares  $M$  en el grafo  $G(S \cup T, E)$ , para la cual  $|\mathcal{D}| + |M| = |S \cup T|$  (a título de  $M$  hace falta tomar el conjunto de todas las cadenas de  $\mathcal{D}$  que constan de dos elementos);

2) para cada anticadena  $A$  del conjunto parcialmente ordenado  $S \cup T$  existe un recubrimiento de vértice  $X$  de las aristas del grafo  $G$ , para el cual  $|A| + |X| \leq |S \cup T|$ , puesto que el complemento de la anticadena  $A$  en el conjunto  $S \cup T$  contiene el recubrimiento de vértice  $X$  de las aristas del grafo  $G$ .

b) Unamos al grafo bipartido  $G(S \cup T, E)$  dos vértices  $s^*$  y  $t^*$ , como también todos los arcos  $(s^*, s)$  para cualesquiera  $s \in S$  y  $(t, t^*)$  para cualesquiera  $t \in T$ . Las aristas  $(x, y) \in E$  vamos a considerarlas como arcos que están orientados en dirección de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$ . Para el grafo obtenido definamos la función que caracteriza la capacidad de los arcos:

$$c(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = s^* \text{ e } y \in S, \text{ o bien } x \in T \text{ e } y = t^*; \\ \infty, & \text{si } (x, y) \in E. \end{cases}$$

Sea  $f$  un flujo máximo arbitrario expresado en números enteros de  $s^*$  a  $t^*$  en la red construida y supongamos que  $(X, \bar{X})$ , donde  $\bar{X} = (S \cup T \cup \{s^*, t^*\}) \setminus X$  es un corte mínimo. Siendo definida la función de la capacidad de paso en los arcos, concluimos que el subconjunto de arcos  $A = \{(x, y) \in E: f(x, y) = 1\}$  es una combinación de pares. El conjunto  $\mathcal{Z} = (S \cap \bar{X}) \cup (T \cap X)$  es un conjunto de vértices  $(S, T)$ -separador, con la particularidad de que  $\mathcal{Z}$  se encuentra en una correspondencia biunívoca con los arcos del corte mínimo  $(X, \bar{X})$ . Entonces, en virtud del teorema de Ford y Fulkerson, llegamos a que si  $v$  es la magnitud del flujo máximo  $f$ , entonces  $|A| = |\mathcal{Z}| = v$ . Por otra parte, es obvio que el número máximo de arcos de la combinación de pares  $G$  no es superior al número mínimo de vértices en cualquier conjunto de vértices  $(S, T)$ -separador. De este modo, la validez del teorema de König queda establecida.

c) para demostrar, hagamos uso de la variante del teorema de Menger aducida en el problema 7.49. Sea  $G(S \cup T, E)$  un grafo bipartido sobre el conjunto de vértices  $S \cup T$ ,  $S \cap T = \emptyset$ . Es evidente que el conjunto de vértices  $A$  cubre todas las aristas del grafo  $G$  cuando y sólo cuando  $A$  es un conjunto de vértices  $(S, T)$ -separador del grafo  $G$ . Para cualquier combinación de pares de  $n$  aristas en el grafo  $G$  pueden elegirse  $n$  cadenas de los vértices del conjunto  $S$  a los vértices del conjunto  $T$ , y, viceversa,  $k$  cadenas de  $S$  a  $T$ , que no tienen vértices comunes, contienen  $k$  aristas del grafo  $G$  que no se intersecan en los vértices. Por consiguiente, el número máximo de cadenas de  $S$  a  $T$ , que no tienen vértices comunes, es igual al número máximo de aristas de la combinación de pares en el grafo  $G$ . Mas, en virtud del teorema de Menger del problema 7.49, el número máximo de cadenas de los vértices del conjunto  $S$  a los del conjunto  $T$ , que no tienen vértices comunes, es igual a la potencia mínima del conjunto de vértices  $(S, T)$ -separador.

d) Demostremos el análogo matricial del teorema de König (véase el problema 7.46), apoyándonos en el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos podemos considerar que la matriz  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1-n \\ j=1-t}}$  está compuesta por 0 y 1. Las columnas

y las filas de la matriz se llamarán, para mayor brevedad, *líneas*. Sea  $m$  un número mínimo de líneas que contienen todos los elementos no nulos y  $M$ , el número máximo de elementos no nulos no situados de dos en dos en una misma línea.

Es evidente que  $m \geq M$ , puesto que ninguna línea contiene más de un elemento de los  $M$  elegidos. Demostremos que  $M \geq m$ . Supongamos que  $r$  filas y  $s$  columnas de la matriz contienen todos los elementos no nulos,  $r + s = m$ , y que  $m$  es el número mínimo entre todos los posibles. Permutemos estas filas y columnas de un modo tal que ocupen los primeros lugares. A cada  $i$ -ésima fila,  $i = 1, \dots, r$ , pongámosle en correspondencia el conjunto de números de las columnas  $j$ , para las cuales  $a_{ij} = 1$  y  $j > s$ . Los conjuntos obtenidos satisfacen las condiciones del teorema de P. Hall. En efecto, si no fuera así, es decir, si  $k$  de dichos conjuntos contuvieran  $v < k$  elementos, entonces estas  $k$  filas podrían ser sustituidas por  $v$  columnas y todas las unidades integrarían un número menor de líneas, lo que contradice la condición de minimalidad del número  $m$ . Por cuanto la condición del teorema de P. Hall se cumple, podemos elegir  $r$  representantes distintos de  $r$  filas, es decir,  $r$  unidades, de un modo tal que no hayan dos y más unidades en una fila y ninguna en las primeras  $s$  columnas. Razonando análogamente, podemos obtener  $s$  representantes de las primeras  $s$  columnas de un modo tal que las unidades estén ausentes en las primeras  $r$  filas. Este conjunto de  $r + s = m$  unidades está elegido de un modo tal que no hay dos y más unidades dispuestas en una misma línea. Quiere decir,  $m \leq M$ , lo que se trataba de demostrar.

7.51. a) Sea  $P$  un conjunto finito parcialmente ordenado. Construyamos un grafo bipartido  $G(P \cup P', E)$  sobre el conjunto de vértices  $P \cup P'$ , donde  $P'$  es un ejemplar más del conjunto  $P$ . Además, los vértices  $x$  e  $y'$ , donde  $y'$  es la copia de  $y$  en  $P'$ , se unirán con las aristas, si y sólo si  $x < y$  en el conjunto parcialmente ordenado  $P$ .

Sea  $M$  una combinación de pares máxima en el grafo  $G(P \cup P', E)$ , y sea  $X$  el recubrimiento de vértice mínimo de las aristas en el grafo  $G$ . Entonces, en virtud del teorema de König, tenemos  $|M| = |X|$ . Hagamos uso de dos afirmaciones auxiliares:

1) para cada combinación de pares  $M$  en el grafo  $G(P \cup P', E)$  existe una descomposición  $\mathcal{D}$  del conjunto parcialmente ordenado  $P$  en cadenas, para la cual  $|M| + |\mathcal{D}| = n$ , donde  $n = |P|$ ;

2) si  $X$  es un conjunto de vértices, que cubren todas las aristas del grafo  $G$  de tal manera que ningún subconjunto suyo puede ya cubrir todas las aristas del grafo  $G$ , en el conjunto parcialmente ordenado  $P$  existe una anticadena  $A$  tal que  $|X| + |A| = n$ , donde  $n = |P|$ . Entonces  $|\mathcal{D}| = |A|$ , puesto que  $|\mathcal{D}| = n - |M|$  y  $|A| = n - |X|$ . Pero,  $|A| \leq |\mathcal{D}|$  para cualesquiera  $A, \mathcal{D} \subseteq P$ , dado que ningún par de elementos incomparables puede encontrarse en una misma cadena. Por consiguiente,  $\max_A |A| = \min_{\mathcal{D}} |\mathcal{D}|$ ,

lo que se trataba de demostrar.

b) Del teorema de König obtenemos el análogo de vértice del teorema de Menger para los grafos no orientados (véanse los problemas 7.47 y 7.48). Sea  $G(V, E)$  un grafo no orientado arbitrario con dos vértices destacados no adyacentes  $s, t \in V$ . Si en  $G(V, E)$  se tiene un sistema de  $k$  cadenas de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los vértices, entonces el conjunto de vértices  $(s, t)$ -separador ha de contener por lo menos un vértice de cada cadena, o bien, dicho de otro modo, la potencia de cada conjunto de vértices  $(s, t)$ -separador del grafo  $G$  debe ser no inferior a  $k$ . La desigualdad inversa se deduce de la siguiente afirmación: si  $X \subseteq V$ , donde  $|X| = k$  es el conjunto de vértices  $(s, t)$ -separador mínimo del grafo  $G$ , en  $G$  existen  $k$  cadenas de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los vértices. Para demostrarlo véase el lema 5 § 1, capítulo 8 [1].

c) Sea  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  una familia de subconjuntos del conjunto  $X$ . Construyamos la  $(0,1)$ -matriz de incidencia. Supongamos que todas sus unidades están dispuestas en  $r$  filas y  $s$  columnas. Si  $r + s = n$ , entonces, de acuerdo con el teorema de König, existen  $n$  unidades de las cuales ningún par yace en una misma línea, y ellas forman el sistema de representantes distintos para  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Si, en cambio,  $r + s < n$ , entonces se perturba la validez del teorema de P. Hall, puesto que para  $k = n - r$  filas las unidades se encontrarán solamente en  $s < n - r = k$  columnas.

7.52. Sea  $G(V, E)$  una red en la que  $s$  y  $t$  son entrada y salida, respectivamente. Supongamos que a cada arco de la red se le está designada una capacidad unitaria. En este caso la magnitud del flujo máximo en la red  $G$  es igual al número máximo de caminos de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los arcos. En efecto, sea  $v$  cierto flujo máximo en la red  $G$  y sea  $G^*$  el grafo orientado obtenido de  $G$  por supresión de todos los arcos libres del flujo  $v$ . Por cuanto las capacidades de todos los arcos de la red  $G$  son iguales a 1, entonces para todos los arcos  $e$  de la red  $G^*$  tenemos  $f(e) = 1$ . De aquí, para todos los arcos  $e$  de la red  $G^*$ , distintos de  $s$  y  $t$ , tenemos  $|\Gamma(e)| = |\Gamma^{-1}(e)|$ , y para la entrada  $s$  y la salida  $t$  tenemos:  $|\Gamma(s)| - |\Gamma^{-1}(s)| = |\Gamma^{-1}(t)| - |\Gamma(t)| = v$ . De aquí concluimos que en la red  $G^*$  y, por tanto, en la  $G$  existen  $v$  caminos de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los arcos. Por consiguiente, la magnitud  $v$  del flujo máximo en la red  $G$  no es superior al número máximo  $k$  de cadenas de  $s$  a  $t$  que no se intersecan por los arcos. Viceversa, sea  $P_1, P_2, \dots, P_k$  un juego en la red  $G$  tomado del número máximo de caminos de  $s$  a  $t$ , que no se intersecan por los arcos. Hallemos en  $G$  el flujo  $f$  del modo siguiente:

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{si existe tal } i \text{ que } e \in P_i; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Es evidente que la magnitud de tal flujo es igual a  $k$ , y la magnitud del flujo máximo no es inferior a  $k$ . De este modo,  $v = k$ .

Demostremos, ahora, que la capacidad del corte mínimo en la red  $G$  es igual al número mínimo de arcos cuya supresión rompe todas las cadenas que llevan de  $s$  a  $t$ . Suprimamos en  $G$  todos los arcos del corte mínimo que separa la en-



trada  $s$  de la salida  $t$ . En el grafo orientado obtenido no habrá ningún camino de  $s$  a  $t$ . Por eso la potencia del corte citado no es inferior al número mínimo de arcos, cuya eliminación rompa todas las cadenas de  $s$  a  $t$ . Es cierta también la relación inversa. En efecto, sea  $T$  un conjunto de arcos cuya supresión rompa todos los caminos de  $s$  a  $t$  en la red  $G$  y sea  $S$  un conjunto de vértices que se alcanzan desde la entrada  $s$  con ayuda de las cadenas privadas de los arcos pertenecientes al conjunto  $T$ . Está claro que  $(S, V \setminus S)$  es un corte en la red  $G$ . Además,  $(S, V \setminus S) \subseteq T$ . Por eso la potencia del corte mínimo no sobrepasa  $| (S, V \setminus S) |$  y, por consiguiente,  $| T |$ .

Del teorema de Ford y Fulkerson, como también de las relaciones obtenidas más arriba, obtenemos el teorema de Menger.

7.53. Sea  $G(V, E)$  una red con la entrada  $s$  y salida  $t$  en cuyos arcos vienen dadas las capacidades de paso que se expresan en números enteros. Construyamos una nueva red  $G'$  sobre el mismo conjunto de vértices, al sustituir cada arco

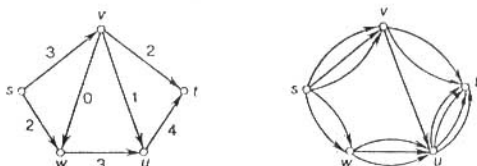


Fig. 7.5'.

$e \in E$  con la capacidad  $c(e)$  por  $c(e)$  arcos igualmente orientados y al borrar todos los arcos cuyas capacidades son nulas. La red  $G$  y la  $G'$ , construida a base de  $G$ , están representadas en la fig. 7.5', donde los números en los arcos del grafo  $G$  significan sus capacidades de paso.

Sean  $R$  y  $R'$  unos cortes que separan  $s$  de  $t$  en las redes  $G$  y  $G'$ , respectivamente, suponiéndose que dichos cortes están definidos por un mismo conjunto de vértices. Entonces  $| R' | = \sum_{e \in R} c(e)$ , donde  $c$  indican las capacidades de los

arcos de la red  $G$ . Así pues, al poner  $N = \min_R \sum_{e \in R} c(e)$ , obtendremos  $| R' | \geq$

$\geq N$ . Entonces, en virtud del teorema de Menger, existen  $N$  (y este número es máximo) cadenas de  $s$  a  $t$  en la red  $G'$ , las cuales no se intersecan por los arcos. Sea  $f(e)$  el número de arcos paralelos al arco  $e$  en la red  $G'$ , ocupados por dichas cadenas. Entonces  $f(e)$  representa un flujo de  $s$  a  $t$  de magnitud  $N$  en la red  $G$ . La implicación requerida queda demostrada.

7.54. Una parte de implicaciones que faltan o bien las demostraciones nuevas de las implicaciones ya establecidas pueden encontrarse en las obras [I (§ 8.1), 12 (capítulo 5), 14 (capítulo 5), 17, 18 (capítulo 8, § 1), 19 (capítulos 7, 12), 20, 21 (capítulo IV § 4), 22 (§ 15.7), 23, 24]. Así por ejemplo, en el artículo original de P. Hall (Hall P., J. London Math. Soc. 1935, 10, p. 26—30) se indican las relaciones de su teorema con el de König (König D. Math. Annalen, 1916, 77, p. 453). En el artículo de Mirsky L., Perfect H.J. Math. And Appl., 1966, 15, p. 520—568 está dado el resumen de los teoremas de tipo de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Dilworth (véase Dilworth R.P. Ann of Math., 1950, 51, p. 161—166) señaló, al demostrar su teorema, la íntima relación existente entre el mismo y el teorema de P. Hall sobre el sistema de representantes distintos. Ford y Fulkerson [20] obtuvieron, a partir de su teorema sobre el flujo máximo expresado en números enteros y corte mínimo (Ford L.R., Fulkerson D.R. Canad. J. Math., 1956, 8, p. 399—404), los teoremas de König, Menger, Dilworth y P. Hall (véanse teorema 4.1, 4.2; capítulo II § 8, teorema 10.1 en [20]). Robacker (Robacker J.T. RAND Corporation, RM—1948, 1955) dedujo el teorema sobre el flujo máximo y corte mínimo a partir del teorema de

Menger. *Harary* [12] obtuvo, partiendo del teorema original de Menger (Menger K. *Fund. Math.*, 1927, 10, p. 96—115), diferentes teoremas de tipo de Menger, entre los cuales figuran el teorema sobre el flujo máximo expresado en números enteros y el corte mínimo, el teorema de König, de P. Hall, de Dilworth y otros. Ore en [19] expuso detalladamente las relaciones existentes entre los teoremas de Menger y König sobre las combinaciones de pares para grafos bipartidos.

## § 2. Retículos

7.58. Pongamos  $a = \sup A$  y  $a_\alpha = \sup A_\alpha$ . Por cuanto  $a \geq x_\alpha$  para todo  $x_\alpha \in A$ , entonces  $a \geq a_\alpha$  para todo  $\alpha$ . Si  $v \geq a_\alpha$  para todo  $\alpha$ , entonces  $v \geq x$  para cada  $x_\alpha \in A$ , y, por tanto,  $v \geq x$  para cualquier  $x \in A$ . Por eso,  $v \geq a$ , y de la definición obtenemos  $\sup A = a = \sup a_\alpha = \sup \{\sup A_\alpha\}$ .

7.60. Sea, por ejemplo,  $P = \{a, b, c, d\}$ ,  $Q = \{a, b, c\}$  (fig. 7.6'), entonces  $\sup_Q \{a, b\} = c$ ,  $\sup_P \{a, b\}$  no existe.

7.65. El pentágono y el diamante son retículos.  $P$  (6) no es un retículo.

7.74. Muéstrase que  $a = b = c = a \vee b \vee c$ . En efecto,  $a \vee b \vee c = (a \vee a) \vee \vee b \vee c = a \vee (a \vee b \vee c) = a \vee (a \wedge (b \wedge c)) =$  (por la propiedad de absorción)  $= a$ .

7.75. Véase la demostración del teorema 21 § 2, cap. 8 [1].

7.76. Por razonamientos duales llegaremos a las mismas deducciones.

7.80. Véase el teorema 22 § 2, cap. 8 [1].

7.81. Los retículos completos son, por ejemplo, el segmento  $[0, 1]$  con orden habitual; el booleano  $\mathcal{P}(S_n)$ , toda cadena finita.

7.82. Todo retículo completo tiene 0 y 1. Por eso el retículo de números enteros con orden corriente no es un retículo completo.

7.87. Si  $\varphi: L_0 \rightarrow L_1$  es un homomorfismo, entonces  $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$  para cualesquiera  $a, b \in L_0$ . Supongamos que  $a, b \in L_0$  y  $a \leq b$  en  $L_0$ . Entonces  $b = a \vee b$ , y, por lo tanto,  $\varphi(b) = \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ , es decir,  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$  en  $L_1$ . De este modo, el homomorfismo  $\varphi$  es también una aplicación isotona. La afirmación inversa no es cierta. Por ejemplo, la aplicación isotona

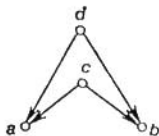


Fig. 7.6'.

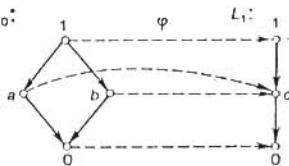


Fig. 7.7'.

$\varphi: L_0 \rightarrow L_1$ , expuesta en la fig. 7.7', donde  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b) = c$ ,  $\varphi(1) = 1$ , no es un homomorfismo, puesto que  $\varphi(a \vee b) = \varphi(1) = 1 \neq c = c \vee c = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ .

7.90. Por cuanto  $a \leq x$  para cualquier  $x \in A$ , entonces  $\varphi(a) \leq \varphi(x) = x$  para todo  $x \in A$ , y, por consiguiente,  $\varphi(a) \leq a$ . La desigualdad inversa se deduce de la definición del operador de clausura.

7.91. Sea 1 la unidad de un retículo completo  $P$ . Por cuanto  $\varphi(1) \geq 1 \geq \varphi(1)$ , entonces 1 pertenece a  $L$  y es, evidentemente, la unidad de este conjunto parcialmente ordenado. Si  $A$  es un subconjunto no vacío del conjunto  $L$ , el elemento  $a = \inf_P A$  será, de acuerdo con el problema 7.90,  $\varphi$ -cerrado. Por supuesto,  $a \leq x$  para cualquier  $x \in A$ . Si  $v \in L$  y  $v \leq x$  para cualquier  $x \in A$ , entonces  $v \leq a$ , de suerte que  $a = \inf_L A$ . Ahora, del problema 7.86 concluimos que  $L$  es un retículo completo. Supongamos luego que  $b = \sup_P A$  y  $\bar{b} = \sup_L A$ . Está claro que  $\bar{b} \in L$  y  $b \geq \bar{b}$ , puesto que  $\bar{b} \geq x$  para todos los  $x \in A$ . De aquí que  $\bar{b} = \varphi(\bar{b}) \geq \varphi(b)$ . La desigualdad  $\bar{b} \leq \varphi(b)$  se verifica, puesto

que  $\varphi(b) \geq \varphi(x) = x$  para todo  $x \in A$ , de modo que  $b = \varphi(b)$ , lo que se trataba de demostrar.

7.94. Un pentágono (véase la fig. 7.6), por ejemplo, no es un retículo modular. Efectivamente,  $a > b$  pero  $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge c) \vee b$ , puesto que  $(a \wedge c) \vee b = 0 \vee b = b$ , y  $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$ .

7.96. 7.102. 7.109. Véase los teoremas 23, 24 y 30 del § 2, capítulo 8 [1].

7.97. Sea  $L$  un retículo modular. Entonces, según la definición, si  $b \leq a$ , tenemos  $b \wedge (c \vee a) = (b \wedge c) \vee a$ . Pero  $b \wedge (c \vee a) = b \wedge (b \vee c) = b$ ,  $(b \wedge c) \vee a = (a \wedge c) \vee a = a$  (hemos aprovechado las igualdades de la condición y de la propiedad de absorción). Por consiguiente,  $a = b$ .

Viceversa, si  $L$  no es un retículo modular, entonces, en virtud del problema 7.96, el retículo  $L$  contiene un pentágono (véase fig. 7.6), en el cual  $a \wedge c = b \wedge c = 0$ ,  $a \vee c = b \vee c = 1$ , pero  $a \neq b$ .

7.98. Está claro que  $\varphi$  y  $\psi$  son aplicaciones isótonas, con la particularidad de que  $\psi(\varphi(x)) = a \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$  (en virtud de la identidad de modularidad y de la condición  $x \geq a \wedge b$ ) y  $\varphi(\psi(y)) = (a \wedge y) \vee b = (a \vee b) \vee y = y$  (en virtud de la identidad de modularidad y de la condición  $y \leq a \vee b$ ). Por consiguiente  $\varphi$  y  $\psi$  son isomorfas.

7.99. Hágase uso de la afirmación del problema 7.98.

7.101 a) Tales son, por ejemplo, el pentágono (fig. 7.6), el diamante (fig. 7.7) y el retículo de un subespacio del espacio vectorial (véase el problema 7.29).

7.103. Sea  $L$  un retículo distributivo. Entonces para cualesquiera  $a, b, c \in L$  tenemos:  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ . Pero  $a \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a$ ,  $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c) = b \vee (b \wedge c) = b$ . Por consiguiente,  $a = b$ .

Viceversa, si  $L$  es un retículo no distributivo, entonces, en virtud de los problemas 7.96 y 7.102, contiene un pentágono (fig. 7.6) o un diamante (fig. 7.7), en los cuales  $a \wedge b = b \wedge c = 0$ ,  $a \vee c = b \vee c = 1$ , pero  $a \neq b$ .

7.105. Sea  $L$  un retículo modular,  $a, b, c \in L$  y  $b < a$ . Si  $a \vee c = b \vee c$ , no hay nada que demostrar. En cambio, si  $a \vee c \neq b \vee c$ , entonces  $a \not\leq b \vee c$ , y por eso  $a \wedge (b \vee c) = b$ . Al aplicar el resultado del problema 7.98 a los elementos  $b \vee c$  y  $a$ , llegamos a que  $[b \vee c, a \vee c] \cong [b, a]$ . Por cuanto  $[b, a]$  es un intervalo simple, lo es también el intervalo  $[b \vee c, a \vee c]$ , es decir,  $b \vee c < a \vee c$ . De un modo dual obtenemos la condición de recubrimiento por arriba.

7.112. b)  $\Rightarrow$  a) Sea  $a < b$ . Si  $c \leq a$ , o bien  $a \vee c \geq b$ , entonces  $b \vee c \geq a \vee c$ . Si en cambio,  $c \not\leq a$  y  $a \vee c \neq b$ , entonces  $b \wedge (a \vee c) = a$ . Sea  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = a \not\leq c$  una cadena máxima en el intervalo  $[a, a \vee c]$ . Por cuanto  $b > a$ ,  $a_1 > a$  y  $b \neq a_1$ , tenemos  $b \vee a > a_1$ . Demostremos por inducción que  $b \vee a_i > a_i$  para cualesquiera  $i = 1, 2, \dots, n$ . De este modo,  $b \vee a_n > a_n$ , es decir,  $b \vee c > a \vee c$ .

a)  $\Rightarrow$  c). Esta afirmación es obvia, puesto que si  $x < y$  en  $C$ , entonces  $c \vee x \leq c \vee y$ .

c)  $\Rightarrow$  d). De la condición c) se deduce con toda evidencia que  $L$  es un retículo semimodular. Por eso, en virtud del problema 7.109, en  $L$  se cumple la condición de Jordan—Hölder. Sea  $a \wedge b = c_0 < c_1 < \dots < c_r = b$  una cadena máxima en el intervalo  $[a \wedge b, b]$ . De acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de esta cadena es igual a  $r(b) - r(a \wedge b)$ . Debido a c)

$$a \vee (a \wedge b) = a = (a \vee c_0) \leq (a \vee c_1) \leq \dots \leq (a \vee c_r) = a \vee b$$

es también una cadena máxima, pero en el intervalo  $[a, a \vee b]$ . La longitud de esta cadena no sobrepasa la de la primera (algunos elementos pueden coincidir), es decir, no es superior al número  $r(b) - r(a \wedge b)$ . Por otra parte, de acuerdo con la condición de Jordan—Hölder, la longitud de la cadena citada es igual a  $r(a \vee b) - r(a)$ . Por eso  $r(b) - r(a \wedge b) \geq r(a \vee b) - r(a)$ , lo que se trataba de demostrar.

d)  $\Rightarrow$  b). Sean  $a, b \in L$  tales que  $a > (a \wedge b)$ ,  $b > (a \wedge b)$  y  $a \neq b$ . En virtud de los problemas 7.109 y 7.111,  $r(a) = r(b) = r(a \wedge b) + 1$ . Sustituamos estas igualdades en la desigualdad de d) y obtenemos que  $r(a \vee b) \leq r(a) + 1$  y  $r(a \vee b) \leq r(b) + 1$ . De aquí se deduce inmediatamente que  $(a \vee b) \geq a$  y  $(a \vee b) \geq b$ . Mostremos que  $a \vee b \neq a$ . Por reducción al absurdo: sea  $a \vee b = a$ . Entonces  $a > b$  y  $a \wedge b = b$ , mas esto contradice el hecho de que  $b > (a \wedge b)$ . Por consiguiente,  $(a \vee b) > a$ . De un modo análogo se comprueba que  $(a \vee b) > b$ .

7.115. Si  $p \leq a$ , entonces  $p \vee a = a$ , y, por consiguiente,  $a \vee q = a \vee p$ . Sea  $p \not\leq a$ . Por cuanto el retículo  $L$  es semimodular, tenemos  $0 < p \vee 0 < q$ ,  $a \leq a \vee p$ ,  $a \leq a \vee q$ . Por consiguiente,  $a < a \vee q = a \vee p$ .

7.116. Hemos demostrado que a)  $\Rightarrow$  b) (problema 7.105), b)  $\Rightarrow$  d) (problemas 7.112 y 7.113), a)  $\Leftrightarrow$  c) (problema 7.96). Para dar por terminada la demostración de equivalencia de las afirmaciones, mostremos que d)  $\Rightarrow$  c). Supongamos que  $L$  contiene un pentágono  $\{0, a, b, c, 1\}$  (fig. 7.6) y que para  $L$  se cumple la condición d). Entonces  $r(a) + r(c) = r(a \vee c) + r(a \wedge c) = r(1) + r(0) = r(b \vee c) + r(b \wedge c) = r(b) = r(c)$ . De donde tenemos  $r(a) = r(b)$ , lo que es imposible, puesto que  $b < a$ . Hemos llegado a una contradicción con una suposición. Por consiguiente,  $L$  no contiene pentágonos.

7.117. En virtud de la afirmación d) del problema 7.112 y de la desigualdad  $r(x) \geq 0$ , para todo  $x \in L$  obtenemos  $r(x \vee y) \leq r(x) + r(y)$ . De aquí, por inducción tenemos

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \leq r(x_1) + r(x_2) + \dots + r(x_n).$$

7.118. Es evidente que  $p \wedge a \leq p$ . Si  $p \wedge a = p$ , entonces  $p \leq a$ . Si  $p \wedge a < p$ , entonces  $p \wedge a = 0$ . En virtud del problema 7.117,  $r(p \vee a) \leq r(p) + r(a) = 1 + r(a)$ . Por cuanto  $p \not\leq a$ , tenemos  $r(p \vee a) \neq r(a)$ , de donde  $r(p \vee a) = r(a) + 1$ .

7.119. a)  $\Rightarrow$  b). Si  $x \in [a \wedge b, b]$ , entonces  $x \leq b$ , y por eso  $\varphi(a \vee x) = (a \vee x) \wedge b =$  (en virtud de  $aMb$ )  $= x \vee (a \wedge b) = x$ .

b)  $\Rightarrow$  c). Sea  $x, y \in [a \wedge b, b]$ ,  $\psi(x) = \psi(y)$  y  $x \neq y$ , es decir,  $\psi$  no es biunívoca. Entonces  $\psi(x \vee y) = \psi(x) = \psi(y)$  y  $x < x \vee y$ , o bien  $y < x \vee y$ . Sea, por ejemplo,  $x < x \vee y$ . Por la condición b) existe un elemento  $z \in [a \vee b]$  tal que  $\varphi(z) = x$ . Por cuanto  $z \geq x$  y  $z \geq a$ , concluimos que  $z \geq x \vee a = \psi(x) = \psi(x \vee y)$ . De este modo,  $z \geq x \vee y$ . Por eso  $\varphi(z) \geq \varphi(x \vee y) = (x \vee y) \wedge b = x \vee y > x$ , lo que es imposible. Esto significa que  $\psi$  es una aplicación biunívoca.

c)  $\Rightarrow$  d). Sea  $\psi$  una aplicación biunívoca y para cierto  $x \in [a \wedge b, b]$ :  $\varphi\psi(x) \neq x$ , es decir,  $x < (x \vee a) \wedge b = x'$ . Por ser isótonas las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$ , tenemos  $\psi\varphi\psi(x) = \psi(x)$  para todo  $x \in [a \wedge b, b]$ . Pero en tal caso  $\psi(x') = \psi\varphi\psi(x) = \psi(x)$  y, por consiguiente,  $\psi$  no es una aplicación biunívoca. Esto quiere decir que  $\varphi\psi(x) = x$  para cualquier  $x \in [a \wedge b, b]$ .

d)  $\Rightarrow$  a). Sea  $\varphi\psi(y) = y$  para todo  $y \in [a \wedge b, b]$  y  $x \leq b$ . Pongamos que  $y = x \vee (a \wedge b)$ . Es evidente que  $y \in [a \wedge b, b]$  y, por consiguiente,  $\varphi\psi(y) = y$ , pero  $\varphi\psi(y) = (y \vee a) \wedge b = (x \vee (a \wedge b) \vee a) \wedge b = (x \vee a) \wedge b$ , es decir,  $x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$ . Quiere decir,  $aMb$ .

7.120. Sea  $L$  un retículo semimodular de longitud finita. Entonces, si  $C$  es una cadena máxima en el intervalo  $[a \wedge b, b]$  de longitud  $r(b) - r(a \wedge b)$ , resulta que  $\mathcal{B} = \{a \vee x \mid x \in C\} = \{\psi(x), x \in C\}$  es la cadena máxima de longitud  $r(a \vee b) - r(a)$  en el intervalo  $[a, a \vee b]$  (véase el problema 7.112). de  $aMb$  se deduce que la aplicación  $\psi$  es biunívoca. Por consiguiente,  $|\mathcal{B}| = |C|$  y

$$r(b) - r(a \wedge b) = r(a \vee b) - r(a).$$

Viceversa, si la condición  $aMb$  es falsa, entonces, en virtud del problema 7.119, la aplicación  $\psi$  no es biunívoca y puede elegirse una cadena  $C$  que contenga los elementos  $x, y \in [a \wedge b, b]$  tales que  $x \neq y$  y  $\psi(x) = \psi(y)$ . En este caso  $|\mathcal{B}| < |C|$ , de donde  $r(b) - r(a \wedge b) > r(a \vee b) - r(a)$ , lo que se trataba de demostrar.

7.122. La necesidad se deduce del problema 7.120. Demostremos la suficiencia sin suponer siquiera que la longitud del retículo  $L$  es finita. Supongamos que  $a, b, c$  son elementos del retículo  $M$ -simétrico  $L$  y que  $b > a$ . Si  $b \vee c = a \vee c$ , no hay nada que demostrar. Si  $b \vee c > a \vee c$ , entonces para un elemento  $d = a \vee c$  tenemos  $b \vee d = a, b \vee d = b \vee c$ . Se debe demostrar que  $b \vee d > d$ . En efecto, sea  $b \vee d > x \geq d$ . Entonces  $x \not\geq b$ , por lo que  $b \vee x = a$  y  $b \vee x = b \vee d$ . Por cuanto  $b > b \vee x$ , concluimos que  $\phi$  aplica el intervalo  $[x, x \vee b]$  sobre el intervalo  $[x \vee b, b]$ . En virtud del problema 7.119 tenemos  $xMb$ . Por cuanto  $bMx$  es  $M$ -simétrico, en este caso para cualquier  $y \leq x$  se verifica la igualdad  $y \vee (b \wedge x) = (y \vee b) \wedge x$ . Sea  $y = d$ . Entonces  $d = d \vee (b \wedge x) = (d \vee b) \wedge x = x$ , es decir,  $b \vee c > a \vee c$ .

7.123. 7.124. Véanse los teoremas 32 y 33 del § 2, capítulo 8 [1].

7.126. Por cuanto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son independientes, entonces

$$r(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) = r(x_1) + r(x_2) + \dots + r(x_n) \quad (7.4')$$

Según la condición de semimodularidad para cualesquiera  $x, y \in L$  tenemos

$$r(x) + r(y) \geq r(x \vee y) + r(x \wedge y).$$

Podemos, pues, escribir para cualesquiera elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$r(x_1 \vee \dots \vee x_n) \leq r(x_1 \vee \dots \vee x_{n-1}) + r(x_n) - r((x_1 \vee \dots \vee x_{n-1}) \wedge x_n),$$

con la particularidad de que en virtud del problema 7.120, la igualdad (7.4') se verifica cuando y sólo cuando

- $x_1, \dots, x_{n-1}$  y  $x_n$  es un par modular;
- $(x_1 \vee \dots \vee x_{n-1}) \wedge x_n = 0$ ;
- $x_1, \dots, x_{n-1}$  son elementos independientes.

Procediendo de este modo en adelante, llegaremos, razonando análogamente para el conjunto independiente  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , a la afirmación del problema.

7.128. a)  $\Rightarrow$  b). Es evidente.

b)  $\Rightarrow$  c). Sea  $(a_1 \vee \dots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Demostremos por inducción respecto de  $i$  que  $r(a_1 \vee \dots \vee a_i) = i$ . Para  $i = 1$  la afirmación es verdadera. Si  $r(a_1 \vee \dots \vee a_i) = i$ , entonces, en vista de la semimodularidad resulta que  $(a_1 \vee \dots \vee a_i) < (a_1 \vee \dots \vee a_i \vee a_{i+1})$  y, por eso,  $r(a_1 \vee \dots \vee a_i \vee a_{i+1}) = r(a_1 \vee \dots \vee a_i) + 1 = i + 1$ .

c)  $\Rightarrow$  a). Para demostrar, mostremos que el conjunto de átomos  $X$  satisface a condición del problema 7.123. De la condición  $r(a_1 \vee \dots \vee a_n) = n$  tenemos que  $r(\sup A) = |A|$ , cualquier que sea el subconjunto  $A \subseteq X$ , de suerte que la aplicación  $\phi: A \rightarrow \sup A$  es biunívoca. La aplicación  $\phi$  conserva, evidentemente, las uniones. Tomemos  $A, B \subseteq X$  y sea  $a = \inf(\sup A, \sup B)$ ,  $b = \sup\{A \cap B\}$ . Entonces  $a \geq b$  y de la condición de semimodularidad resulta que

$$r(\sup A) + r(\sup B) \geq r(a) + r(\sup\{A \cup B\}),$$

de modo que  $|A| + |B| \geq r(a) + |A \cup B|$ . De aquí,  $r(a) \leq |A| + |B| - |A \cup B| = |A \cap B|$ . Por otra parte,  $r(a) \geq r(b) = |A \cap B|$ . Por consiguiente,  $r(a) = r(b)$  y  $a = b$ , es decir,  $\inf(\sup A, \sup B) = \sup(A \cap B)$ .

7.130. Los complementos relativos de  $b \in L$  en el intervalo  $[e, 1]$  serán tanto elemento  $c$ , como elemento  $d$  (esto también sirve de respuesta a la última pregunta del problema.) El complemento relativo del elemento  $a$  en el intervalo  $[0, b]$  será el elemento  $e, y$ , viceversa, de complemento relativo a  $e$  en el intervalo  $[0, b]$  sirve el elemento  $a$ . El retículo  $L$  no es un retículo con complementos ni tampoco un retículo con complementos relativos, puesto que el elemento  $b$ , por ejemplo, carece de complemento en el intervalo  $[0, 1]$ .

7.131. No es cierto. Por ejemplo, el retículo semimodular en la fig. 7.11 b) es un retículo con complementos, pero no con complementos relativos.

7.132. El pentágono es un retículo no modular con complementos, pero no con complementos relativos.

7.134. Sea  $d$  un complemento del elemento  $a$ . Entonces el elemento  $x = (d \vee b) \wedge c$  es un complemento relativo del elemento  $a$  en el intervalo  $[b, c]$ , a condición de que  $b \leq a \leq c$ . En efecto,  $a \wedge x = a \wedge (d \vee b) \wedge c =$  (por ser modular el retículo  $L$  y  $a \geq b$ )  $= ((a \wedge d) \vee b) \wedge c = (0 \vee b) \wedge c = b \wedge c = b$ . En virtud de la dualidad, tenemos  $a \vee x = c$ .

7.135. Si  $a > 0$ , entonces, o bien  $a$  es un átomo, o bien  $a > b > 0$  para cierto  $b \in L$ . Sea  $c$  un complemento relativo del elemento  $b$  en el intervalo  $[0, a]$ . Por inducción respecto de la longitud del intervalo  $[0, a]$  se demuestra que los elementos  $b$  y  $c$  son ambos una unión de átomos. Pero, en tal caso esto es válido también para  $a = b \vee c$ . En virtud del problema 7.134, la afirmación es cierta también para los retículos modulares de longitud finita con complementos.

7.136. Por hipótesis del problema,  $b_{i+1}$  es un complemento relativo del elemento  $a_i$  en el intervalo  $[0, a_{i+1}]$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Por consiguiente,  $a_i \wedge b_{i+1} = 0$  y  $a_i \vee b_{i+1} = a_{i+1}$ . De la segunda igualdad y de la condición de que  $a_1 = b_1$  llegamos a que  $a_i = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_i$ . Sustituyendo la expresión obtenida en la primera igualdad, obtenemos

$$(b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_i) \wedge b_{i+1} = 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Entonces, en virtud de la afirmación del problema 7.124,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  son independientes.

7.138. a) está demostrado en el problema 7.103. Demostremos b). Sean  $b_0$  y  $b_1$  los complementos de  $a$  en  $L$ . Entonces

$$b_0 = b_0 \wedge 1 = b_0 \wedge (a \vee b_1) = (b_0 \wedge a) \vee (b_0 \wedge b_1) = 0 \vee (b_0 \wedge b_1)$$

es decir,  $b_0 \leq b_1$ . Análogamente,  $b_1 = b_0 \wedge b_1$ , es decir,  $b_1 \leq b_0$ . Por eso,  $b_0 = b_1$ .

7.139. En vista del problema 7.138, para comprobar el cumplimiento de la primera identidad de De Morgan basta demostrar que

$$(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = 0 \text{ y } (a \wedge b) \vee (a^* \vee b^*) = 1.$$

La segunda identidad de De Morgan provendrá de la primera por razonamiento duales. Realicemos las operaciones correspondientes

$$(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = (\text{por ser } L \text{ distributivo}) =$$

$$= (a \wedge b \wedge a^*) \vee (a \wedge b \wedge b^*) = (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0,$$

$$\text{y } (a \wedge b) \vee (a^* \vee b^*) = (\text{por ser distributivo el retículo } L) =$$

$$= (a \vee a^* \vee b^*) \wedge (b \vee a^* \vee b^*) = (1 \vee b^*) \wedge (a^* \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$$

7.141. Demostremos que en cualquier retículo semimodular de longitud finita con complementos su unidad 1 es una unión de átomos. En efecto, si  $a$  es la unión de todos los átomos del retículo  $L$ , entonces  $a^* = 0$ , puesto que este elemento no contiene átomos. Entonces,  $1 = a \vee a^* = a \vee 0 = a$ , es decir, 1 es la unión de átomos.

Viceversa, sea  $L$  un retículo semimodular de longitud finita, en el cual su unidad 1 es una unión de átomos y  $a \in L$ . Entonces, existe una sucesión de átomos  $p_1 \leq a, p_2 \leq a \vee p_1, \dots$ , tal que para cierto  $k$  se verifique  $a \vee p_1 \vee \dots \vee p_k = 1$ , es decir,  $r(a \vee p_1 \vee \dots \vee p_k) = r(a) = k$ , de donde  $r(a \wedge (p_1 \vee \dots \vee p_k)) \leq r(a) - r(p_1 \vee \dots \vee p_k) = r(a \vee p_1 \vee \dots \vee p_k) - r(a) + k - r(a) + k = 0$ . Por consiguiente, el elemento  $a^* = p_1 \vee \dots \vee p_k$  es un complemento de  $a$  y, más aún,  $a$  y  $a^*$  forman un par modular.

7.142. En el problema 7.135 ya hemos demostrado la validez de la afirmación del problema en una dirección. Demostremos su validez en otra dirección. Sea  $L$  un retículo semimodular, en el cual cada elemento  $x \geq 0$  es una unión de átomos, y  $a \leq x \leq b$ . Entonces existe tal sucesión de átomos  $p_1, p_2, \dots, p_n \leq b$  que  $(x \vee p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k) \wedge p_{k+1} = 0$  y  $x \vee p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n = b$ . Si ponemos  $z = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ , entonces, en virtud

de la condición de Jordan—Hölder,  $r(a \vee z) = r(a) + n$ , y  $r(x \vee z) = r(a) + n = r(b)$ . Sea  $y = a \vee z$ . Entonces  $x \vee y = x \vee a \vee z = z \vee x = b$ , mientras que  $x \wedge y \geq a$  y  $r(x \wedge y) \leq r(x) + r(a \vee z) + r(x \vee y) + r(x) + r(a) + n - (r(x) + n) = r(a)$ . Esto quiere decir que  $x \wedge y = a$ , lo que se trataba de demostrar.

7.146. Hágase uso de las afirmaciones de los problemas 7.109 (condición de Jordan—Hölder para los retículos semimodulares) y 7.98 (sobre el isomorfismo de los intervalos  $[a \wedge b, a]$  y  $[b, a \vee b]$  en el retículo modular).

7.147. Hágase uso de los resultados del problema 7.146.

7.148. d) Todo intervalo de un retículo semimodular de longitud finita es, evidentemente, un retículo semimodular de longitud finita. Resta por demostrar que un intervalo arbitrario  $[a, b]$  del retículo geométrico  $L$  es puntual. Así pues, sea  $x \in [a, b]$ ,  $x \neq a$  un elemento arbitrario. Veamos los átomos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  del retículo  $L$  tales que  $x = x_1 \vee \dots \vee x_n$ . Entonces  $x = x \vee a = (x_1 \vee a) \vee \dots \vee (x_n \vee a)$ . Por ser semimodular el retículo  $L$ ,  $x_1 \vee a > a$ , siempre que  $x_1 \wedge a = 0$ . En efecto, si  $x_i \wedge a = x_i$ , entonces  $x_i \vee a = a$ . De este modo,  $x = \sup \{(x_i \vee a) \mid x_i \not\leq a\}$  es una unión de átomos del intervalo  $[a, b]$ , lo que se trataba de demostrar.

7.149. Está claro que  $b > a$  en  $L$  cuando y sólo cuando  $b = a \vee p$  para cierto  $p \in A$ . Por eso, si  $b > a$  y  $c > a$  en  $L$ , el elemento  $b \vee c = (a \vee p) \vee (a \vee q) = a \vee p \vee q$  cubre  $b$  y  $c$  en  $G$ , y, con mayor razón, en  $L$ . Esto significa que  $L$  satisface la condición del problema 7.114, es decir, es semimodular. Además, es obvio que  $L$  es un retículo puntual de longitud finita. Por consiguiente,  $L$  es un retículo geométrico.

7.150. El requisito de semimodularidad no puede ser despreciado. Cada retículo (no forzosamente semimodular) de longitud finita con complementos relativos es puntual (véase el problema 7.135). Mas, no en todo retículo puntual de longitud finita sus elementos poseen al menos un complemento (relativo). En la fig. 7.8' se aduce un ejemplo de tal retículo: el elemento  $b$  no tiene complementos.

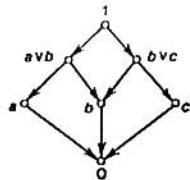


Fig. 7.8'.

7.151. Todo retículo  $L$  de longitud finita con complementos relativos es puntual (problema 7.135); la condición a) del problema es equivalente a la condición de semimodularidad del retículo  $L$  (problema 7.112) y cualquier retículo semimodular puntual es un retículo semimodular con complementos relativos (véase el problema 7.142). Por eso, si para los retículos puntuales  $L$  demostramos la equivalencia de las condiciones a), b), c) y d), el problema será resuelto.

Sea ahora  $L$  un retículo puntual de longitud finita.

a)  $\Rightarrow$  d). Ya está demostrada (véase el problema 7.128).

d)  $\Rightarrow$  b). Por cuanto  $L$  es un retículo puntual, es fácil encontrar átomos independientes  $p_1, \dots, p_n$  tales que  $p_1 \vee \dots \vee p_n = a$ . Luego, por cuanto  $a \vee q \leq a \vee p$ , entonces  $q \geq (a \vee p) \wedge q > 0$  y la sucesión  $p_1, \dots, p_n, p, q$  no es independiente. En tal caso no será independiente, en virtud de la condición d), la sucesión  $p_1, \dots, p_n, q, p$ . Esto quiere decir que  $p \geq (a \vee q) \wedge p > 0$ . Por consiguiente,  $p \leq a \vee q$  y  $a \vee p \leq a \vee q$ . De este modo,  $a \vee p = a \vee q$ .

c)  $\Rightarrow$  b). En efecto, si  $a < b \leq a \vee p$ , entonces, por cuanto  $L$  es un retículo puntual, existe en él un átomo  $q$  que está contenido en  $b$  y no está contenido en  $a$ . Está claro que  $a < a \vee q \leq b$ . De acuerdo con la condición c) del problema,  $a \vee p = b$ , y, por tanto,  $a \vee p$  cubre  $a$ .

b)  $\Rightarrow$  a). En efecto, si  $a$  y  $b$  cubren  $c (= a \wedge b)$  y  $L$  es un retículo puntual, existen los átomos  $p$  y  $q$  tales que  $c < c \vee p \leq a$ ,  $c < c \vee q \leq b$ . De donde,  $c \vee p = a$  y  $c \vee q = b$ . Por eso,  $a \vee b = c \vee p \vee q$ , y este elemento cubre, en virtud de la condición b),  $a = c \vee p$  y  $b = c \vee q$ .

7.152. Sea  $L$  un retículo semimodular. Hace falta mostrar que para cual-

quier  $a \in L$  y cualquier átomo  $p \in L$ , si  $b \leq a$ , resulta  $a \wedge (p \vee b) = (a \wedge p) \vee \vee b$ . En vista del problema 7.118,  $p \leq a$ , o  $a \vee p > a$ . Si  $p \leq a$ , tenemos  $p \wedge a = p$ , de donde  $(a \wedge p) \vee b = p \vee b$ . Mas, ya que  $b \leq a$ , entonces  $p \vee b \leq a$ , y, por consiguiente,  $a \wedge (p \vee b) = b \vee p$ . Si, en cambio,  $p \not\leq a$ , entonces  $p \not\leq b$ , y, por consiguiente,  $b \vee p > b$ . Por eso,  $a \wedge (b \vee p) = b = (a \wedge p) \vee b$ , pues  $p \wedge a = 0$  cuando  $p \not\leq a$ .

Viceversa, supongamos que  $pMa$ , es decir,  $a \wedge (b \vee p) = (a \wedge p) \vee b$  para cualesquiera  $b \leq a$  y todos los átomos  $p$ . Por cuanto cada elemento del retículo es, por hipótesis, una unión de átomos, será suficiente convencerse de que si  $p$  es un átomo, tendremos  $p \leq a$  o bien  $a \vee p > a$  en  $L$ , puesto que en este caso el retículo será, en virtud del problema 7.151, geométrico y, por consiguiente, semimodular. Sea  $p \not\leq b$  y supongamos que existe un elemento  $c$  tal que  $b \leq c \leq b \vee p$ . Si  $p \leq c$ , entonces  $b \vee p \leq c \leq b \vee p$ , de donde  $c = b \vee p$ . En cambio, si  $p$  no está contenido en  $c$ , entonces  $c = c \wedge (b \vee p) = b \vee (c \wedge p) = b$ . De suerte que  $b \vee p$  cubre  $b$ , lo que se trataba de demostrar.

7.156. Condición a). Es evidente. Demostremos b). Para un subconjunto arbitrario  $B \subseteq A$  sea  $b = \sup B$ . Entonces  $r(b) \leq r(b \vee p)$  para cada átomo  $p \in A$ , puesto que  $b \leq b \vee p$ . Por ser el retículo  $L$  semimodular, tenemos  $r(b \vee p) + r(b \wedge p) \leq r(b) + r(p)$ . De este modo,  $r(b \vee p) \leq r(b) + 1$ , o bien  $r(B) \leq r(B \cup \{p\}) \leq r(B) + 1$ .

Para demostrar la condición c), supongamos que  $b \vee p = b$  y  $b \vee q = b$ . Por consiguiente,  $b \vee p \vee q = b$ . De aquí proviene c).

7.160. Supongamos que  $a \sim b$  y elijamos entre todos los  $x \in L$ , que satisficieran las condiciones  $a \vee x = b \vee x$ , y  $a \wedge x = b \wedge x = 0$ , un elemento  $x$ , en el cual  $r(x) = m$  es el mínimo de todos los valores posibles. Sean  $x_1, \dots, x_m$  los elementos de la base del intervalo  $[0, x]$  del retículo  $L$ . Entonces  $C = \{a, b, x_1, \dots, x_m\}$  es un conjunto dependiente, puesto que  $r(a \vee b \vee x) = r(a \vee x) = m + 1 < m + 2$ . Mostremos que cada subconjunto del conjunto  $C$  es independiente. De aquí se deducirá que  $C$  es un ciclo que contiene a  $a$  y  $b$ . Sea  $x^i = x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_m$ , donde  $i = 1, 2, \dots, m$ . Entonces de  $b \leq a \vee x^i$  se desprende que  $a \vee x^i = b \vee x^i$ , puesto que  $r(a \vee \vee x^i) = 1 + (m - 1) = r(b \vee x^i)$ , lo que contradice la elección del elemento  $x$ . De este modo, para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ :  $a \vee b \vee x^i = a \vee x = b \vee x$ . Por cuanto  $r(a \vee b \vee x^i) = m + 1$ , cada subconjunto del conjunto  $C$  debe ser independiente.

Viceversa, sea  $C = \{a, b, x_1, \dots, x_m\}$  un ciclo del retículo  $L$ . Pongamos  $x = x_1 \vee \dots \vee x_m$ . Entonces  $a \vee x = a \vee b \vee x = b \vee x$ , puesto que  $r(a \vee x) = r(b \vee x) = r(a \vee b \vee x)$ , y  $a \wedge x = 0 = b \wedge x$ , pues,  $r(a \wedge x) \leq r(a) + r(x) - r(a \vee x) = 0$  y  $r(b \wedge x) \leq r(b) = r(x) - r(b \vee x) = 0$ .

7.161. La perspectividad es, obviamente, una relación binaria reflexiva y simétrica. Supongamos que la perspectividad no es transitiva. Valiéndonos de la caracterización del problema 7.160, mostremos que tal suposición conduce a una contradicción.

Elijamos en el retículo  $L$  unos ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , tales que el valor de  $|C_1 \cup C_2|$  es mínimo entre todos los ciclos, para los cuales existen los átomos  $a, b, c \in L$  tales que  $a, b \in C_1$ ;  $b, c \in C_2$ , mas tanto  $a$  como  $b$  no están situados en ningún ciclo común. Entonces, en virtud de la condición c) del problema 7.158, se encontrará un ciclo  $C'_1$  tal que  $a \in C'_1 \not\subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{b\}$ . Por cuanto  $C_1 \setminus C_2$  es un conjunto independiente, resulta que  $C'_1 \not\subseteq C_1 \setminus C_2$ . Por consiguiente,  $C'_1$  y  $C_2$  se intersecan. De acuerdo con la elección de los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ , tenemos  $|C'_1 \cup C_2| = |C_1 \cup C_2|$  y, en particular,  $C_1 \setminus C_2 \subseteq C'_1$ . Análogamente, podemos encontrar tal ciclo  $C'_2$  que  $c \in C'_2 \not\subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{b\}$ . El ciclo  $C'_2$  debe intersecarse con  $C_1 \setminus C_2$ , y, por tanto,  $C_1$  y  $C_2$  tienen una intersección no vacía. Pero, entonces  $|C'_1 \cup C'_2| < |C_1 \cup C_2|$ , lo que contradice la manera de elegir los ciclos  $C_1$  y  $C_2$ .

7.163. Observemos que si  $A \cup \{p\}$  es un conjunto de átomos del retículo



$L$  tal que  $p \leq \sup A$ , entonces  $p \sim a$  para cierto  $a \in A$ . En efecto, elijamos un subconjunto independiente mínimo  $A' \subseteq A$  tal que  $p \leq \sup A'$ . En este caso  $A' \cup \{p\}$  será el conjunto dependiente de átomos, en el cual cada uno de sus subconjuntos es independiente. Por eso  $A' \cup \{p\}$  es un ciclo. Por consiguiente,  $p \sim a$  para cada  $a \in A'$ . Se ha considerado el caso en que  $p \notin A$ . El caso de  $p \in A$  es trivial.

Supongamos ahora que no todos los pares de átomos del retículo geométrico  $L$  son perspectivos. Elijamos un átomo arbitrario  $a \in L$ . Sea  $[a] = \{b \in L \mid b \sim a\}$  y  $z_1 = \sup [a]$ . Mostremos que  $[a]$  es un conjunto de todos los átomos del intervalo  $[0, z_1]$ . Luego, suponiendo que  $z_2 \in L$  es igual a la unión de todos los átomos del retículo  $L$ , que no yacen en  $[0, z_1]$ , demos que  $L = [0, z_1] \cup L_2$  y  $L_2 = [0, z_2]$  nos dan la descomposición del retículo  $L$ . En efecto, elijamos un elemento arbitrario  $x \in L$  y pongamos  $x_1 = x \wedge z_1$  y  $x_2 = x \wedge z_2$ . Por cuanto el conjunto de átomos de los subretículos  $L_1$  y  $L_2$  no se intersecan y los átomos de los intervalos  $[0, x_1]$  y  $[0, x_2]$  se complementan en el conjunto de átomos del intervalo  $[0, x]$ , entonces  $x = x_1 \vee x_2$ . Sean  $X_1$  y  $X_2$  las bases de los intervalos  $[0, x_1]$  y  $[0, x_2]$ , respectivamente. Si suponemos que  $X_1 \cup X_2$  es un conjunto dependiente de átomos, entonces  $X_1 \cup X_2$  debe contener un ciclo en el que figuran tanto los átomos de  $L_1$ , como los de  $L_2$ , lo que contradice el hecho de que ningún átomo de  $L_1$  es perspectivo a ningún átomo de  $L_2$ . Entonces,  $X_1 \cup X_2$  es el conjunto independiente de átomos y, por lo tanto, una base en  $[0, x]$ . De aquí,  $r(x) = r(x_1) + r(x_2)$ . Si  $x'_1 \leq z_1$  y  $x'_2 \leq z_2$  satisfacen la igualdad  $x = x'_1 \vee x'_2$ , entonces  $x'_1 \leq x_1$  y  $x'_2 \leq x_2$ . Además,  $r(x'_1) + r(x'_2) \geq r(x) = r(x_1) + r(x_2)$ . De donde  $r(x'_1) = r(x_1)$  y  $r(x'_2) = r(x_2)$ , y, por consiguiente,  $x'_1 = x_1$  y  $x'_2 = x_2$ .

Demostremos la afirmación del problema en dirección inversa. Supongamos que el retículo geométrico  $L$  es descomponible con los intervalos correspondientes  $L_1$  y  $L_2$ . Elijamos unos átomos arbitrarios  $a \in L_1$  y  $b \in L_2$ . Si  $a$  y  $b$  son perspectivos, puede encontrarse un elemento  $x \in L$  tal que  $a \vee x = b \vee x$  y  $a \wedge x = b \wedge x = 0$ . Pero en este caso la representación de  $x = x_1 \vee x_2$  con relación a los intervalos  $L_1$  y  $L_2$  lleva consigo la igualdad  $(a \vee x_1) \vee x_2 = x_1 \vee (x_2 \vee b)$ . Por consiguiente,  $a \vee x_1 = x_1$ , y, de este modo,  $a \leq x_1 \leq x$ . Se ha obtenido una contradicción con lo que  $a \wedge x = 0$ , lo que se requería demostrar.

7.164. Hágase uso de la solución del problema 7.163.

7.165. Supóngase que la afirmación del problema no es cierta y  $x, y, z$  es uno de los contraejemplos con un valor mínimo de la función de rango  $r(x \vee y)$ . Pongamos que  $u = y \vee z$ . Entonces  $r(u) = r(y) + 1$ .

Si  $u = x \vee y$ , entonces, evidentemente, existe un átomo  $x' \leq x$  tal que  $u = x' \vee y$ , es decir,  $z \leq x' \vee y$ .

Si  $u < x \vee y$ , pongamos  $x = u \wedge x$ . Entonces  $\bar{x} \vee y = (u \wedge x) \vee y = u \wedge (x \wedge y) = u$ , puesto que  $M$  es un retículo modular.

Por cuanto  $r(\bar{x} \vee y) < r(x \vee y)$ , existe un átomo  $x' \leq x$  tal que  $z \leq x' \vee y$ , lo que contradice la manera de elegir el elemento  $x \vee y$ .

7.166. Sea  $a \sim b$ , es decir,  $a \vee x = b \vee x = 1$ , y  $a \wedge x = b \wedge x = 0$  para cierto  $x \in M$ . Entonces  $r(x \wedge (a \vee b)) = r(a \vee b) + (r(x) - r(a \vee b \vee x)) = 2 - 1 = 1$ , puesto que el elemento  $a \vee b \vee x = 1$  cubre el elemento  $x$  en  $M$ . Por eso ha de existir un átomo  $c \in M$  tal que  $c \leq a \vee b$  y  $c \leq x$ , y, por cuanto  $a \wedge x = b \wedge x = 0$ , entonces  $a \neq c \neq b$ .

Vicerversa, sea  $c$  un átomo del retículo  $M$  que es distinto de  $a$  y  $b$  y tal que  $c \leq a \vee b$ . Entonces  $c$  es un complemento relativo común de los átomos  $a$  y  $b$  en el intervalo  $[0, a \vee b]$ . En este caso el elemento  $c \vee (a \vee b)^* = x$  será complemento común de  $a$  y  $b$ , cualquiera que sea el complemento  $(a \vee b)^*$  del elemento  $(a \vee b)$  en  $M$ . Por consiguiente,  $a \sim b$ , lo que se trataba de demostrar.

7.170. Hágase uso de las afirmaciones de los problemas 7.168 y 7.169

7.171. Es evidente que  $PG1$  y  $PG4$  se cumplen, con la particularidad de que  $n = r(M)$ .  $PG3$  puede no cumplirse.  $PG2$  es una consecuencia directa del pro-

blema 7.165, si ponemos  $x = q \vee t$ ,  $y = s$ ,  $y z = u$ , donde  $p, q, s, t, u$  son todos átomos del retículo modular geométrico  $M$ , lo que se muestra en la fig. 7.14.

7.172. Hágase uso de las afirmaciones que ofrecen los problemas 7.163, 7.171 y 7.172.

7.173. Sí, la respuesta se deduce inmediatamente de las afirmaciones que ofrecen los problemas 7.164 y 7.172.

7.177. Véase el teorema 37 del § 2, capítulo 8 [1].

7.179. (Dowling T. A., Wilson R.M. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1975, 47, p. 504—512; Green C. «J. Combin. Theory», 1970, p. 357—364).

7.180. (Dilworth R.P. «Ann of Math.», 1954, 60 (2), p. 359—364).

### § 3. Funciones de incidencia e inversión de Moebius

7.181.  $f = f \cdot \delta = \delta \cdot f$ . En efecto,  $\forall x, y \in P$  tales que  $x \leq y$  se tienen  $(f \cdot \delta)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) \delta(z, y) = [\delta(z, y) \neq 0 \iff z = y] = f(x, y) \times$

$\times \delta(y, y) = f(x, y)$ . Análogamente,  $(\delta \cdot f)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} \delta(x, z) f(z, y) = \delta(x, x) f(x, y) = f(x, y)$ . Sea  $f, g, h \in A(P)$ . Entonces  $(f \cdot (g \cdot h))(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) (g \cdot h)(z, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) \left( \sum_{t: z \leq t \leq y} g(z, t) h(t, y) \right) = \sum_{t: x \leq t \leq y} \left( \sum_{z: x \leq z \leq t} f(x, z) g(z, t) h(t, y) \right) = \sum_{t: x \leq t \leq y} (f \cdot g)(x, t) h(t, y) = ((f \cdot g) \cdot h)(x, y)$ .

7.183. Véase el teorema 47 del § 3, capítulo 8 [1].

7.184. Por cuanto  $\zeta(x, x) = 1 \neq 0$  para cualquier  $x \in P$ , entonces, en virtud del problema 7.183,  $\zeta$  tiene una función inversa  $\mu$ , que es para ella una función inversa (tanto izquierda, como derecha). Por consiguiente, tal definición de la función de Moebius es correcta.

7.185. La función buscada es un corolario directo de las fórmulas, obtenidas al resolver el problema 7.183, si se toma en consideración la condición de que  $\mu(x, x) = 1$  para todo  $x \in P$ .

7.186. Dicha propiedad se cumple para todas las funciones de incidencia en consideración. Se comprueba directamente. Para comprobar la igualdad con relación a la función zeta y la de Moebius, hágase uso de los resultados del problema 7.183.

7.187. Para a) y b) hágase uso del binomio de Newton;

c)  $\kappa \cdot \zeta(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} \kappa(x, z) \zeta(z, y) = [\kappa(x, z) \neq 0 \text{ cuando } y \text{ sólo cuando } x < z] = \sum_{z: x < z \leq y} \kappa(x, z) \zeta(z, y) = \text{puesto que } \zeta(z, y) = 1 \text{ para todo } z \leq y = \sum_{z: x < z \leq y} \kappa(x, z)$ . Pero, si  $\kappa(x, z) \neq 0$ , entonces  $\kappa(x, z) = 1$ .

La validez de la identidad c) queda demostrada;

d) la identidad d) se obtiene de c) de un modo dual.

Para e), f), g), hágase uso de la siguiente fórmula

$$f^h(x, y) = \sum_{z_1, z_2, \dots, z_{h-1}: x \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{h-1} \leq y} f(x, z_1) f(z_1, z_2) \dots f(z_{h-1}, y),$$

que se demuestra fácilmente por inducción, como también de los siguientes hechos fácilmente comprobados:

para e):  $\eta(x, z_1) \cdot \eta(z_1, z_2) \cdot \dots \cdot \eta(z_{h-1}, y) = 1$  cuando y sólo cuando  $x < z_1 < z_2 < \dots < z_{h-1} < y$ ;

para  $f) \times (x, z_1) \times (z_1, z_2) \dots \times (z_{h-1}, y) = 1$  cuando y sólo cuando

$$x \prec z_1 \prec z_2 \prec \dots \prec z_{h-1} \prec y;$$

para  $g) \zeta(x, z) \zeta(z, y) = 1$  cuando y sólo cuando  $x \leq z \leq y$ .

7.188. Véase la demostración del teorema 48, § 8.3 en [1].

7.189. De  $[x \wedge x, x \vee x] \cong [x \wedge x, x] \times [x \wedge x, x]$  tenemos que  $f(x, x) = f(x, x) f(x, x)$ . Por ser invertible la expresión,  $f(x, x) \neq 0$  para todo  $x \in P$ . Por consiguiente,  $f(x, x) = 1$ .

7.190. En efecto, si  $f, g \in A(P)$  y  $\varphi$  es un isomorfismo del intervalo  $[x, y]$  en  $[a, b]$ , entonces

$$(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = f(a, b) + g(a, b) = (f+g)(a, b);$$

$$(\alpha f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y) = \alpha \cdot f(a, b) = (\alpha f)(a, b);$$

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(\varphi(x), \varphi(z)) g(\varphi(z), \varphi(y)) =$$

$$= \sum_{z: a = \varphi(x) \leq \varphi(z) \leq \varphi(y) = b} f(a = \varphi(x), \varphi(z)) g(\varphi(z), b = \varphi(y)) = (f * g)(a, b).$$

7.191. Hágase uso del resultado del problema 7.183.

7.192. Todas las funciones de incidencia que se consideran pertenecen al álgebra estándar  $S(P)$ . La pertenencia de la función de Möbius se desprende directamente del problema 7.191.

7.193. Sean  $f$  y  $g$  las funciones invertibles multiplicativas de incidencia del álgebra estándar  $S(P)$ . Comprobemos que la función  $f * g$  es también multiplicativa. Admitamos que

$$[x \wedge y, x \vee y] = [x \wedge y, x] \times [x \wedge y, y],$$

entonces  $(f * g)(x \wedge y, x \vee y) = \sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f(x \wedge y, z) g(z, x \vee y) =$  (puesto que

$[x \wedge y, z] \cong [x \wedge y, z \wedge x] \times [x \wedge y, z \wedge y]$ ,  $[z, x \vee y] \cong [z, z \vee x] \times [z, z \vee y]$  y  $f, g$  son funciones multiplicativas) =

$$\sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f(x \wedge y, z \wedge x) f(x \wedge y, z \wedge y) \times$$

$$\times g(z, z \vee x) g(z, z \vee y) =$$
 (puesto que  $[z, z \vee x] \cong [z \wedge x, x]$ ,  $[z, z \vee y] \cong [z \wedge y, y]$  y  $f, g \in S(P)$ ) =

$$\sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} (f(x \wedge y, z \wedge x) g(z \wedge x, x)) (f(x \wedge y, z \wedge y) g(z \wedge y, y)) =$$

$$\sum_{u: x \wedge y \leq u \leq x} (f(x \wedge y, u) g(u, x)) \sum_{v: x \wedge y \leq v \leq y} (f(x \wedge y, v) g(v, y)) =$$

$$(f * g)(x \wedge y, x) (f * g)(x \wedge y, y),$$
 es decir, es una función multiplicativa.

Comprobemos que  $f^{-1}$  es también una función multiplicativa. Mostremos por inducción respecto de  $l$  que la condición de multiplicatividad está cumplida para todos los intervalos de longitud no superior a  $l$ . Cuando  $l = 0$ , esto es evidente. Supongamos que esta afirmación es válida para  $l - 1$  y demos demos su validez para  $l$ . Examinemos un intervalo  $[x \wedge y, x \vee y]$  de longitud  $l$ . Entonces

$$0 = \delta(x \wedge y, x \vee y) = (f^{-1} * f)(x \wedge y, x \vee y) = \sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z) f(z, x \vee y) =$$

$$= \sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z) f(z, x \vee y) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) f(x \vee y, x \vee y) =$$

$$(en\ virtud\ de\ la\ suposición\ de\ inducción\ y\ teniendo\ presente\ que\ f(x \vee y, x \vee y) = 1) = \sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z \wedge x) f^{-1}(x \wedge y, z \wedge y) f(z, z \vee y) f(z, z \vee y) +$$

$$+ f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) =$$
 (en virtud de que  $[z, z \vee x] \cong [z \wedge x, x]$ ,  $[z, z \vee y] \cong [z \wedge y, y]$  y  $f, f^{-1} \in S(P)$ ) =

$$\sum_{z: x \wedge y \leq z \leq x \vee y} f^{-1}(x \wedge y, z \wedge x) f(z \wedge x, x) f^{-1}(x \wedge y,$$

$$\begin{aligned}
 z \wedge y) f(x \wedge y, y) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) &= (\text{designemos por } u \text{ y respectivamente } v \text{ } z \wedge x \\
 \text{y } z \wedge y \text{ teniendo presente que } [x \wedge y, x \vee y] &\cong [x \wedge y, x] x [x \wedge y, y] \text{ y } f(x, x) = 1 \\
 \text{para todo } x \in P) &= \sum_{u: x \wedge y \leq u < x} f^{-1}(x \wedge y, u) f(u, x) \sum_{v: x \wedge y \leq v < y} f^{-1}(x \wedge y, v) \times \\
 \times f(x, y) + f^{-1}(x \wedge y, x) &\sum_{v: x \wedge y \leq v < y} f^{-1}(x \wedge y, v) f(v, y) + f^{-1}(x \wedge y, y) \times \\
 \times \sum_{u: x \wedge y \leq u < x} &f^{-1}(x \wedge y, u) f(u, x) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) = (\text{en virtud de las fórmulas}
 \end{aligned}$$

que figuran en la resolución del problema 7.183 y de que  $f(x, x) = 1$  para todo  $x \in P$ )  $= (-f^{-1}(x \wedge y, x)) (-f^{-1}(x \wedge y, y)) + f^{-1}(x \wedge y, x) (-f^{-1}(x \wedge y, y)) + f^{-1}(x \wedge y, y) (-f^{-1}(x \wedge y, x)) + f^{-1}(x \wedge y, x \vee y)$ . De este modo hemos llegado a que

$$f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) - f^{-1}(x \wedge y, x) f^{-1}(x \wedge y, y) = 0$$

Por consiguiente,

$$f^{-1}(x \wedge y, x \vee y) = f^{-1}(x \wedge y, x) f^{-1}(x \wedge y, y),$$

y la demostración queda terminada.

7.194.

- a)  $\mu(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b; \\ 0, & \text{en el caso contrario;} \end{cases}$   
 b)  $\forall n, m \in N$  tenemos

$$\mu(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m; \\ -1, & \text{si } m - n = 1; \\ 0, & \text{en todos los demás casos;} \end{cases}$$

c) hágase uso del resultado del problema 7.25 y de b).  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(S_n)$  tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y| - |X|}, & \text{si } X \subseteq Y \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

d) Sea  $\mathcal{D}(n)$  un conjunto de todos los divisores enteros no negativos del número natural  $n$ , ordenado según la divisibilidad. De acuerdo con el teorema de unicidad del desarrollo de un número en factores simples,

$$\mathcal{D}(n) \cong \mathcal{D}(p_1^{\alpha_1}) \times \mathcal{D}(p_2^{\alpha_2}) \times \dots \times \mathcal{D}(p_s^{\alpha_s}).$$

Por consiguiente, resulta suficiente calcular la función de Moebius para  $\mathcal{D}(p^\alpha)$ , donde  $p$  es un número primo y  $\alpha$ , un número entero. Pero el conjunto parcialmente ordenado  $\mathcal{D}(p^\alpha)$  es una anticadena  $1 | p | p^2 | \dots | p^\alpha$ , isomorfa al subconjunto de números enteros  $\{0, 1, 2, \dots, \alpha\}$  de orden corriente, cuya función de Moebius ya está calculada en b). Por eso

$$\mu(p^i, p^j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ -1, & \text{si } j - i = 1 \\ 0, & \text{en todos los demás casos} \end{cases}$$

En virtud del problema 7.193,

$$\mu(l, m) = \begin{cases} 1, & \text{si } l = m; \\ (-1)^s, & \text{si } \frac{m}{l} = p_1 p_2 \dots p_s, \text{ donde } p_1, p_2, \dots, p_s \text{ son números} \\ & \text{primos distintos dos a dos;} \\ 0, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

e) Si  $\pi \in B(S_n)$  tiene exactamente  $k$  bloques, entonces  $\mu(\pi, 1) = (-1)^{k-1} \times (k-1)!$   
 f)  $\forall X, Y \subseteq V_n$  tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{d(Y)-d(X)} q^{\binom{d(Y)-d(X)}{2}}, & \text{si } X \subseteq Y; \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

donde  $d(X)$  es la dimensión del subespacio  $X$ .

g)  $\forall X, Y \subset \Pi_n$  tenemos

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{d(Y)-d(X)}, & \text{si } X \subset Y; \\ 0, & \text{en el caso contrario,} \end{cases}$$

donde  $d(X)$  es la dimensión de la arista de  $X$ .

7.195. Fijemos  $x$  y veamos una suma

$$S = \sum_{y: y \leq x} g(y) \mu(y, x) = \sum_{y: y \leq x} \left( \sum_{z: z \leq y} f(z) \right) \mu(y, x).$$

Aquí, en lugar de  $g(y)$  se puso su expresión en términos de  $f(z)$ . Cambiemos el orden de sumación y obtendremos:

$$S = \sum_{z: z \leq y} f(z) \sum_{y: y \leq x} \mu(y, x) = \sum_z f(z) \zeta(z, y) \sum_{y: y \leq x} \mu(y, x) = \sum_z f(z) \sum_{y: z \leq y \leq x} \zeta(z, y) \mu(y, x) = \sum_z f(z) \delta(z, x) = f(x),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.198. Hágase uso de las fórmulas de inversión de Moebius y del resultado del problema 7.194 b).

7.199. Hágase uso de las fórmulas de inversión de Moebius y del resultado obtenido en el problema 7.194 c).

7.201. Sea  $f, g \in A(P)$  y  $F = (f_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ,  $G = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , donde  $n = |P|$  y  $f_{ij} = f(x_i, x_j)$ ,  $g_{ij} = g(x_i, x_j)$ . En este caso basta mostrar que si  $h = f + g$ ,  $t = \alpha \cdot f$  y  $p = f * g$ , donde  $\alpha \in K$ , entonces  $H = F + G$ ,  $T = \alpha \cdot F$  y  $P = F \cdot G$ . Las primeras dos igualdades son evidentes. Comprobemos la tercera. En efecto,

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n f_{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^n f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = (\text{aprovechemos el que } f(x_i, x_j) = 0 \text{ cuando } x_k < x_i, \text{ es decir, } k < i, \text{ y } g(x_k, x_j) = 0 \text{ cuando } x_k > x_j, \text{ es decir, } k > j) = \sum_{k: i \leq k \leq j} f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = \sum_{x_k: x_i \leq x_k \leq x_j} f(x_i, x_k) \cdot g(x_k, x_j) = p(x_i, x_j).$$

7.202. La matriz triangular superior es invertible cuando y sólo cuando todos sus elementos que se disponen en la diagonal principal son distintos de cero. Las demás afirmaciones del problema no representan dificultades en demostrarlas. Indiquemos solamente que en la matriz  $H$  todos los valores propios son iguales a cero y la matriz es conmutativa.

7.203. Hágase uso de los problemas 7.187 y 7.202.

$$7.204. \sum_{z \in A: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \sum_{z \in A} \mu_A(x, z) \delta(\varphi(z), \varphi(y)) = \sum_{z \in A} \mu_A(x, z) \sum_{\varphi(w) \in Q} \zeta_Q(\varphi(z), \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) = \sum_{z \in A} \sum_{\varphi(w) \in Q} \mu_A(x, z) \times \zeta_A(\varphi(z), \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)).$$

En virtud de las propiedades del operador  $z \leq \varphi(w)$  cuando y sólo cuando  $\varphi(z) \leq \varphi(w)$ . Por eso  $\zeta_A(\varphi(z), \varphi(w)) = \zeta_A(z, \varphi(w))$ . Aprovechemos este hecho y, además, alteremos el orden de

sumación. Entonces 
$$\sum_{z \in A: \varphi(z) = \varphi(y)} \mu_A(x, z) = \sum_{\varphi(w) \in Q} \left( \sum_{z \in A} \mu_A(x, z) \zeta_A(z, \varphi(w)) \right) \times \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)) = \sum_{\varphi(w) \in Q} \delta_A(x, \varphi(w)) \mu_Q(\varphi(w), \varphi(y)).$$
 De aquí precisamente

proviene la afirmación del problema, puesto que si  $x = \varphi(x)$ , entonces  $\delta_A(x, \varphi(w)) = \delta_A(\varphi(x), \varphi(w)) = 1$  cuando y sólo cuando  $\varphi(w) = \varphi(x)$ . Si  $x < \varphi(w)$ , tenemos que  $\delta_A(x, \varphi(w)) = 0$ , puesto que  $x \neq \varphi(w)$  para todo  $w \in A$ , por lo que  $\varphi(w) \in Q$ , y  $x \in Q$ , pues  $x$  no es un elemento  $\varphi$ -cerrado.

7.205. Póngase en las condiciones del problema 7.204.  $A = \mathcal{P}(S)$ ,  $x = \emptyset$ ,  $y = S$  (está claro que  $\emptyset$  será 0, y el conjunto 1 del conjunto parcialmente ordenado  $Q$ ) y hágase uso de la función de Moebius para el booleano del problema 7.194.

7.206. a) Si 0 no es una intersección de cóatomos del retículo  $L$ , entonces para todo  $x \in L$  definamos el operador de la manera siguiente:

$$\varphi(x) = \inf \{c \in L \mid x \leq c \text{ -- } < 1\}.$$

Compruébese que  $\varphi$  es un operador de clausura y hágase uso de los resultados del problema 7.204.

El caso en que 1 no es una unión de átomos se obtiene por razonamientos duales.

Se procederá de un modo análogo para demostrar b).

Observemos que a) se deduce de b) de un modo trivial. En efecto, es suficiente en b) poner  $x = 0$  e  $y = 1$ .

7.207. Las afirmaciones a), b), c) y e) son válidas. De contraejemplo para la afirmación d) sirve el retículo con complementos relativos en la fig. 7.9', en

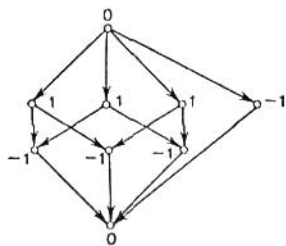


Fig. 7.9'.

la cual  $\mu(0, 1) = 0$ . Los números que están al lado con los elementos  $x$  del retículo en la fig. 7.14' denotan valores de la función de Moebius  $\mu(0, x)$ .

7.208. En virtud del problema 7.206, de  $\mu(0, 1) \neq 0$  para retículos distributivos y modulares se deduce que ellos son geométricos. Los retículos geométricos distributivos son álgebras de Boole de rango finito, y cada retículo geométrico modular indescomponible es una geometría proyectiva, la cual es isomorfa al retículo de los subespacios del espacio vectorial  $n$ -dimensional para  $n \geq 4$  (problemas 7.169 y 7.172). Al haber aprovechado las funciones de Moebius para el booleano y para el retículo de un subespacio del espacio vectorial  $n$ -dimensional, calculadas en el problema 7.194 c) y f), obtenemos la afirmación del problema. Indiquemos que los casos de  $n = 2$  y  $n = 3$  para los retículos modulares geométricos requieren un análisis especial, pero ellos no son triviales.

7.209. Sin perder la generalidad, podemos considerar que  $a < 1$ . Sea  $z \in L$  tal que  $z \vee a = 1$ . Para un  $w \in L$  arbitrario,  $w \leq z$ , definamos la aplicación  $\varphi$  del modo siguiente:

$$\varphi(w) = \begin{cases} w, & \text{si } w \vee a < 1; \\ z, & \text{si } w \vee a = 1, \end{cases}$$

la cual será un operador de clausura en  $[0, z]$ . El conjunto de todos los elementos  $\varphi$ -cerrados de  $[0, z]$  se denotará con  $Q$ . Entonces  $Q = \{w \in L \mid w = z, \text{ o bien } w < z \text{ y } w \vee a < 1 \text{ simultáneamente}\}$ . Es fácil comprobar que  $Q$  es un retículo.

En vista del problema 7.204, tenemos

$$\mu_Q(0, z) = \sum_{w \in L: \varphi(w) = \varphi(z) = z} \mu(0, w) = \sum_{w \in L: w \leq z \text{ y } w \vee a = 1} \mu(0, w) \quad (7.5')$$

Supongamos que  $F = \{w \in L \mid w \vee a = 1\}$  es un subconjunto parcialmente ordenado del conjunto  $L$ . Notemos que  $z \in F$  y  $\mu_F(x, y) = \mu(x, y)$  para todos los  $x, y \in F$ . Por eso

$$\mu_Q(0, z) = \sum_{w \in F: w \leq z} \mu_F(0, w).$$

Aplicaremos la 1ª fórmula de inversión de Moebius (véase el problema 7.195) y obtendremos

$$\mu_F(0, z) = \sum_{w \in F: w \leq z} \mu_Q(0, w) \mu_F(w, z).$$

En particular, cuando  $z = 1 \in F$ , tenemos

$$\mu_F(0, 1) = \sum_{w \in F} \mu_Q(0, w) \mu_F(w, 1)$$

o bien

$$\mu(0, 1) = \sum_{w \in L: w \vee a = 1} \mu_Q(0, w) \mu(w, 1) \quad (7.6')$$

Si en (7.6') sustituimos  $\mu_Q(0, w)$  por su expresión de (7.5'), obtendremos

$$\begin{aligned} \mu(0, 1) &= \sum_{w \in L: w \vee a = 1} \left( \sum_{v \in L: v \leq w \text{ y } v \vee a = 1} \mu(0, v) \right) \mu(w, 1) = \\ &= \sum_{w \in L: w \vee a = 1} \sum_{v \in L: v \vee a = 1} \mu(0, v) \zeta(v, w) \mu(w, 1). \end{aligned}$$

Si logramos mostrar que  $\mu_Q(0, w) = 0$  para cualquier  $w \in L$ , para los cuales  $w \vee a = 1$  y  $w \wedge a > 0$ , el problema quedará resuelto por completo. Por cuanto de  $z \wedge a = 0$  y de  $w \leq z$  se desprende que  $w \wedge a = 0$ , entonces  $\mu_Q(0, w) \neq 0$  solo en los casos en que  $w \vee a = 1$  y  $w \wedge a = 0$ , o cuando  $w \in a^\perp$ .

Si  $w \in Q$ , tenemos  $w \vee (z \wedge a) \leq z$ . Además, si  $w \vee (z \wedge a) < z$ , entonces  $(w \vee (z \wedge a)) \vee a = w \vee a < 1$ , y, por consiguiente,  $w \vee (z \wedge a) \in Q$ . Tomemos un cóatomo arbitrario  $w$  del retículo  $Q$ . Tendremos  $w \leq w \vee (z \wedge a) < z$ . De donde,  $w = w \vee (z \wedge a)$ , o bien  $z \wedge a \leq w$ . De este modo,  $z \wedge a$  es una intersección de todos los cóatomos del retículo  $Q$ . En virtud del problema 7.206,  $\mu_Q(0, z) = 0$ , cuando  $z \wedge a \neq 0$ , es decir, cuando  $z \wedge a > 0$ .

7.210. Definamos, para todo  $a \in L$ , un operador de clausura  $\varphi: \varphi(a) = a \vee z$ . Supongamos que  $Q$  es un conjunto de todos los elementos  $\varphi$ -cerrados del retículo  $L$ . Entonces, en virtud del problema 7.204,

$$\sum_{t \in L: \varphi(t) = \varphi(y)} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu_Q(\varphi(x), \varphi(y)), & \text{si } x = \varphi(x); \\ 0, & \text{si } x < \varphi(x). \end{cases}$$

Pero,  $\varphi(x) = x \vee z = z \vee y$  y  $\varphi(y) = y$ ,  $\varphi(z) = z$ . Así, pues,

$$\sum_{t \in L: t \vee z = y} \mu(x, t) = \begin{cases} \mu(x, y), & \text{si } z = x; \\ 0, & \text{si } x < z. \end{cases}$$

(Weisner L. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1935, 38, p. 474—484).

7.211. Si en la fórmula de Weisner (problema 7.210) ponemos  $x = 0$ ,  $z = a$ ,  $y = b$ , obtendremos para el caso  $a > 0$  la afirmación a) del problema. La afirmación b) se obtiene de a) por inversión del orden.

7.212. a) Se deduce directamente del problema 7.209.

b) En virtud del problema 7.97, el complemento del elemento  $a$  del retículo modular forma una anticadena. De aquí y del problema 7.209 concluimos que

$$\mu(0, 1) = \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) \mu(z, 1).$$

Si  $z \in a^\perp$ , tenemos  $z \wedge a = 0$ ,  $a \vee z = 1$ , y, en vista del problema 7.98,  $[0 = a \wedge z, a] \cong [z, a \vee z = 1]$ . De este modo,

$$\mu(0, 1) = \sum_{z \in a} \mu(0, z) \mu(0, a) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z).$$

c) La segunda parte de la afirmación c) es equivalente al siguiente hecho: si  $y$  cubre  $z$ , entonces las funciones  $\mu(x, y)$  y  $\mu(x, z)$  tienen signos opuestos. Cada intervalo  $[x, y]$  del retículo geométrico es un retículo geométrico. Por eso, sin perder la generalidad, se puede considerar que  $x = 0$ ,  $y = 1$  y  $z$  es el cóatomo del retículo  $L$ .

Demostremos la afirmación por inducción respecto de  $r(L)$ . Si  $r(L) = 1$ , entonces  $\mu(0, 1) = -1$ . Si  $r(L) = 2$ , entonces  $\mu(0, 1) = 1$ . Supongamos que la afirmación del problema es válida para todos los retículos  $L$  con  $r(L) < n - 1$ . Sea  $P$  un retículo geométrico con  $r(P) = n$ , y  $a$ , su átomo arbitrario. Todos los complementos del elemento  $a$  en  $P$  son cóatomos del retículo  $P$ . Efectivamente, sea  $x \in a^\perp$ , es decir,  $x \wedge a = 0$  y  $a \vee x = 1$ . Entonces, de la desigualdad para la función de rango en un retículo geométrico  $r(x \vee a) + r(x \wedge a) \leq r(x) + r(a)$  obtenemos que si  $a \vee x = 1$ , entonces  $n \leq r(x) + r(a)$ , es decir,  $r(x) \geq n - 1$ . Los cóatomos del retículo  $P$  forman una anticadena. Además, en virtud del problema 7.155,  $zMa$  para todo  $z \in a^\perp$ , es decir,  $[0, a] \cong [z, 1]$ . Por eso, del teorema de Crapo (problema 7.209) tenemos  $\mu(0, 1) = \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) \mu(z, 1) = \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) \mu(0, a) = \mu(0, a) \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z) = - \sum_{z \in a^\perp} \mu(0, z)$ . El rango de todos los intervalos  $[0, z]$  es igual a  $n - 1$ .

Por eso, con arreglo a la suposición de inducción, todos los sumandos  $\mu(0, z)$  son distintos de cero y tienen un mismo signo. Por consiguiente,  $\mu(0, 1) \neq 0$  y tiene el signo opuesto al de  $\mu(0, z)$ , lo que se trataba de demostrar.

d) Hágase uso del valor de la función de Moebius del booleano (problema 7.194 c)) y de la afirmación de P. Hall (problema 7.206).

7.214. En virtud de la simetría, es suficiente comprobar sólo las primeras afirmaciones tanto en a), como en b). Sea  $x \in P$ , entonces, de acuerdo con la definición de la correspondencia de Galois,  $x \leq \tau\sigma(x)$ , y por eso,  $\sigma(x) \geq \sigma\tau\sigma(x)$ . Por otra parte,  $\sigma(x) \in L$  y, por consiguiente,  $\sigma(x) < \sigma\tau\sigma(x)$ . Esto significa que  $\sigma(x) = \sigma\tau\sigma(x)$  para cualquier  $x \in P$ .

Demostremos ahora la primera afirmación de b). De acuerdo con la definición de correspondencia de Galois,  $\tau\sigma(x) \geq x$  para todo  $x \in P$  y si  $x \leq y$  en  $P$ , entonces  $\sigma(x) \geq \sigma(y)$  en  $L$ , y  $\tau\sigma(x) \leq \tau\sigma(y)$  en  $P$ , es decir,  $\tau\sigma$  es una aplicación isótona. Además, en virtud de a),  $\tau\sigma\sigma = \tau\sigma$ , lo que se trataba de demostrar.

7.215. Demostremos al principio que para cada  $y \in P$  se verifica la identidad

$$\sum_{x \in P: x \geq y} \delta_P(\sigma(a), x) = \zeta_L(a, \sigma(y)) \quad (7.7')$$

donde  $\zeta$  es la función zeta del conjunto parcialmente ordenado  $L$ . La identidad



evidente (7.7') es equivalente a la siguiente afirmación:  $\tau(a) \geq y$  en  $P$  cuando y sólo cuando  $a \leq \sigma(y)$  en  $L$ . Lo último se desprende directamente de las propiedades de la correspondencia de Galois. En efecto, si  $\tau(a) \geq y$  en  $P$ , entonces  $\sigma\tau(a) \leq \sigma(y)$  en  $L$ , pero  $a \leq \sigma\tau(a)$  en  $L$ , por consiguiente,  $a \leq \sigma(y)$  en  $L$ . Análogamente la demostración se realiza en la dirección inversa.

Apliquemos la 2ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.196) a (7.7') respecto de  $P$  y obtendremos que

$$\delta_P(\tau(a), y) = \sum_{x \in P: x \geq y} \mu_P(y, x) \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

Para  $y=0$  tenemos

$$\delta_P(\tau(a), 0) = \sum_{x \in P: x \geq 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)) \quad (7.8')$$

La función  $\delta_P(\tau(a), 0)$  toma el valor de 1 cuando y sólo cuando  $\tau(a) = 0$ , y, si se tiene presente la suposición del problema, cuando y sólo cuando  $a = 1$ . Para todos los demás valores de  $a$  tenemos  $\delta_P(\tau(a), 0) = 0$ . Por eso

$$\delta_P(\tau(a), 0) = 1 - \eta_P(a, 1).$$

Escribamos ahora (7.8') en la forma

$$1 - \eta_P(a, 1) = \zeta_L(a, \sigma(0)) + \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

En virtud de la suposición del problema,  $\zeta_L(a, \sigma(0)) = \zeta_L(a, 1)$ , y  $\zeta_L(a, 1) = 1$  para todo  $a \in L$ . Por consiguiente,

$$-\eta_P(a, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)).$$

Por cuanto  $\zeta = \delta + \eta$ , entonces  $\mu = \delta - \mu\eta$  y, por consiguiente, considerando que  $0 \neq 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mu_L(0, 1) &= - \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \eta_L(a, 1) = \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \times \\ &\times \left( \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(a, \sigma(x)) \right) = \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \mu_L(0, a) \times \\ &\times \zeta_L(a, \sigma(x)) = (\text{cambiamos el orden de la sumación}) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \times \\ &\times \sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \zeta_L(a, \sigma(x)). \end{aligned}$$

Por cuanto  $\sum_{a \in L: 0 \leq a \leq 1} \mu_L(0, a) \zeta_L(a, \sigma(x)) = \delta_L(0, \sigma(x))$ , entonces

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \delta_L(0, \sigma(x)) = \sum_{x \in P: \sigma(x) = 0} \mu_P(0, x).$$

Además,

$$\delta_L(0, \sigma(x)) = \zeta_L(\sigma(x), 0).$$

Por eso,

$$\mu_L(0, 1) = \sum_{x \in P: x > 0} \mu_P(0, x) \zeta_L(\sigma(x), 0).$$

La demostración de la afirmación del problema está completamente terminada.  
7.126. En lugar de  $P$  examínese un conjunto parcialmente ordenado  $P^*$ , dual respecto de  $P$ , y hágase uso del problema 7.215.

## § 4. Problemas mixtos sobre conjuntos parcialmente ordenados

7.219. Observemos que si, realizados  $d$  desplazamientos de todas las  $n$  cuentas de vidrio «por un círculo», se repite la «configuración de colores»,  $d$  será divisor del número  $n$ . El número menor de desplazamientos que conducen a la configuración de partida lleva el nombre de *período*. Sea una cadena de longitud  $n$  y período  $d$ . Obtendremos, al realizar los desplazamientos,  $d$  diferentes cadenas, incluida la inicial. Uniendo los extremos de cada una de estas cadenas, obtenemos un mismo collar. Notemos que solamente estas  $d$  cadenas nos dan el collar dado.

Sea  $M(n)$  el número de collares de longitud  $n$  y sea  $m(d)$  el número de cadenas de período  $d$ . Entonces  $M(n) = \sum_{d: d|n} \frac{1}{d} m(d)$  y  $M(n) = k^n$ . Aplicando la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), obtenemos para  $n = d$ :

$$m(d) = \sum_{x: x|d} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x.$$

De aquí  $M(n) = \sum_{d: d|n} \frac{1}{d} \left( \sum_{x: x|d} \mu\left(\frac{d}{x}\right) k^x \right) = \frac{1}{n} \sum_{d: d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d$ , donde

$\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$  es la función de Euler;  $\mu(x)$  es la función de Moebius de la teoría de números que está ligada con la función de Moebius de un conjunto parcialmente ordenado de divisores de un número natural, ordenados según la divisibilidad, de la manera siguiente:

$$\mu(x) = \mu(l, m) = \mu\left(\frac{m}{l}\right), \quad \text{si } x = \frac{m}{l}$$

7.220. Muestrese que el problema de partida es equivalente a la búsqueda del número de permutaciones de  $\sigma$  elementos  $\{1, 2, \dots, n\}$  tales que  $\sigma(i) \neq i$  y  $\sigma(i-1) \neq i$  para  $i = 2, 3, \dots, n$  y  $\sigma(1) \neq 1$ ,  $\sigma(n) \neq 1$ . La respuesta es:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

7.222. Todo grafo  $G$  puede ser pintado empleando  $\lambda^{|V(G)|}$  procedimientos, donde  $V(G)$  es el conjunto de vértices del grafo  $G$ . Además, cada coloración de este tipo será correcta exactamente para un solo subgrafo  $H \in L(G)$ , obtenido de  $G$  por contracción de las aristas con vértices igualmente pintados. De este modo,

$$\lambda^{|V(G)|} = \sum_{H \in L(G): H \leq G} P(H, \lambda).$$

Aplicando la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), tendremos

$$P(G; \lambda) = \sum_{H \in L(G): H \leq G} \lambda^{|\mathcal{V}(H)|} \mu(H, G),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.223. a)  $\chi(\mathcal{P}(S_n); x) = (x-1)^n$ ;

b)  $\chi(\mathcal{Z}(n); x) = x(x-1)^s$ , si  $n = p_1 \dots p_s$ , donde  $p_i$  son números primos diferentes.

7.224. Hágase uso del problema 7.193.

7.226. k) Éscribese la identidad  $\xi^2 * \mu = \xi$  en el álgebra de incidencia del retículo  $(V_n, \subseteq)$  y hágase uso del valor de la función de Moebius calculado en el problema 7.194 f).

7.227. Por ser modular el retículo  $L(V_n)$ , de  $r(a) = n-1$  y  $a \wedge x = 0$  se desprende que  $r(x) = r(x \vee a) + r(x \wedge a) - r(a) = r(x \vee a) + 0 - (n-1) \leq n - (n-1) = 1$ . De este modo,  $r(x) = 1$ , es decir,  $x$  es un átomo en  $L(V_n)$  o bien un subespacio unidimensional en  $V_n$ . Por cuanto  $a$  es un subespacio  $(n-1)$ -dimensional de  $V_n$ , entonces  $|a| = q^{n-1}$ . Por consiguiente, el número de vectores de  $V_n$ , no situados en  $a$ , es igual a  $q^n - q^{n-1}$ . Cada subespacio unidimensional contiene exactamente  $(q-1)$  vectores. Por eso, para cada subespacio  $a$  de dimensión  $n-1$  existen  $\frac{q^n - q^{n-1}}{q-1} = q^{n-1}$  diferentes subespacios unidimensionales  $x$  tales que  $x \wedge a$ . Así pues, el número buscado es igual a  $q^{n-1}$ .

7.228. Si  $F \subset (V_n, (q), \subset)$  es tal que  $\forall A, B \in F, A \cap B = \emptyset$ , entonces para

$$n \geq 2k+1 \quad \text{máx } |F| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

Si  $F \subset (V_n, (q), \subset)$  es tal que  $\forall A, B \in F, \dim(A \cap B) \geq r$ , entonces para  $n \geq 2k+2$  o para  $n \geq 2k+1$  y  $q \geq 3$

$$\text{máx } |F| = \begin{bmatrix} n-r \\ k-r \end{bmatrix}_q$$

[Hsieh W.N. Discret. Math., 1975, 12, No 1, p. 1-16.]

7.229. Sean  $d_1, \dots, d_m$  diferentes del número  $N = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ , entre los cuales no hay ningún par de divisores recíprocamente primos. En este caso

si  $R = \prod_{i=1}^n r_i$ , entonces  $\text{máx } m = \frac{1}{2} \sum \text{máx} \left\{ \prod_{j=1}^k r_{i_j}, R / \prod_{j=1}^k r_{i_j} \right\}$ , donde

la sumación se realiza respecto de todos los subconjuntos  $\{i_1, \dots, i_k\}$  del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . En particular, si  $N = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ , entonces

$$\text{máx } m = \begin{cases} \sum_{k=(n+1)/2}^n \binom{n}{k} r^k, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{1}{2} \binom{n}{n/2} r^{n/2} + \sum_{k=n/2+1}^n \binom{n}{k} r^k, & n \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

lo que nos da, para  $r = 1, 2^{n-1}$  [Erdős P., Schönheim J.—In: Comb. Theory and its Appl., Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 4, Balatonfüred N — II P. C. 1974, p. 369-376].

7.230. Sea  $\pi = (A_1, \dots, A_{b(\pi)}) \in \mathcal{B}(S_n)$ ,  $|A_i| = n_i$  para  $i = 1, \dots, b(\pi)$  y  $\sum_{i=1}^{b(\pi)} n_i = n$ . Cada partición  $\sigma \in [\pi, 1]$  del belliano  $\mathcal{B}(S_n)$  se obtiene de  $\pi$  me-

dante la reunión de dos o más bloques. Por eso,  $[\pi, 1] \cong \mathcal{B}(S_{b(\pi)})$ . Por otra parte, cualquier partición  $\tau \in [0, \pi]$  puede obtenerse fraccionando los bloques de partición  $\pi$  en partes menores. De este modo,  $[0, \pi] \cong \prod_{i=1}^{b(\pi)} \mathcal{B}(S_{n_i})$ . De aquí precisamente se deduce la afirmación del problema.

7.231. Hagamos uso del problema 2.95. Cada permutación del tipo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  engendra la única partición del mismo tipo, a saber, la partición en ciclos. Viceversa, a toda partición  $\pi \in \mathcal{B}(S_n)$  del tipo  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  le corresponden  $(1!)^{\alpha_1} (2!)^{\alpha_2} \dots [(n-1)!]^{\alpha_{n-1}}$  permutaciones cuya descomposición cíclica coincide con  $\pi$ . Por consiguiente, el número buscado es igual a

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i^{\alpha_i} \alpha_i!)} : \prod_{i=2}^n [(i-1)!]^{\alpha_i} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n [\alpha_i! (i!)^{\alpha_i}]}$$

7.232. En virtud del problema 7.230,  $[0, \pi] \cong \prod_{i=1}^{b(\pi)} \mathcal{B}(S_{n_i})$  y  $[\pi, 1] \cong \mathcal{B}(S_{b(\pi)})$ . De aquí

$$|[0, \pi]| = \prod_{i=1}^{b(\pi)} B(n_i) \text{ y } |[\pi, 1]| = B(b(\pi)),$$

donde  $B(n)$  son los números de Bell.

7.233. f) Escribáse la identidad  $\zeta^2 * \mu =$  en el álgebra de incidencia del belliano  $\mathcal{B}(S_n)$  y hágase uso del valor de la función de Moebius calculado en el problema 7.194 e).

7.234. El número de todos los grafos marcados simples con  $n$  vértices es igual a  $2^{\binom{n}{2}}$ . Sea  $S_n$  un conjunto de vértices del grafo y  $\pi \in \mathcal{B}(S_n)$ , donde  $\mathcal{B}(S_n)$  es un belliano. Supongamos que  $f(\pi)$  es el número de grafos marcados sobre  $S_n$ , cuyos componentes conexos definen la partición del conjunto  $S$  en bloques de  $\pi$ . Entonces si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es el tipo de la partición  $\sigma$ , tenemos

$$\sum_{\pi \in \mathcal{B}(S_n) : \pi \leq \sigma} f(\pi) = \prod_{i=2}^n 2^{\binom{i}{2} \alpha_i} = 2^{\sum_{i=2}^n (\alpha_i \binom{i}{2})}$$

Al aplicar la 1ª fórmula de inversión de Moebius (problema 7.195), obtendremos

$$f(\sigma) = \sum_{\pi \in \mathcal{B}(S_n) : \pi \leq \sigma} 2^{\sum_{i=2}^n [b_i \binom{i}{2}]} \mu(\pi, \sigma),$$

donde  $(b_1, \dots, b_n)$  es el tipo de la partición  $\pi$ .

El número de grafos conexos simples es igual a  $f(1)$ , donde  $1$  es la unidad del belliano  $(S_n)$ . De este modo

$$f(1) = \sum_{\pi \in \mathcal{B}(S_n)} \mu(\pi, 1) 2^{\sum_{i=2}^n (b_i \binom{i}{2})},$$

y, en virtud del problema 7.194, e),

$$\mu(\pi, 1) = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)-1} \left( \left( \sum_{i=1}^n \right) - 1 \right)!$$

Sustituyendo la expresión para la función de Moebius en  $f(1)$ , obtenemos la identidad buscada.

7.236. Por ser el retículo  $K$  distributivo, para todo  $x \in [a \wedge b, a \vee b]$  tenemos que  $(x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x \wedge (a \vee b) = x \vee (x \vee a) \wedge (x \vee b) = x \vee (a \wedge b) = x$ . Además,  $(x \wedge a) \wedge (x \wedge b) = x \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$  y  $(x \vee a) \vee (x \vee b) = x \vee (a \vee b) = a \vee b$ . Por eso, por ser la función  $\mu$  submodular, para todo  $x \in [a \wedge b, a \vee b]$  tenemos  $\mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) \geq \mu((x \wedge a) \vee (x \wedge b)) + \mu((x \wedge a) \wedge (x \wedge b)) = \mu(x) + \mu(a \wedge b)$ ;

$$\mu(x \vee a) + \mu(x \vee b) \geq \mu((x \vee a) \vee (x \vee b)) + \mu((x \vee a) \wedge (x \vee b)) = \mu(a \vee b) + \mu(x);$$

$$\mu(x) + \mu(a) \geq \mu(x \vee a) + \mu(x \wedge a);$$

$$\mu(x) + \mu(b) \geq \mu(x \vee b) + \mu(x \wedge b).$$

Al sumar todas las cuatro desigualdades, obtendremos  $\mu(a) + \mu(b) \geq \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$ , pero, por hipótesis del problema,  $\mu(a) + \mu(b) = \mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b)$ . Por consiguiente, en todas las cuatro desigualdades los segundos miembros son iguales a los primeros, lo que se trataba de demostrar.

7.237. Es suficiente demostrar la afirmación para los intervalos transpuestos. Sea  $a, b \in L$ . Entonces, la aplicación  $\psi(x) = x \wedge a = y$ , determinada sobre  $[b, a \vee b]$  define una aplicación isomorfía de  $[b, a \vee b]$  en  $[a \wedge b, a]$  (véase el problema 7.98). En virtud del problema 7.236 c), para todos los  $x \in [b, a \vee b]$  tenemos

$$\mu(a \wedge b) + \mu(x) = \mu(x \wedge a) + \mu(x \wedge b) = \mu(\psi(x)) + \mu(b).$$

De aquí

$$\mu(x) - \mu(\psi(x)) = \mu(b) - \mu(a \wedge b) = \mu(a \vee b) - \mu(a)$$

para cualesquiera intervalos transpuestos  $[b, a \wedge b]$  y  $[a \wedge b, a]$ .

7.238. Hágase uso de los problemas 7.146 y 7.237.

7.239. Hágase uso de los problemas 7.147 y 7.238.

$$\begin{aligned} 7.241. \quad \text{Tenemos } 2w &= \mu(y_1) + \mu(y_2) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1) + \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_2) = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) \geq (\text{siendo submodulares las funciones } \mu_i) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2)) = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1 \vee y_2) + \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y_1 \wedge y_2) = \\ &= \mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) \geq (\text{por cuanto } w \text{ es el valor mínimo de } \mu(x)) \geq \\ &\geq w + w = 2w. \end{aligned}$$

Por cuanto  $\mu(y_1 \vee y_2) + \mu(y_1 \wedge y_2) = 2w$ ,  $\mu(y_1 \vee y_2) \geq w$  y  $\mu(y_1 \wedge y_2) \geq w$ , entonces  $\mu(y_1 \vee y_2) = \mu(y_1 \wedge y_2) = w$ .

7.242. De la igualdad

$$\sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2)) = \sum_{i=1}^m c_i (\mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2))$$

(véase problema 7.241) y de que  $c_i > 0$  para todo  $i, i = 1, \dots, m$  tenemos

$$\mu_i(y_1) + \mu_i(y_2) = \mu_i(y_1 \vee y_2) + \mu_i(y_1 \wedge y_2),$$

lo que se trataba de demostrar.

7.243. Sea  $w = \min_{x \in K} \left\{ \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(x) \right\}$  y  $w' = \min_{x \in K} \left\{ \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(x) \right\}$ . Por

hipótesis del problema  $\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) = w$ , y  $\sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = w'$ . Por consiguiente,

$$w + w' = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = \sum_{i=1}^p \left[ (c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) \right] +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^q [c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) \geq (\text{por}$$

ser la función  $\mu_i(x)$  submodular)  $\geq \sum_{i=1}^p [c_i - c'_i] \mu_i(y) + c'_i (\mu_i(y \vee y')) +$

$+ \mu_i(y \wedge y')] + \sum_{i=p+1}^q [c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + (c'_i - c_i) \mu_i(y')] +$

$+ \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) = (\text{sumemos y restemos de las sumas obtenidas}$

$\sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=p+1}^q c'_i \mu_i(y \vee y') = \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') +$

$+ \sum_{i=1}^p [(c_i - c'_i) \mu_i(y) + c'_i \mu_i(y \wedge y') - c_i \mu_i(y \wedge y')] + \sum_{i=p+1}^q [(c'_i - c_i) \mu_i(y') +$

$+ c_i \mu_i(y \vee y') - c'_i \mu_i(y \vee y')] = \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') +$

$+ \sum_{i=1}^p (c_i - c'_i) (\mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y')) + \sum_{i=p+1}^q (c'_i - c_i) (\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y')) \geq (\text{cuando}$

$i = 1, \dots, p$ , afirmamos que  $(c_i - c'_i) \geq 0$  y  $\mu_i(y) - \mu_i(y \wedge y') \geq 0$ , puesto que  $\mu_i$  son funciones modulares no decrecientes e  $y \geq y \wedge y'$  en  $K$ ; cuando  $i =$

$= p + 1, \dots, q$ , afirmamos que  $(c'_i - c_i) \geq 0$  y  $\mu_i(y') - \mu_i(y \vee y') \geq 0$ , puesto que  $\mu_i$  son funciones submodulares no crecientes e  $y' \leq y \vee y'$  en  $K$ )  $\geq$

$$\geq \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') \geq w + w'.$$

De aquí, por cuanto las expresiones primera y segunda son iguales, tenemos

$$\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') = w + w', \text{ y,}$$

por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') = w \text{ y } \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') = w',$$

es decir,  $y \wedge y' \in L(c_1, \dots, c_m)$  y,  $y \vee y' \in L(c'_1, \dots, c'_m)$ .

Más aún, queda demostrado que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y) + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y') = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i(y \wedge y') + \sum_{i=1}^m c'_i \mu_i(y \vee y') \times \\ & \times \sum_{i=1}^p c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + \sum_{i=p+1}^q c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y) + \mu_i(y')) = \\ & = \sum_{i=1}^p c_i \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + \sum_{i=p+1}^q c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')) + \\ & + \sum_{i=q+1}^m c_i (\mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')). \end{aligned}$$

En virtud de la última igualdad, obtenemos, teniendo presente que las funciones  $\mu_i(x)$  son submodulares y que  $c_i > 0$ ,  $c'_i > 0$ :

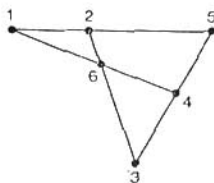
$$\mu_i(y) + \mu_i(y') = \mu_i(y \vee y') + \mu_i(y \wedge y')$$

para cualquier  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , lo que se trataba de demostrar.

## MATROIDES

### § 1. Conceptos fundamentales y ejemplos

- 8.3.  $\mathcal{B}(U_{h,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| = k\}$ ;  
 $\mathcal{C}(U_{h,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| = k + 1\}$ ;  
 $\mathcal{D}(U_{h,n}) = \{A \subseteq S \mid |A| \geq k + 1\}$ .
- 8.5.



8.6.

a) Supongamos, por ejemplo, que los primeros  $k$  vectores  $u_1, \dots, u_h$ ,  $k < n$ , son linealmente dependientes, es decir, que  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_h u_h = 0$ , donde no todos los  $\lambda_i$  son iguales a cero. Al poner, entonces,  $\lambda_{h+1} = \dots = \lambda_n = 0$ , obtendremos una combinación lineal no trivial  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_h u_h + \lambda_{h+1} u_{h+1} + \dots + \lambda_n u_n = 0$ .

La afirmación b) se deduce directamente de a) (reducción al absurdo).

c) Supongamos, por ejemplo, que en la relación  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$  se tiene  $\lambda_n \neq 0$ . Entonces  $u_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} u_1 - \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} u_{n-1}$ .

d) Sea, por ejemplo  $u_n = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1}$ . Al poner  $\lambda_1 = \alpha_1, \dots, \lambda_{n-1} = \alpha_{n-1}, \lambda_n = -1$ , obtendremos  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$  con  $\lambda_n \neq 0$ .

e) La combinación lineal no trivial  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u = 0$  con  $\alpha \neq 0$  nos da, en virtud de c), lo que necesitamos. Si, no obstante,  $\alpha = 0$ , entonces  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , puesto que  $u_1, \dots, u_n$  son, por hipótesis, linealmente independientes.

La afirmación f) se deduce directamente de e).

8.7. Las condiciones, (i1) y (i2) para el sistema  $\mathcal{J}$  se desprenden de la afirmación b) del problema 8.6. Para (i3) basta mostrar que si  $A, B \in \mathcal{J}$  y  $|B| = |A| + 1$ , entonces se encontrará un vector  $v \in B \setminus A$  tal que  $A \cup \{v\} \in \mathcal{J}$ . Supongamos que la última afirmación no es cierta, por ejemplo, para  $A = \{u_1, \dots, u_m\}$  y  $B = \{v_1, \dots, v_{m+1}\}$ . Esto significa que para cada  $i, i = 1, 2, \dots, m+1$ , o bien  $v_i \in \{u_1, \dots, u_m\}$ , o bien el conjunto de vectores



$\{u_1, \dots, u_m, v_i\}$  es linealmente dependiente. Por consiguiente, existen  $\alpha_{ji} \in F$  tales que

$$v_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} u_j, \quad \text{donde } i=1, 2, \dots, m+1$$

Formemos una combinación lineal de vectores  $v_i$  con los coeficientes  $\beta_i \in F$ :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i \left( \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} u_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} \beta_i \right) u_j,$$

y examinemos el sistema:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} \beta_i = 0, \quad j=1, \dots, m.$$

Por cuanto el número de incógnitas  $\beta_i$  es superior al número de ecuaciones, el sistema cuenta con la solución no nula  $(\beta_1^0, \dots, \beta_{m+1}^0)$ . Llegamos, pues, a una combinación lineal no trivial

$$\beta_1^0 v_1 + \dots + \beta_{m+1}^0 v_{m+1} = 0,$$

cuya presencia contradice, no obstante, a la condición de que  $B \in \mathcal{J}$ . Por consiguiente, nuestra suposición no es cierta y la condición (i3) tiene lugar para el sistema  $\mathcal{J}$ .

8.8. La primera afirmación se deduce de que el determinante no es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Cuando  $F = GF(2)$ , el matroide vectorial  $M$  es isomorfo al matroide homogéneo  $U_{2,3}$ .

8.9. c) Sea  $\sum_{i=1}^n \lambda_i (u_i - u) = 0$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ . Entonces  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) u = 0 \cdot u = 0$ , y, por ser los vectores  $u_1, \dots, u_n$ , independientes de manera afín,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . De este modo,  $u_1 - u, \dots, u_n - u$  son independientes de un modo afín.

d) los vectores  $u_1, \dots, u_n$  son independientes de un modo afín cuando y sólo cuando de  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  se deduce que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ,

o bien si y sólo si de  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i + \left( - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) u_n = 0$  se deduce que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ , o bien si y sólo si de  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (u_i - u_n) = 0$  se desprende que

$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ , es decir, si y sólo si el conjunto de vectores  $\{u_1 - u_n, \dots, u_{n-1} - u_n\}$  es linealmente independiente.

e) Demostremos por reducción al absurdo. Supongamos que la afirmación no es cierta. En tal caso el conjunto  $A$  se contiene en un subespacio lineal  $(n-2)$ -dimensional  $V$  de  $L$ . Por consiguiente, el conjunto de vectores  $\{u_1 - u_n, \dots, u_{n-1} - u_n\}$  es linealmente dependiente, puesto que yace en  $V$ . Pero, en virtud de d), el conjunto de vectores  $u_1, \dots, u_n$  es dependiente de un modo afín, lo que contradice la hipótesis del problema.

8.10. Las condiciones (i1) y (i2) de la definición de matroide para el sistema  $\mathcal{J}$  se desprenden de la afirmación a) del problema 8.9. Demostremos la validez de (i3), es decir, que para  $A, B \in \mathcal{J}$  arbitrarios, donde  $|B| = |A| + 1$ , existe  $v \in B \setminus A$  tal que  $A \cup \{v\} \in \mathcal{J}$ . Sean  $A = \{u_1, \dots, u_n\}$  y  $B = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  los conjuntos independientes de un modo afín. Entonces el conjunto  $\{v_1 - u_n, \dots, v_{n+1} - u_n\}$  será también independiente de un modo afín (problema 8.9 c), y, en virtud de la afirmación e) del problema 8.9, podemos considerar (sin restringir la generalidad de los razonamientos) que  $B' = \{v_1 - u_n, \dots, v_n - u_n\}$  es un conjunto linealmente independiente. Debido a la afirmación d) del problema 8.9, el conjunto de vectores  $A' = \{u_1 - u_n, \dots, u_{n-1} - u_n\}$  es también linealmente independiente. Además,  $|B'| = |A'| + 1$ , pero, entonces, en virtud del problema 8.7, existe un  $i, i = 1, \dots, n$ , tal que el conjunto  $A' \cup \{v_i - u_n\}$  es linealmente independiente, o bien, lo que es equivalente (problema 8.9 d), el conjunto  $\{u_1, \dots, u_n, v_i\}$  es independiente de un modo afín o  $A \cup \{v_i\} \in \mathcal{J}$ .

8.11. Se demuestra igual que el problema 8.7.

Un sistema  $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{ji} m_i \beta_i = 0, j=1, \dots, m$ , donde  $\alpha_{ji}, m_i$  son números enteros, tiene solución entera no nula  $(\beta_1^0, \dots, \beta_{m+1}^0)$ . En efecto, al hallar la solución racional no nula  $(\beta_1^1, \dots, \beta_{m+1}^1)$  multipliquémosla por el denominador común de los números  $\beta_1^1, \dots, \beta_{m+1}^1$  y obtendremos los valores enteros de  $\beta_1^0, \dots, \beta_{m+1}^0$  que son precisamente las soluciones de la problema.

8.12. Por ejemplo,  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{3}$  son números algebraicos, y  $\pi$  y  $e$ , números reales transcendentales sobre el campo de números racionales.

8.13. b) Convengamos en considerar que  $a_1, \dots, a_{n-1}$  están unidos al campo  $F$ . Entonces  $b$  depende algebraicamente de  $a_n$  sobre el campo  $F(a_1, \dots, a_{n-1})$ , es decir, tiene lugar la correlación algebraica

$$f_0(a_n) b^m + f_1(a_n) b^{m-1} + \dots + f_m(a_n) = 0. \quad (8.1')$$

Escribamos esta ecuación según las potencias del elemento  $a_n$  y obtengamos

$$g_0(b) a_n^h + g_1(b) a_n^{h-1} + \dots + g_n(b) = 0. \quad (8.2')$$

Por hipótesis, el elemento  $b$  es transcendente sobre el campo  $F(a_1, \dots, a_{n-1})$ . Por esta razón no todos los polinomios  $g_0(b), \dots, g_n(b)$  son idénticamente iguales a cero, puesto que en el caso contrario el primer miembro en (8.1') sería idénticamente igual a cero, es decir, se verificarían las igualdades  $f_0(a_n) = \dots = f_m(a_n) = 0$ , lo que contradice la hipótesis. De aquí, en virtud de (8.2'), el elemento  $a_n$  depende algebraicamente de  $b$  sobre el campo  $F(a_1, \dots, a_{n-1})$ .

d) Si  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  tiene por corolario suyo el que el polinomio  $f$  es igual a cero, entonces, evidentemente, ninguno de los elementos  $a_i$  puede ser algebraicamente dependiente de los demás  $a_j$ .

Al contrario, supongamos que los elementos  $a_1, \dots, a_n$  son algebraicamente independientes. Si  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  y si el polinomio  $f$  está dispuesto por potencias del elemento  $a_n$ , entonces los coeficientes  $f_i(a_1, \dots, a_{n-1})$  de este polinomio resultan ser idénticamente iguales a cero. Dispongamos estos coeficientes por potencias del elemento  $a_{n-1}$  y de la misma manera estableceremos que sus coeficientes son también idénticamente iguales a cero; procediendo de esta manera, llegamos al fin y al cabo a que los coeficientes del polinomio  $f$  son nulos.

8.14. Hace falta comprobar que  $\mathcal{J}$  satisface las condiciones (i1) — (i3) en la definición del matroide. La demostración de (i1) y (i2) se contiene en la resolución del problema 8.13 d).

Demostremos (i3) por reducción al absurdo. Supongamos que  $A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\} \in \mathcal{J}$ , mas para todos los  $b_j, j = 1, \dots, n+1$ , el conjunto  $A \cup \{b_j\} \notin \mathcal{J}$ . Llegamos, pues, a una contradicción debido a que el conjunto  $B$  es algebraicamente independiente sobre  $F$ . En efecto, sean  $a_1, \dots$

$\dots, a_n\}$  y  $\{b_1, \dots, b_{n+1}\}$  dos conjuntos algebraicamente independientes sobre el campo  $F$  y sea  $b_j$  algebraico sobre  $F(a_1, \dots, a_n)$  para  $j = 1, \dots, n+1$ . Demostremos por inducción respecto de  $k$  que con una reenumeración adecuada de los elementos  $a_i$  y  $b_j$  para cada  $k \leq n$  tenemos que

el elemento  $b_{k+1}$  es algebraico sobre  $F(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$  (8.3')

el elemento  $a_k$  es algebraico sobre  $F(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ . (8.4')

Cuando  $k = 0$ , la afirmación (8.3') es evidente, mientras que en (8.4') no se analiza. Supongamos que para  $k > 0$  las afirmaciones (8.3') y (8.4') son verdicas; demostrémoslas para  $k + 1$ . Por cuanto el elemento  $b_{k+1}$  es algebraico sobre  $F(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$  y el conjunto  $\{b_1, \dots, b_{k+1}\}$  es algebraicamente independiente sobre  $F$ , entonces de la solución del problema 8.13 b) se ve que existe un elemento  $a_j$  (puede considerarse sin restringir la generalidad de nuestros razonamientos que  $j = k + 1$ ) bajo la condición:  $a_{k+1}$  es algebraico sobre  $F(b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n)$ , lo que demuestra (8.4'). De este modo, para cada  $i, i = 1, \dots, k + 1$ , el elemento  $a_i$  es algebraico sobre el campo  $F(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ . Aplicando reiteradamente el problema 8.13 c), llegamos a que cada elemento  $a_i, i = 1, \dots, k + 1$ , depende algebraicamente de  $b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ . Luego,  $b_{k+2}$  depende algebraicamente de  $a_1, \dots, a_n$ , el elemento  $a_i$  depende algebraicamente de  $b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$  para todo  $i, i = 1, \dots, k + 1$ . Por eso, en virtud del problema 8.13 c),  $b_{k+2}$  depende algebraicamente sobre  $F$  de  $b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ , lo que sirve de demostración en (8.3'). La inducción queda finalizada. Suponiendo ahora  $k = n$ , obtenemos de (8.3') que  $b_{n+1}$  es algebraicamente dependiente sobre el campo  $F$  de  $b_1, \dots, b_n$ , lo que contradice la condición del problema.

8.16. Supongamos al contrario que  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$  y  $|B_1| \neq |B_2|$ , por ejemplo,  $|B_1| < |B_2|$ . Entonces, en virtud de (i3), existe un  $x \in B_2 \setminus B_1$  tal que  $B_1 \cup \{x\} \in \mathcal{J}$ , lo que contradice el que  $\mathcal{B}$  es la base del matroide.

8.17. La validez de (b1) para la familia  $\mathcal{B}(M)$  de bases del matroide  $M$  se deduce de que la base es máxima. Ahora, si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(M)$  y  $x \in B_1$ , entonces  $B_1 \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$  y  $|B_2| = |B_1 \setminus \{x\}| + 1$  (véase el problema 8.16). Por eso, en virtud de (i3), existe  $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$  tal que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{J}$ . Además,  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = |B_1|, y$ , en virtud del problema 8.16,  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}(M)$ . La validez de (b2) está establecida también.

Viceversa, supongamos que la familia  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$  satisface las condiciones (b1) y (b2). Definamos la familia  $\mathcal{J}$  del modo siguiente:  $A \in \mathcal{J}$ , donde  $A \subseteq S$ , si existe tal  $B \in \mathcal{B}$  que  $A \subseteq B$ . Obviamente,  $\mathcal{J}$  satisface las condiciones (i1) y (i2). Demostremos la validez del axioma (i3) para  $\mathcal{J}$ . Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos diferentes de  $\mathcal{J}$  tales que  $X \subseteq B_1, Y \subseteq B_2$  y  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Supongamos que  $X = \{x_1, \dots, x_h\}, B_1 = \{x_1, \dots, x_h, b_1, \dots, b_n\}, Y = \{y_1, \dots, y_h, y_{h+1}\}$  y  $B_2 = \{y_1, \dots, y_h, y_{h+1}, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ . Examinemos el conjunto  $B_1 \setminus \{b_n\}$ . Para él existe, de acuerdo con (b2), un  $z \in B_2$  tal que  $(B_1 \setminus \{b_n\}) \cup \{z\} \in \mathcal{B}$ . Si  $z \in Y$ , entonces  $X \cup \{z\} \in \mathcal{J}$ , y la condición (i3) se cumple. Si  $z \notin Y$ , examinemos el conjunto  $((B_1 \setminus \{b_n\}) \cup \{z\}) \setminus \{b_{n-1}\} = B'$ . Para éste existe, de nuevo en virtud de (i2), un  $z_1 \in B_2$  tal que  $B' \cup \{z_1\} \in \mathcal{B}$ . Si  $z_1 \in Y$ , entonces  $X \cup \{z_1\} \in \mathcal{J}$ , y (i3) queda demostrada. Si  $z_1 \notin Y$ , pasamos al conjunto  $(B' \cup \{z_1\}) \setminus \{b_{n-2}\}$ , etc. Por cuanto  $| \{b_1, \dots, b_n\} | > | \{c_1, \dots, c_{n-1}\} |$ , entonces, tras  $n$  pasos como máximo, obtendremos una situación en la cual  $b_i$  se sustituye por un elemento de  $Y$ . Por consiguiente,  $\mathcal{J}$  satisface la condición (i3) y  $\mathcal{J}$  es una familia de conjuntos independientes del matroide.

Es evidente que de bases en  $(S, \mathcal{J})$  sirven precisamente los conjuntos de  $\mathcal{B}$ .

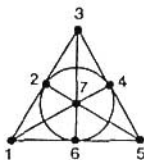
8.18. Supongamos que se cumple la afirmación (b2). Admitamos que  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \neq B_2, X \subseteq B_1, B_2 \subseteq Y$ , y  $X \subseteq Y$ . En la familia  $\mathcal{B}$  de todos los conjuntos que contienen  $X$  elijamos  $B_3$  tal que  $B_2 \cap B_3$  sea máximo por el número de elementos. Supongamos que existe  $x \in B_3 \setminus Y$ . Entonces, de acuerdo con la suposición, existe  $y \in B_2$  tal que  $(B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ , y  $X \subseteq (B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ ,  $B_2 \cap B_3 \subseteq [(B_3 \setminus \{x\}) \cup \{y\}] \cap B_2$ , lo que contradice el modo de elegir  $B_3$ . Así pues,  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$  y (b2') queda demostrada.

Viceversa, supongamos que se cumple la afirmación (b2'). Mostremos, en primer lugar, que si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  y  $|B_1 \setminus B_2| = 1$ , entonces  $|B_2 \setminus B_1| = 1$ . En efecto, sea que  $x \in B_1 \setminus B_2$  y  $A = B_1 \cap B_2 = B_1 \setminus \{x\}$ . Entonces existe  $y \in B_2 \setminus A$ . De aquí tenemos que  $B_3 \supseteq A \cup \{y\} \subseteq B_1 \cup \{y\} \supseteq B_1$ , lo que conduce a la existencia de tal  $B_3 \in \mathcal{B}$  que  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = A \cup \{y\} \subseteq B_3 \subseteq B_1 \cup \{y\}$ . Por cuanto  $\mathcal{B}$  es una anticadena, entonces  $B_3 \neq B_1 \cup \{y\}$ , y, por consiguiente  $B_3 = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} = B_2$  y  $|B_2 \setminus B_1| = 1$ .

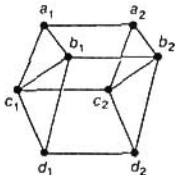
Ahora, supongamos que  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ,  $B_1 \neq B_2$ ,  $x \in B_1 \setminus B_2$  y  $X = B_1 \setminus \{x\}$ ,  $Y = B_2 \cup X$ . Por hipótesis, se encontrará un  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $X \subseteq B_3 \subseteq Y$ . Es evidente que  $X = B_1 \cap B_3$  y  $|B_1 \setminus B_3| = 1$ . De aquí se deduce que  $|B_3 \setminus B_1| = 1$ , es decir, existe  $y \in Y = X \cup B_2$  tal que  $B_3 = X \cup \{y\}$ . Está claro que  $y \in B_2$ . Así pues, (b2) queda también demostrada.

8.19. Entre todos los subconjuntos  $Z \subseteq Y \setminus X$  tales que  $X \cup Z \in \mathcal{J}$  elijamos  $Z_0$  con un valor mínimo de  $|X \cup Z_0|$ . Si  $|X \cup Z_0| < |Y|$ , existe  $Y_0 \subseteq Y$ ,  $|Y_0| = |X \cup Z_0| + 1$ , y, por cuanto  $Y \in \mathcal{J}$ , entonces, en virtud de (i3), se encontrará un  $y \in Y \setminus (X \cup Z_0)$  tal que  $(X \cup Z_0) \cup \{y\} \in \mathcal{J}$ . El conjunto  $Z_0 \cup \{y\}$  contradice el modo de elegir  $Z_0$ .

8.20.



8.21.



8.22. Sea  $M = (S, \mathcal{J})$  un matroide sobre el conjunto finito  $S$ . Las afirmaciones (r1) y (r2) son corolarios triviales de la definición de función de rango. Para demostrar (r3) supongamos que  $X \subseteq A \cap B$  es un subconjunto independiente máximo de  $A \cap B$ . Al extender  $X$  con elementos nuevos, obtenemos  $Y \subseteq A \cup B$  tal que  $X \subseteq Y$ , e  $Y$  es un subconjunto independiente máximo de  $A \cup B$  (véase la fig. 8.1'). Es obvio que  $|Y \cap A| + |Y \cap B| = |X| + |Y|$ , puesto que en el primer miembro de la igualdad están calculados exactamente dos veces aquellos elementos de  $Y$  que yacen en  $X$ . Por cuanto  $Y$  es un conjunto independiente, serán también conjuntos independientes  $Y \cap A$  e  $Y \cap B$ . Entonces  $|Y \cap A| \leq r(A)$  y  $|Y \cap B| \leq r(B)$  conducen a que  $r(A) + r(B) \geq |Y \cap A| + |Y \cap B| = |X| + |Y| = r(A \cup B) + r(A \cap B)$ .

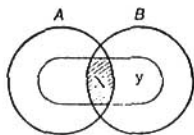


Fig. 8.1'.

Las afirmaciones (r4), (r5) y (r6) se obtendrán de (r1), (r2) y (r3). Ante todo, (r4) se deduce de manera trivial de (r1), si  $A = \emptyset$ . La afirmación  $r(A) \leq r(A \cup \{a\})$  es un caso particular de (r2), y  $r(A \cup \{a\}) \leq r(A) + 1$  se deduce de (r3), si ponemos  $B = \{a\}$  y hacemos uso del corolario (r1) consistente en que

$r(\{a\}) \leq 1$ . Así pues, (r5) queda demostrada. Por fin, al aplicar (r2) a los conjuntos  $A$  y  $A \cup \{a, b\}$ , como también (r3) a los conjuntos  $A \cup \{a\}$  y  $A \cup \{b\}$ , llegamos a que  $r(A) \leq r(A \cup \{a, b\})$  y  $r(A \cup \{a, b\}) + r(A) \leq r(A \cup \{a\}) + r(A \cup \{b\})$ , es decir,  $r(A) \geq r(A \cup \{a, b\})$ . De aquí,  $r(A \cup \{a, b\}) = r(A)$  y (r6) queda establecida.

Viceversa, demosmos que una función de valores enteros  $r$ , que satisfice (r4), (r5) y (r6), es una función de rango de cierto matroide  $M = (S, r)$ . Diremos que  $X \in \mathcal{J}$ ,  $X \subseteq S$ , si  $r(X) = |X|$ . Está claro que  $\emptyset \in \mathcal{J}$ . Supongamos que  $A \in \mathcal{J}$  y  $B \supseteq A$ . Admitamos que  $B \in \mathcal{J}$ . Entonces,  $r(B) < |B|$ , y por eso, si  $\{c_1, \dots, c_k\} = A \setminus B$ , entonces  $r(B \cup \{c_1\}) \leq r(B) + 1 < |B| + 1$ . Aplicando reiteradamente (r2), obtendremos:  $r(A) = r(B \cup \{c_1\} \cup \dots \cup \{c_k\}) < |B| + k = |A|$ , lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente,  $\mathcal{J}$  satisfice (i2). Supongamos ahora que  $A, B \in \mathcal{J}$  y  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, c_{i+1}, \dots, c_k\}$ ,  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_k, b_{k+1}\}$ , donde  $c_i \neq b_j$  para cualesquiera  $i$  y  $j$ . Si  $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{J}$  para  $i = 1, \dots, k+1$ , entonces  $r(A) = r(A \cup \{b_i\}) = |A|$ . De aquí, en virtud de (r6), tenemos  $r(A \cup \{b_i\} \cup \{b_j\}) = r(A) = |A|$  para  $i, j = 1 + 1, \dots, k+1$ . Aplicando varias veces (r6), obtenemos

$$r(B) \leq r(A \cup \{b_{i+1}\} \cup \dots \cup \{b_{k+1}\}) = |A| < |B|,$$

lo que contradice el hecho de que  $B \in \mathcal{J}$ . Por consiguiente,  $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{J}$  para cierto  $i$ ,  $\mathcal{J}$  satisfice (i3). De este modo,  $(S, \mathcal{J})$  es un matroide. No es difícil demostrar que su función de rango coincide con  $r$ .

Por cuanto la función de valores enteros  $r'$ , para la cual resultan ser verdicas las condiciones (r1), (r2) y (r3), satisfice las condiciones (r4), (r5) y (r6), entonces  $r'$  será precisamente la función de rango  $r$  del matroide  $(S, \mathcal{J})$ .

8.23. Si en el matroide de Vamos (problema 8.21) ponemos  $A = \{b_1, b_2\}$ ,  $B = \{c_1, c_2\}$ ,  $C = \{d_1, d_2\}$ ,  $\mathcal{D} = \{a_1, a_2\}$ , entonces todos los conjuntos de cuatro elementos, salvo  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \cup \mathcal{D}$ ,  $B \cup C$  y  $B \cup \mathcal{D}$  son independientes. Por eso,  $r(A) + r(B) + r(A \cup B \cup C) + r(A \cup B \cup \mathcal{D}) + r(C \cup \mathcal{D}) = 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 16$ , y  $r(A \cup B) + r(A \cup C) + r(A \cup \mathcal{D}) + r(B \cup C) + r(B \cup \mathcal{D}) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ , es decir, la desigualdad no es cierta para el matroide de Vamos. Esto también interviene como demostración de que el matroide de Vamos no es vectorial.

8.25. La validez de (c1) se deduce de la minimalidad del ciclo y (c2) es un corolario evidente de (c2'). Demostremos ahora la validez de (c2'). Sea  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$ ,  $C_1 \neq C_2$ ,  $x \in C_1 \cap C_2$  e  $y \in C_1 \setminus C_2$ . Entonces  $C_2 \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$  y  $C_2 \setminus \{x\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$ . Por eso, se encontrará un subconjunto independiente máximo  $B$  de  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$  tal que  $C_2 \setminus \{x\} \subseteq B$ . Por cuanto  $C_2 \notin \mathcal{J}$ , de aquí se deduce que  $x \in B$ , y, por consiguiente,  $B$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\}$ . Análogamente, si  $B'$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $C_1 \cup C_2$  tal que  $C_1 \setminus \{y\} \subseteq B'$ , entonces  $y \notin B'$  y  $B'$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}$ . Por consiguiente, si  $r$  es una función de rango del matroide  $M$ , entonces  $r(C_1 \cup C_2) = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{y\}) = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\})$  y, como  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} \subseteq C_1 \cup C_2$ , entonces  $r(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\} = r((C_1 \cup C_2) \setminus \{x, y\})$ . Por eso,  $B \cup \{y\}$  es un subconjunto dependiente del conjunto  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ , el cual contiene  $y$ , en tanto que la extracción de  $y$  del citado subconjunto lo hace independiente. Por eso  $B \cup \{y\}$  contiene tal ciclo  $C^*$  que  $y \in C^* \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}$ .

Con el fin de demostrar la afirmación inversa, comprobemos el cumplimiento para  $\mathcal{J}$  de los axiomas (i1) - (i3). Es evidente que  $\emptyset \in \mathcal{J}$ . Si el conjunto  $A$  no contiene a título de subconjuntos los términos de  $\mathcal{C}$  y si  $B \supseteq A$ , entonces, obviamente,  $B$  tampoco contiene términos de  $\mathcal{C}$ . De este modo, (i1) y (i2) se cumplen. Comprobemos (i3). Sean  $A, B \in \mathcal{J}$  de tal índole que  $|A| = m$ ,  $|B| = m + 1$ . Demostremos que existe un subconjunto del conjunto  $A \cup B$  de potencia  $m + 1$  que pertenece a la familia  $\mathcal{J}$ . Supongamos que  $B'$  tiene, entre todos los conjuntos de este tipo, el valor mínimo  $|A \setminus B'|$ . Queremos mostrar también que  $A \setminus B' = \emptyset$ , es decir que  $A \subseteq B'$ . Supongamos lo contrario.

Entonces existe un  $x \in A \setminus B'$ . Para cada  $y \in B' \setminus A$  el conjunto  $B_y = (B' \cup \{x\}) \setminus \{y\}$  es de potencia  $m + 1$  y constituye un subconjunto del conjunto  $A \cup B$ , para el cual  $|A \setminus B_y| < |A \setminus B'|$ . Por consiguiente, en virtud de la suposición de minimalidad,  $B_y \notin \mathcal{J}$  y contiene, a título de subconjunto,  $C_y$  de  $\mathcal{C}$ . Es evidente que  $x \in C_y$  e  $y \notin C_y$ . Si cada  $y \in B' \setminus A$  conduce a un mismo término de  $\mathcal{C}$ , por ejemplo, a  $C$ , entonces para todo  $y \in B' \setminus A$  tenemos  $y \notin C$ . Pero, en tal caso  $C \subseteq A$ , lo que es imposible, puesto que  $A \in \mathcal{J}$ . Por consiguiente, entre los términos de  $\mathcal{C}$  construidos más arriba existen al menos dos distintos, por ejemplo,  $C_{y_1}$  y  $C_{y_2}$ . De este modo,  $C_{y_1}, C_{y_2} \in \mathcal{C}$ ,  $C_{y_1} \neq C_{y_2}$  y  $x \in C_{y_1} \cap C_{y_2}$ . Entonces, en virtud de (e2), se encontrará un  $C^* \in \mathcal{C}$  tal que  $C^* \subseteq (C_{y_1} \cup C_{y_2}) \setminus \{x\} \subseteq B' \in \mathcal{J}$ . Hemos llegado a una contradicción con la hipótesis. Por consiguiente,  $A \subset B'$ . Así pues, la validez de (i3) está establecida.

Designemos temporalmente con  $\mathcal{C}'$  la familia de todos los ciclos del matroide  $M = (S, \mathcal{J})$ . Ahora,  $C \in \mathcal{C}'$  cuando, y sólo cuando,  $C \notin \mathcal{J}$  y  $C \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$  para cada  $x \in C$ , es decir, cuando y sólo cuando existe  $C' \subseteq C$  tal que  $C' \in \mathcal{C}$  y para todo  $x \in C$  no existe ningún  $C_x \in \mathcal{C}$  tal que  $C_x \subseteq C \setminus \{x\}$ , es decir, cuando y sólo cuando  $C \in \mathcal{C}$  (en virtud de (c1)). Por eso,  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$  y la familia de ciclos del matroide  $M = (S, \mathcal{J})$  es precisamente la familia  $\mathcal{C}$ .

8.26. Supongamos que el conjunto  $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\}$  contiene, para cierto  $y \in C$ , un ciclo  $C'$ . Está claro que  $C = C'$ . Por cuanto  $A \in \mathcal{J}$ , entonces  $x \in C'$ . De aquí, en virtud de (e2), existe un ciclo  $C^*$  que satisface la condición:  $C^* \subseteq (C \cup C') \setminus \{x\} \subseteq A$ , lo que es imposible, puesto que  $A \in \mathcal{J}$ . Por consiguiente,  $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\}$  no contiene ciclos, o bien, lo que es equivalente,  $(A \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{J}$  para cualquier  $y \in C$ . En efecto, hemos demostrado también que  $A \cup \{x\}$ , donde  $A \in \mathcal{J}$  y  $x \in S$ , contiene como máximo un ciclo del matroide  $M$ .

8.27. c) si  $C_1, C_2$  son dos ciclos distintos en  $B \cup \{y\}$ , entonces, en virtud de (e2), existe un ciclo que contiene  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{y\} \subseteq B$ . Es obvio que esto no es posible.

d) Si  $x \notin C$ , entonces  $C \subseteq (B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$  y  $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\} \notin \mathcal{J}$ . Viceversa, si  $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$  no es una base del matroide  $M$ , entonces, en virtud de (e2),  $(B \cup \{y\}) \setminus \{x\}$  es un conjunto dependiente y contiene cierto ciclo, el cual es igual, en virtud de c), a  $C$ . Por consiguiente,  $x \notin C$ .

8.28. Compruébense los axiomas (c1) y (e2) para la familia de ciclos del grafo  $G$ .

8.31. Sí, pueden. Por ejemplo, los grafos  $G_1$  y  $G_2$  en las figs. 8.2' y 8.3' no son isomorfos, mientras que sus matroides cíclicos son isomorfos.

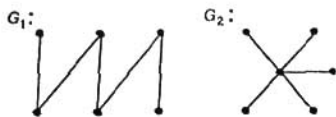


Fig. 8.2'.

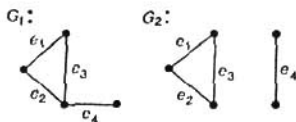


Fig. 8.3'.

8.32. La citada propiedad no se cumple, por ejemplo, para el matroide homogéneo  $U_{2,4}$ . El matroide de Fano (véase el problema 8.20) sirve de ejemplo de un matroide no gráfico, para el cual se cumple la propiedad mencionada.

8.34. Si  $x \in B_1 \cap B_2$ , podemos elegir  $y = x$ . Supongamos ahora que  $x \in B_1 \setminus B_2$  y sea  $C$  el único ciclo en  $B_2 \cup \{x\}$ . Para todo  $y \in B_2 \setminus B_1$  existe un ciclo  $C_y \subseteq B_2 \cup \{y\}$ . En virtud del problema 8.27 d), para tal y el conjunto  $(B_2 \cup \{x\}) \setminus \{y\}$  es una base cuando y sólo cuando  $y \in C$ , y  $(B_1 \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ , una base del matroide  $M$  cuando y sólo cuando  $x \in C_y$ . Por eso, para finalizar la demostración basta mostrar que existe un  $y \in C \cap (B_2 \setminus B_1)$  tal que  $x \in C_y$ . En efecto, sea  $C^*$  un ciclo en  $B_1 \cup C$  tal que  $x \in C^*$  y supongamos que entre todos

los ciclos de este tipo  $C^*$  tiene valor mínimo  $|C^* \cap (C \setminus B_1)|$ . En tal caso se encontrará el requerido  $y \in C^* \setminus B_1$ . Por cuanto, si  $x \notin C_y$ , la existencia del ciclo  $C'$  que satisfice la condición:  $x \in C' \subseteq (C_y \cup C^*) \setminus \{y\}$  contradice la suposición de que  $C^*$  es mínimo.

8.36. Supongamos que  $x \sim A$  y  $\mathcal{D}$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $A$ . Entonces, o bien  $x \in A$ , o bien  $x \notin A$  y  $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$  para cierto subconjunto independiente  $B$  del conjunto  $A$ . En el primer caso  $x \sim \mathcal{D}$ . En el segundo,  $B$  queda contenido en cierto subconjunto independiente máximo  $D'$  del conjunto  $\{x\} \cup A$ . Está claro que  $x \notin \mathcal{D}'$ . Por consiguiente,  $\mathcal{D}'$  es un subconjunto independiente máximo de  $A$  y  $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$ . Por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos de  $\{x\} \cup A$  tienen potencia igual, de aquí se deduce que  $\mathcal{D}$  es también un subconjunto independiente máximo de  $\{x\} \cup A$ . Así pues,  $\{x\} \cup \mathcal{D} \in \mathcal{J}$  y  $x \sim \mathcal{D}$ .

8.37. La propiedad (d1) proviene de la definición. Demostremos (d2). Si  $x = y_1$ , la demostración no se necesita. Supongamos que  $x \neq y_1$ ,  $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$  y  $x \not\sim \{y_2, \dots, y_m\}$ . Entonces  $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$  para cierto conjunto independiente  $B \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}$ , mas  $\{x\} \cup C$  es independiente para todos los conjuntos independientes  $C \subseteq \{y_2, \dots, y_m\}$ . En particular,  $y_1 \in B$  y  $B' = \{x\} \cup (B \setminus \{y_1\})$  es independiente. Por consiguiente,  $\{y_1 \cup B'\} (= \{x\} \cup B) \notin \mathcal{J}$  para cierto conjunto  $B' \subseteq \{x, y_2, \dots, y_m\}$  e  $y_1 \sim \{x, y_2, \dots, y_m\}$ , lo que se trataba de demostrar. Antes de pasar a la demostración de (d3), haremos de notar que si  $x \sim A$  y  $A \subseteq B$ , entonces, obviamente,  $x \sim B$ . Sea ahora  $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$  e  $y_k \sim \{z_1, \dots, z_n\}$  para cualquier  $k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Supongamos que  $Z$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $\{z_1, \dots, z_n\}$ . Entonces, en virtud del problema 8.36,  $y_k \sim Z$  para  $k = 1, 2, \dots, m$ , y, por lo tanto,  $\{w\} \cup Z$  es un conjunto dependiente para cierto  $w \in \{y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\} \setminus Z$ , es decir,  $Z$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $\{y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\}$ . Ahora  $x \sim \{y_1, \dots, y_m\}$  y, por eso, debido a la observación,  $x \sim \{y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n\}$ . En virtud del problema 8.36,  $x \sim Z$ . Por eso  $x \sim \{z_1, \dots, z_n\}$ .

Con el fin de demostrar la afirmación inversa, hace falta comprobar el cumplimiento de los axiomas (i1) - (i3) para la familia  $\mathcal{J}$ . Pero, esto ya está realizado en el problema 8.14, donde, basándonos en las propiedades (d1) - (d3) (véase el problema 8.13 a) - c) quedó establecida la validez de (i1) - (i3) para la familia  $\mathcal{J}$ .

8.38. Si  $x \sim A$  y  $x \notin A$ , entonces  $\{x\} \cup B \notin \mathcal{J}$  para cierto subconjunto independiente  $B \subseteq A$ . Por consiguiente, existe un ciclo  $C \subseteq \{x\} \cup B$  y, evidentemente,  $x \in C \subseteq \{x\} \cup B \subseteq \{x\} \cup A$ .

Viceversa, la existencia de tal ciclo  $C$  conduce a que  $C \setminus \{x\} \in \mathcal{J}$ ,  $C \setminus \{x\} \subseteq A$  y  $C \notin \mathcal{J}$ . Por eso,  $x \sim A$ .

8.39. Supongamos que  $\mathcal{J}$  es una familia de conjuntos independientes del matroide  $M$ . Entonces, si (i3') no se cumple, existen unos subconjuntos  $B_1$  y  $B_2$  tales que  $|B_1| \geq |B_2| + 1$ . En virtud de (i3) existe un conjunto  $B_2 \cup \{y\}$  tal que  $B_2 \cup \{y\} \subseteq A$ ,  $B_2 \cup \{y\} \in \mathcal{J}$  e  $y \in B_1 \setminus B_2$ , lo que contradice el hecho de que el conjunto  $B$  es máximo.

Viceversa, admitamos que  $\mathcal{J}$  satisfice (i1), (i2) y (i3') y  $A = X \cup Y$ , donde  $X$ ,  $Y \in \mathcal{J}$  son tales que  $|X| = |Y| + 1$ . Entonces, por cuanto todos los subconjuntos independientes máximos del conjunto  $X \cup Y$  deben ser de igual potencia, existe un  $x \in X \cup Y$  tal que  $|\{x\} \cup Y| = |X|$ , lo que se trataba de demostrar.

8.40. En términos del problema 8.37,  $x \in \bar{A}$  cuando y sólo cuando  $x \sim A$ . De aquí proviene directamente (d1) y (d2). Es evidente que si  $X$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $A \subseteq S$ , entonces  $\bar{X} = \bar{A}$ . Además, para todo  $A \subseteq S$  tenemos  $r(A) = r(\bar{A})$ . En efecto, sea  $r(\bar{A}) \geq r(A) + 1$  y sea  $Y$  el subconjunto independiente máximo del conjunto  $A$ . Existe en este caso  $Z = \emptyset$ ,  $Z \subseteq \bar{A} \setminus A$  tal que  $Z \cup Y$  es un conjunto independiente. Sea  $x \in Z$ . Entonces  $\{x\} \cup Y$  es un conjunto independiente tal que  $x \notin \bar{Y}$ , lo que es imposible, puesto que  $\bar{Y} = \bar{A}$ . Demostremos la validez de (d3). Sea  $A$  un subconjunto

to independiente máximo del conjunto  $X$ . En este caso, debido a la observación  $A$  será un subconjunto independiente máximo del conjunto  $\bar{X}$ . De aquí  $\bar{X} = \bar{A} = \bar{X}$ .

Comprobemos la propiedad (d4). Sea  $y \notin \bar{X}$ ,  $y \in \overline{X \cup \{x\}}$ , pero  $x \notin \overline{X \cup \{y\}}$ , es decir, (d4) no se cumple. Entonces

$$r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1; \quad r(X \cup \{x\} \cup \{y\}) = r(X \cup \{x\})$$

y

$$r(X \cup \{y\} \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\}) + 1 = r(X) + 2.$$

Por consiguiente  $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 2$ , lo que es imposible. De este modo, la aplicación  $A \rightarrow \bar{A}$  satisface los axiomas (d1) - (d4).

Viceversa, supongamos que  $A \rightarrow \bar{A}$  es la aplicación que satisface los axiomas (d1) - (d4) y  $\mathcal{J}$ , una familia de subconjuntos  $A$  del conjunto  $S$  tales que de lo que  $x \in A$  proviene  $x \notin \bar{A} \setminus \{x\}$ . Mostremos que  $\mathcal{J}$  es la familia de conjuntos independientes de cierto matroide. Con este fin comprobemos para  $\mathcal{J}$  la validez de los axiomas (i1), (i2) y (i3'). Es evidente que  $\emptyset \in \mathcal{J}$ . Supongamos que  $A \in \mathcal{J}$ ,  $B \subseteq A$ , pero  $B \notin \mathcal{J}$ . Existe entonces  $x \in B$  tal que  $x \in \bar{B} \setminus \{x\}$ . De aquí, en virtud de (d2),  $x \in \bar{A} \setminus \{x\}$ . Esto significa que  $x \notin \mathcal{J}$ , lo que contradice la suposición. Por consiguiente,  $B \in \mathcal{J}$ . De este modo, los axiomas (i1) y (i2) quedan comprobados. Llamemos al conjunto  $A \subseteq S$  independiente, si  $A \in \mathcal{J}$ . Antes de establecer la validez para  $\mathcal{J}$  del axioma (i3'), demostremos dos afirmaciones auxiliares:

a) si  $A \subseteq S$  y  $B$  es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $A$ , entonces  $\bar{B} = \bar{A}$ :

b) si  $X$  es un conjunto independiente e  $Y \subseteq X$ , entonces  $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$ .

a) Supongamos que  $A \not\subseteq \bar{B}$ . Entonces existe  $a \in A \setminus \bar{B}$  y afirmamos que  $B \cup \{a\}$  es un conjunto independiente. Es obvio que  $a \notin \bar{B}$ . Supongamos que existe  $x \in B$  tal que

$$x \in \overline{B \cup \{a\} \setminus \{x\}} = \overline{(\bar{B} \setminus \{x\}) \cup \{a\}}.$$

Debido a (d4) y a que  $x \notin \bar{B} \setminus \{x\}$ , tenemos  $a \in \overline{(\bar{B} \setminus \{x\}) \cup \{x\}} = \bar{B}$ , lo que contradice la suposición. Por consiguiente,  $B \cup \{a\}$  es un subconjunto independiente del conjunto  $A$ . Pero esto contradice la condición de maximalidad del subconjunto  $B$ . De este modo,  $A \subseteq \bar{B}$ . Por cuanto,  $B \subseteq A$ , entonces, en virtud de (d2),  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ . Por consiguiente,  $A \subseteq \bar{B} \subseteq \bar{A}$ , y, en virtud de (d2),  $\bar{A} \subseteq \bar{B} \subseteq \bar{A}$ , es decir,  $\bar{A} = \bar{B}$  (hemos aprovechado (d3)). De aquí,  $\bar{A} = \bar{B}$ .

b) Sea  $x \in X \setminus Y$ ,  $x \notin \bar{X} \setminus \{x\}$ . En virtud de (d2),  $\bar{Y} = \bar{X} \setminus \{x\}$ . De este modo,  $x \in \bar{X} \setminus \bar{Y}$ , lo que se trataba de demostrar.

Supongamos que (i3') no se cumple. Entonces entre todos los subconjuntos independientes máximos  $X$  e  $Y$  del conjunto  $A$  tales que  $|X| < |Y|$  elijamos aquellos, donde  $|X \cap Y|$  es máximo. Obviamente,  $X \not\subseteq Y$ . Escojamos  $y \in Y \setminus X$  y pongamos  $\mathcal{Z} = \overline{X \setminus Y}$ . En virtud de las afirmaciones auxiliares a) y b),  $\mathcal{Z} \subseteq \bar{A}$ . Vamos a añadir los elementos  $x_1, \dots, x_k$  de  $X$  al conjunto  $Y \setminus \{y\}$  hasta que se obtenga la igualdad:

$$\overline{(Y \setminus \{y\}) \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_k\}} = \bar{A}.$$

Este proceso se interrumpe en el peor de los casos tras  $k = |X|$  pasos, por cuanto, en virtud de a),  $\bar{X} = \bar{A}$ . Examinemos ahora un conjunto  $Y' = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x_1, \dots, x_k\}$  y mostremos que es independiente. De lo contrario tenemos o bien  $x_k \in \overline{Y' \setminus \{y\}}$ , o bien, para cierto  $y_i \in Y' \setminus \{y\} = Z$ :  $y_i \in \overline{Z \setminus \{y_i\}} \cup \{x\}$ . De-



bido al modo de elegir  $x_h$  y a la condición  $\overline{Y \setminus \{y\}} \subseteq \overline{A}$ , tenemos que  $x_h \notin \overline{Y \setminus \{y\}}$ . Por consiguiente,  $y_i \in (\overline{Z \setminus \{y_i\}}) \cup \{x\}$ . Pero, en este caso  $y_i \notin \overline{Z \setminus \{y_i\}}$ , y en vista de (d4),  $x \in (\overline{Z \setminus \{y_i\}}) \cup \{y_i\} = \overline{Z} = \overline{Y \setminus \{y\}}$ , lo que es imposible. Por consiguiente,  $Y'$  es un conjunto independiente y  $|Y' \cap X| > |Y \cap X|$ . La última desigualdad contradice el modo de elegir de los conjuntos  $X$  e  $Y$ . De aquí,  $|X| = |Y|$ . De este modo,  $\mathcal{J}$  es una familia de conjuntos independientes del matroide. Es fácil ver que el operador de clausura de este matroide coincide con la aplicación  $A \rightarrow \overline{A}$ .

8.41. Hágase uso del problema 8.38.

8.42. Aplicando (d1) y (d2), tenemos

$$X \cap Y \subseteq \overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y} = X \cap Y.$$

Por consiguiente,  $X \cap Y = \overline{X \cap Y}$ , es decir,  $X \cap Y$  es una superficie del matroide  $M$ .

8.43. No representa ninguna dificultad el comprobar que  $L(G)$  es un retículo puntual completo. Demostremos que  $L(G)$  es un retículo semimodular.

Supongamos que  $A, B \in L(G)$ ,  $B = \overline{A \cup \{x\}}$  y  $x \notin A$ . Afirmamos que  $A \prec B$ . Efectivamente, si  $C \in L(G)$  y  $A \subset C \subseteq B$ , existe un elemento  $y \in C \setminus A$  e  $y \in C \subseteq B = \overline{A \cup \{x\}}$ . Por eso, de acuerdo con (d4),  $x \in A \cup \{y\} \subseteq C$ . Por consiguiente,  $B = \overline{A \cup \{x\}} \subseteq C$ . Resulta que  $B = C$  y de aquí  $A \prec B$ . Sea ahora  $\mathcal{D} \in L(G)$ . Entonces  $B \vee \mathcal{D} = \overline{B \cup \mathcal{D}} = \overline{A \cup \mathcal{D} \cup \{x\}}$  y  $A \vee \mathcal{D} = \overline{A \cup \mathcal{D}}$ . De aquí, o bien  $x \in A \cup \mathcal{D}$  y, por eso,  $A \vee \mathcal{D} = \overline{B \cup \mathcal{D}}$ , o bien  $x \notin A \cup \mathcal{D}$ , y en este caso  $A \vee \mathcal{D} \prec B \vee \mathcal{D}$ .

8.46. Sea  $a \in A$ . Para cada  $A \subseteq S$  se cumple  $a \leq \sup A$ . Esto quiere decir que  $A \subseteq \overline{A}$ . Si  $A \subseteq \overline{B}$  para  $A, B \subseteq S$  y  $a \in S$ , entonces  $a \leq \sup B$ . De aquí,  $\sup A \leq \sup B$  y, por lo tanto,  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ . De este modo,  $A \rightarrow \overline{A}$  es un operador de clausura.

La definición de retículo geométrico asegura el cumplimiento de la condición del carácter cerrado de los subconjuntos de un solo elemento y del conjunto vacío. Comprobemos el cumplimiento de la propiedad (d4). Sea  $x \in \overline{A \cup \{y\}}$  y  $x \notin \overline{A}$ . Por cuanto  $y$  es un átomo, entonces, debido a la semimodularidad,  $\overline{A \cup \{y\}} = \overline{A \vee y} \supseteq \overline{A}$ , por lo cual de  $A \subset \overline{A \cup \{x\}} \subseteq \overline{A \cup \{y\}}$  se desprende que  $A \cup \{x\} = \overline{A \cup \{y\}}$ . Así pues,  $y \in A \cup \{x\}$ . De este modo queda establecido que  $(S, \vee)$  es una geometría.

Demostremos el isomorfismo de los retículos. Denotemos por  $\varphi$  la aplicación  $A \rightarrow \sup A$ , donde  $A \subseteq S$ ,  $A \in L(G)$ , que aplica  $L(G)$  en  $L$ . Por cuanto todo elemento del retículo  $L$  es una reunión de átomos, la inclusión  $A \subseteq B$  será equivalente a la desigualdad  $\sup A \leq \sup B$ . Por eso  $\varphi$  es una aplicación biunívoca sobria y ambas aplicaciones  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  son monótonas. Por consiguiente,  $\varphi$  es un isomorfismo.

8.60. a)  $\Rightarrow$  b). Del carácter óptimo del conjunto  $B$  en la familia  $\mathcal{J}$  se deduce que  $B$  es un subconjunto máximo por inclusión en  $\mathcal{J}$  y que  $B$  es un subconjunto de peso máximo en  $\mathcal{J}$ .

b)  $\Rightarrow$  a). Sea  $B$  un máximo lexicográfico en  $\mathcal{B}$ . Supongamos que  $B$  no es óptimo en  $\mathcal{J}$ , es decir, que existen  $A \in \mathcal{J}$  y  $k \in \{1, \dots, r(S)\}$  tales que  $w(a_k) > w(b_k)$ , donde los elementos de los conjuntos  $B$  y  $A$  están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Sea  $A' = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Entonces  $r(A') \geq k$  y, por tanto, existe  $j \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $A'' = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, a_j\} \in \mathcal{J}$  (hemos aprovechado el axioma (i3)). Más aún, existe una base  $B' \in \mathcal{B}$  tal que  $A'' \subset B'$ . Pero en tal caso la base  $B'$  es lexicográficamente mayor que  $B$ , puesto que  $w(a_j) \geq w(a_k) > w(b_k)$ . Hemos llegado a una contradicción con el hecho de que  $B$  es el máximo lexicográfico en  $\mathcal{B}$ . Esto significa que  $B$  es óptimo en  $\mathcal{J}$ .

b)  $\Rightarrow$  c). Sea  $B$  un máximo lexicográfico en  $\mathcal{M}$ , y  $B'$ , la base de peso máximo. Por cuanto es válida la implicación b)  $\Rightarrow$  a),  $B$  es óptimo en la familia  $\mathcal{F}$  y, por consiguiente, para todo  $i \in \{1, \dots, r(S)\}$  tiene lugar la desigualdad  $w(b_i) \geq w(b'_i)$ , donde los elementos de los subconjuntos  $B$  y  $B'$  están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Por cuanto  $B'$  es la base del peso máximo, resulta que  $w(b_i) = w(b'_i)$  para todo  $i$ , donde  $i = 1, \dots, r(S)$ . Por eso  $B'$  es también máximo lexicográfico en  $\mathcal{B}$ .

La condición d) se obtiene fácilmente de a) o de b).

d)  $\Rightarrow$  b). Sea  $B'$  una base de peso máximo y  $B$ , una base que satisface la condición d). Supongamos que existe  $k \in \{1, \dots, r(S)\}$  tal que  $w(b_k) < w(b'_k)$ , donde los elementos de las bases  $B$  y  $B'$  están escritos en el orden de decrecimiento de los pesos. Entonces, el conjunto  $A = \{b \in B \mid w(b) > w(b_k)\}$  no es un subconjunto independiente máximo del conjunto  $C = \{a \in S \mid w(a) > w(b_k)\}$  para  $|A| \leq k$  y  $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_k\}$  será un subconjunto independiente del conjunto  $C$  que contiene  $k$  elementos. De aquí, la base  $B$  no satisface la condición d), lo que contradice la suposición. Por consiguiente, para todo  $i$ , donde  $i = 1, \dots, r(S)$ , tenemos:  $w(b_i) \geq w(b'_i)$ , es decir,  $w(b_i) = w(b'_i)$ , puesto que  $B'$  es la base de peso máximo. De este modo,  $B$  es también una base de peso máximo.

8.61. Muéstrase que la aplicación del algoritmo ávido a  $\mathcal{F}$  nos da la base lexicográficamente máxima del matroide  $M$  y hágase uso del problema 8.60.

8.62. Comprobemos que la familia  $\mathcal{F}$  satisface el axioma (i3). Con este objeto mostremos que si  $A = \{a_1, \dots, a_h\} \in \mathcal{F}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}\} \in \mathcal{F}$ , existe tal  $b_i \notin A$  que  $A \cup \{b_i\} \in \mathcal{F}$ . Para esto definamos los pesos de los elementos  $a$  del conjunto  $S$  del modo siguiente:

$$w(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A; \\ x, & \text{si } a \in B \setminus A; \\ 0, & \text{si } a \in S \setminus (A \cup B), \end{cases}$$

donde  $0 < x < 1$ . En este caso el algoritmo ávido elegirá primero los elementos  $a_1, \dots, a_h$ . Si no existe  $b_i$  tal que  $\{b_i, a_1, \dots, a_h\} \in \mathcal{F}$ , el algoritmo elegirá los elementos restantes de  $S \setminus (A \cup B)$ . Por eso, cuando el algoritmo da por terminado su trabajo, se obtendrá, como resultado, un conjunto cuyo peso será igual al del conjunto  $A$ . Si  $|B \cap A| = t$ , entonces  $w(A) = k$ , y  $w(B) = t + t(k+1-t)x$ . Es evidente que se puede elegir  $x$ ,  $0 < x < 1$ , tal que sea  $w(A) < w(B)$ . Pero, en tal caso el trabajo del algoritmo ávido no nos proporciona un subconjunto de  $\mathcal{F}$  que tenga peso máximo, lo que contradice la afirmación del problema 8.61.

8.66. Para  $A \subseteq S$  arbitrario definamos una aplicación  $\bar{A}$  del modo siguiente:

$$\bar{A} = \begin{cases} A, & \text{si } |A| \leq n-1; \\ B, & \text{si } |A| \geq n \text{ y } A \text{ está contenido en el conjunto } B \in \mathcal{F}; \\ S, & \text{en todos los demás casos.} \end{cases}$$

Está claro que para todos los  $A \subseteq S$  tenemos  $A \subseteq \bar{A}$ . Sea  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ . Entonces, o bien  $\bar{B}$  tiene menos de  $n$  elementos, o bien  $\bar{B} \in \mathcal{F}$ , o bien,  $B = S$ . En el primer caso  $A$  tiene  $m < n$  elementos y es cerrado. En el segundo caso  $A$  está cerrado, o de su clausura sirve  $\bar{B}$ . En cualquier caso  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$  y, por tanto,  $A \rightarrow \bar{A}$  es el operador de clausura. Demostremos ahora el axioma de sustitución (d4). Supongamos que  $a \in \bar{A} \cup \{b\}$ ,  $a \notin \bar{A}$  para cierto  $A \subseteq S$ , y  $a, b \in S$ . Por cuanto  $A$  y  $A \cup \{b\}$  se diferencian sólo por un único elemento, se tienen tres posibilidades para  $\bar{A}$  y  $\overline{A \cup \{b\}}$ : (1)  $\bar{A} \cup \{b\} = S$  y  $\bar{A} \in \mathcal{F}$ ; (2)  $\bar{A} \cup \{b\} \in \mathcal{F}$  y  $\bar{A} = A$  tiene  $n-1$  elementos; (3)  $A = \bar{A}$  y  $A \cup \{b\} = \bar{A} \cup \{b\}$  tienen  $n$  elementos.

En el primer caso  $a \in \bar{A}$  y, por tanto,  $\overline{A \cup \{a\}} = S$ . En el segundo caso  $A \cup \{a\}$  tiene  $n$  elementos y constituye un subconjunto del conjunto  $A \cup \{b\} \in \mathcal{F}$ . En el tercer caso  $a = b$ . En cada caso  $\overline{A \cup \{a\}} = A \cup \{b\}$  y  $b \in \overline{A \cup \{a\}}$ . De este modo, el retículo de superficies (conjuntos cerrados) es geométrico con coátomos que coinciden exactamente con los elementos de  $\mathcal{F}$ .

8.68. Muéstrase que el conjunto que figura en el segundo miembro de la igualdad es una superficie y que el conjunto  $A$  es una superficie cuando y sólo cuando  $\{a_1, \dots, a_n, x, y\} \subseteq A$  para todos los pares  $x, y \in A$ .

8.69. Demostremos la validez del axioma de sustitución (d4). De la definición de geometría de Will de grado  $n$  se deduce que todos los subconjuntos  $A \subseteq S$  tales que  $|A| \leq n$  son cerrados. Supongamos que  $x, y \in S$ ,  $A \subseteq S$ ,  $x \notin A$  y  $x \in A \cup \{y\}$ . Si  $A$  contiene menos que  $n$  puntos, entonces  $A \cup \{y\}$  será un conjunto cerrado y, por tanto,  $x = y$ . Supongamos ahora que  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$  y  $B = \{a_1, \dots, a_n, y\}$ . En virtud del problema 6.68,  $A \cup \{y\} = A \cup B = \bigcup_{a \in A} \{a_1, \dots, a_n, a, y\}$ , de donde se desprende que  $x \in$

$\overline{\{a_1, \dots, a_n, a, y\}}$  para cierto  $a \in A$ . Por cuanto  $y \notin \{a_1, \dots, a_n, a, y\}$ , entonces los puntos  $a_1, \dots, a_n, a, y$  definen unívocamente una superficie  $F$  tal que  $x \in F$ . Por otra parte, de la condición  $x \notin \{a_1, \dots, a_n, a\}$  se deduce que la superficie que pasa por los puntos  $a_1, \dots, a_n, a, x$  debe coincidir con  $F$ . Esto nos da una relación  $y \in \overline{\{a_1, \dots, a_n, a, x\}} \subseteq A \cup \{x\}$ . Por fin, sea  $\Lambda$  un subespacio de rango  $n$ . Entonces, según lo demostrado más arriba,  $|\Lambda| = n$ , y, de este modo, el intervalo  $[0, \Lambda]$  es isomorfo al álgebra de Boole sobre  $n$  elementos. Para argumentar la modularidad del intervalo  $[A, 1]$ , basta mostrar que  $C \wedge H > A$  para cualesquiera dos subespacios  $C, H \in [A, 1]$  tales que  $r(C) = r(A) + 2$  y que  $H$  es un coátomo. Sea  $A \subset C \subset B \subset H = A$ . Entonces  $C \leq B \vee H = S$ . Pongamos  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  y elijamos cualquier punto  $y \in C \setminus B$ . En virtud del problema 8.68,  $y \in \overline{\{a_1, \dots, a_n, b, y\}}$  para ciertos  $b \in B$  y  $h \in H$ . Por cuanto  $y \notin \{a_1, \dots, a_n, b, y\}$ , de (d4) se deduce que  $h \in \overline{\{a_1, \dots, a_n, b, y\}}$ . De aquí tenemos:  $h \in C \cap H = A \subseteq B$ . Por consiguiente,  $q \in B$ . Pero, eso contradice la suposición de que  $q \notin B$ .

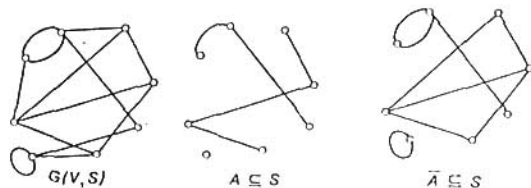


Fig. 8.4'.

8.77. Ilustremos el operador  $A \rightarrow \bar{A}$  con un ejemplo concreto (véase fig. 8.4'). Es evidente que es un operador de clausura, es decir, para él se cumplen los axiomas (d1) - (d3).

Hemos de notar que si  $a$  y  $b$  son  $A$ -conexos, existe una sucesión de aristas  $(x_0, x_1), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  con el número mínimo  $n$ , en la cual ninguna arista se encuentra dos veces. En efecto, supongamos que  $0 \leq i < j \leq n-1$ , y  $(x_i, x_{i+1}) = (x_j, x_{j+1})$ . Entonces, si  $x_i = x_j$  y  $x_{i+1} = x_{j+1}$ , al tachar las aristas  $(x_{i+1}, x_{i+2}), \dots, (x_j, x_{j+1})$  en la sucesión, obtenemos una sucesión de conexión más corta. Si  $x_i = x_{j+1}$  y  $x_{i+1} = x_j$ , pueden tacharse todas las aristas  $(x_i, x_{i+1}), \dots, (x_j, x_{j+1})$ .

Comprobemos ahora la validez del axioma (d4). Sea  $x \in \overline{X \cup \{y\}}$ , pero  $x \notin \bar{X}$ , donde  $x = (a, b)$  e  $y = (c, d)$ . Supongamos que  $e_0, \dots, e_{n-1} \in X \cup \{y\}$

es el camino más corto que une  $a$  y  $b$ . Por cuanto  $x \notin \bar{X}$ , una de las aristas  $e_0, \dots, e_{n-1}$  debe coincidir con  $y$ . Según la observación hecha, sólo una de las aristas  $e_0, \dots, e_{n-1}$ , digamos  $e_l$ , es igual a la arista  $y$ . Pero, entonces, la sucesión  $e_{l+1}, \dots, e_{n-1}, x, e_0, \dots, e_{l-1}$  unirá los vértices  $c$  y  $d$ . De aquí,  $y \in \bar{X} \cup \{x\}$ .

8.78. El conjunto  $A$  de aristas del bosque es independiente. En efecto, la eliminación de cualquier arista  $e \in A$  divide el componente conexo que contiene  $e$  en dos componentes  $y$ , por lo tanto,  $e \notin \overline{A \setminus e}$ . Por otra parte, si  $G(V, A)$  contiene un polígono  $\{e_0, e_1, \dots, e_l\}$ , entonces, por definición de operador, de  $e_0 \in \{e_1, \dots, e_l\}$  se deduce que  $A$  es dependiente. Estos razonamientos demuestran las afirmaciones a), b) y c). Además, de lo mismo se desprende que  $r(A)$  es igual al número de aristas en el bosque engendrador del subgrafo  $G(V, A)$ . Se sabe que cada árbol tiene un número de aristas que es en una unidad menor que el número de vértices. Por consiguiente, si  $V_1, \dots, V_{k(A)}$  es una familia de aristas de los componentes conexos del grafo  $G(V, S)$ , entonces  $r(A) = \sum_{i=1}^{k(A)} (|V_i| - 1) = |V| - k(A)$ . La demostración de la afirmación d) se deduce directamente de esta fórmula.

8.79. Es evidente que  $\mathcal{J}$  satisface los axiomas (i1) y (i2). Para demostrar (i3) veamos dos subconjuntos arbitrarios  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{J}$  que contienen  $k$  y  $k+1$  vértices, respectivamente. Sean  $X$  e  $Y$  unas combinaciones arbitrarias de pares que saturan los vértices de los subconjuntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Son posibles dos casos: cierto elemento  $x \in B \setminus A$  se satura en  $X$  y ningún elemento  $x \in B$  se satura en  $X$ . En el primer caso  $X$  satura  $A \cup \{x\}$  y el axioma (i3) se cumple. En el segundo caso examinemos un subgrafo  $G'$  sobre el conjunto de aristas  $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ . No es difícil mostrar que cada componente conexo del subgrafo  $G'$  es o bien un ciclo, cuyas aristas figuran por turno en  $X$  e  $Y$ , o bien un camino, cuyas aristas figuran por turno en  $X$  e  $Y$ , mientras que sus vértices terminales en una de las combinaciones de pares no están saturados. Por cuanto  $|B \setminus A| > |A \setminus B|$ , en el subgrafo  $G'$  existe un camino  $P$  que lleva del vértice  $v \in B \setminus A$  al vértice situado fuera de  $A \setminus B$ . En este caso el subgrafo sobre el conjunto de aristas  $(X \setminus P) \cup (P \setminus X)$  será una combinación de pares que satura  $v$  y todos los elementos del subconjunto  $A$ . De este modo,  $A \cup \{v\}$  figura en  $\mathcal{J}$  y se cumple el axioma (i3).

8.82. El conjunto  $A \subseteq S$  puede ser representado como una unión de ciclos cuando y sólo cuando para todo  $a \in A$  existe un ciclo  $C$  tal que  $a \in C \subseteq A$ , es decir,  $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$ . Para cierto punto  $a \in A$ ,  $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$  cuando y sólo cuando existe un conjunto cerrado  $C$  tal que  $C \cong A \setminus \{a\}$ , pero  $C \not\subseteq A$ . Observemos que en este caso  $|A \setminus C| = 1$ , lo que se trataba de demostrar.

## § 2. Construcciones y operaciones sobre los matroides

8.83. Es evidente que  $\mathcal{B}^*$  satisface el axioma (b1). Con el fin de demostrar (b2), examinemos  $B_1^*$  y  $B_2^*$  arbitrarias de  $\mathcal{B}^*$  tales que  $B_1^* = S \setminus B_1$ ,  $B_2^* = S \setminus B_2$ , donde  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Sea  $x \in B_1^* \setminus B_2^*$ . Entonces  $x \in B_2 \setminus B_1$ . En virtud del problema 8.34 existe un  $y \in B_1 \setminus B_2$  tal que  $B_3 = (B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ . Ahora  $y \in B_2^* \setminus B_1^*$  y  $(B_1^* \setminus \{y\}) \cup \{x\} = S \setminus [B_1 \setminus \{y\} \cup \{x\}] = S \setminus B_3 = B_3^*$ . De este modo, el axioma (b2) se cumple y, por consiguiente,  $\mathcal{B}^*$  es el conjunto de bases del matroide  $M^*$  sobre  $S$ .

8.84. Resolvamos el problema usando dos procedimientos:

*Primer procedimiento.* Comprobemos que  $r^*$  satisface los axiomas (r1) — (r3). Comencemos por comprobar (r1). Por ser monótona la función de rango  $r$  del matroide  $M$ , tenemos:  $r(S \setminus A) \leq r(S)$ . Por consiguiente,  $r^*(A) \leq |A|$ . Siendo semimodular la función de rango  $r$ , tenemos  $r(S) + r(\emptyset) \leq$

$\leq r(A) + r(S \setminus A)$ , y por eso  $r(S) - r(S \setminus A) \leq r(A) \leq |A|$ . De aquí se deduce directamente que  $r^*(A) \geq 0$ . La comprobación de (r2) no tiene dificultades.

Demostremos la validez de (r3). Para cualesquiera  $A, B \subseteq S$  tenemos

$$\begin{aligned} r^*(A \cup B) + r^*(A \cap B) &= |A \cup B| + |A \cap B| + \\ &+ r(S \setminus (A \cup B)) + r(S \setminus (A \cap B)) - 2r(S) = \\ &= |A| + |B| + r((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) + r((S \setminus A) \cup (S \setminus B)) - \\ &- 2r(S) \leq |A| + |B| + r(S \setminus A) + r(S \setminus B) - 2r(S) = \\ &= r^*(A) + r^*(B) \end{aligned}$$

(de acuerdo con la propiedad de semimodularidad para  $r$ ).

*Segundo procedimiento.* Examinemos  $A \subseteq S$  y sea  $B^*$  una base del matroide  $M^*$  tal que  $|B^* \cap A|$  es máximo. Entonces  $B$  es una base del matroide  $M$  tal que  $|B \cap (S \setminus A)|$  es máximo. De la definición de función de rango tenemos que  $r^*(A) = |B^* \cap A|$  y  $r(S \setminus A) = |B \cap (S \setminus A)|$ . Además

$$\begin{aligned} |B^* \cap A| &= |A| - |B \cap A|; \quad |B \cap (S \setminus A)| = |B| - \\ &|B \cap A| = r(S) - |B \cap A|. \end{aligned}$$

De aquí se deduce la afirmación del problema.

8.88. Para demostrar b) y d), aplíquense las afirmaciones a) y c), respectivamente, al matroide  $M^*$ .

a) Existe una base  $B$  del matroide  $M$  tal que  $A \subseteq B$ . Por eso,  $S \setminus A$  contiene la cobase correspondiente  $B^*$ .

c) Sea  $C^*$  un cociclo del matroide  $M$  y supongamos que existe en  $M$  una base  $B$  que posee la propiedad de que  $C^* \cap B = \emptyset$ . Entonces  $C^*$  está contenido en  $S \setminus B$  y es, por esto, un ciclo del matroide  $M^*$  contenido en la base  $B^* = S \setminus B$  del matroide  $M^*$ . Esta contradicción demuestra el resultado requerido.

e) Sea  $B$  una base del matroide  $M$  tal que  $A \subseteq B$ , y  $C^*$  es un cociclo fundamental contenido en  $B^* \cup \{x\}$ . Entonces

$$C^* \cap A = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } x \in A; \\ \emptyset, & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

lo que se trataba de demostrar.

8.89. El conjunto  $S \setminus A^*$  contiene, en virtud del problema 8.88 b), una base  $B$  del matroide  $M$ . Por cuanto  $A \subseteq S \setminus A^*$  es un conjunto independiente del matroide  $M$ , existe una base  $B$  del matroide  $M$  tal que  $A \subseteq B \subseteq S \setminus A^*$ , y, por consiguiente,  $A^* \subseteq B^*$ .

8.90. Las afirmaciones b) y d) son duales con relación a a) y c).

Demostremos la afirmación a). La necesidad proviene del problema 8.88 c) — e). Para demostrar la suficiencia pongamos que  $B$  es un subconjunto mínimo del matroide  $S$  que tiene una intersección no vacía con cada cociclo del matroide  $M$ . Entonces  $S \setminus B$  es un subconjunto máximo que no contiene cociclos del matroide  $M$ . Por eso  $S \setminus B$  es, por definición, una cobase del matroide  $M$  y, por tanto,  $B$  es la base del matroide  $M$ .

La comprobación de la afirmación c) no ofrece dificultades algunas.

8.91. En virtud del problema 8.90 d), el cociclo  $C^*$  del matroide  $M$  es un subconjunto mínimo que tiene intersección no vacía con cada base del matroide  $M$ . Por eso,  $S \setminus C^*$  es un subconjunto máximo que no contiene las bases del matroide  $M$ . De aquí se desprende directamente la afirmación del problema.

8.92. a) Necesidad. Admitamos lo contrario. Entonces para cualquier subconjunto propio  $C'$  del ciclo  $C$  existe un cociclo  $C^*$  tal que  $|C^* \cap C'| = 1$  (véase el problema 8.88 e)).

Supongamos que  $|C \cap C^*| = 1$  para ciertos  $C \in \mathcal{C}$  y  $C^* \in \mathcal{C}'$ , y sea  $C \cap C^* = \{x\}$ . Examinemos los subconjuntos  $S' = S \setminus C^*$  y  $C' = C \setminus \{x\}$ . Es evidente que  $C' \subseteq S'$ . Entonces, en virtud del problema 8.91, el conjunto  $S' \cup \{x\}$  contiene la base del matroide  $M$ . Sea  $B \subseteq S' \cup \{x\}$  una base tal

que  $C' \subseteq B$ . Observemos que  $x \in B$ . Por eso, el ciclo  $C = C' \cup \{x\}$  está contenido en  $B$ , lo que nos lleva a la contradicción con la suposición admitida. De este modo,  $|C \cap C^*| \neq 1$  y la necesidad está demostrada.

Demostremos la suficiencia. Si  $x \subseteq S$  es tal que  $|X \cap C^*| \neq 1$  para todos los  $C^* \in \mathcal{C}^*$ , entonces el subconjunto  $X$  ha de contener un ciclo, puesto que, si no fuera así,  $X$  sería un conjunto independiente y, en virtud del problema 8.88 e), se encontraría un cociclo  $C^*$  que tuviese exactamente un elemento de  $X$ .

Sea  $C$  un ciclo contenido en  $X$ . De la condición necesaria demostrada del problema se ve con toda evidencia que  $|C \cap C^*| \neq 1$  para todo cociclo  $C^* \in \mathcal{C}^*$ . Por eso  $X = C$ , de lo contrario la condición de minimalidad para  $X$  conduciría a una contradicción.

La afirmación b) es dual con relación a la afirmación demostrada a).

8.96. Por cuanto los ciclos en  $M^*(G)$  son cortes en  $G$ , debemos de comprobar que  $C^*$  es un ciclo en  $(M(G))^*$  cuando y sólo cuando  $C^*$  es un corte en  $G$ . Supongamos al principio que  $C^*$  es un corte en el grafo  $G$ . Si el conjunto  $C^*$  es independiente en  $(M(G))^*$ , entonces puede extenderse hasta que se obtenga la base  $B^*$  en  $(M(G))^*$ . Por consiguiente,  $C^* \cap (S \setminus B^*) = \emptyset$ , donde  $S$  es el conjunto de aristas del grafo  $G$ . Pero esto no es posible, puesto que  $S \setminus B^*$  es un bosque de esqueleto del grafo  $G$ . De aquí  $C^*$  es un conjunto dependiente en  $(M(G))^*$ , y por eso contiene un ciclo de  $(M(G))^*$ .

Por otra parte, si  $\mathcal{Z}^*$  es un ciclo en  $(M(G))^*$ , entonces  $\mathcal{Z}^*$  no se contiene en ninguna base de  $(M(G))^*$ . Por consiguiente,  $\mathcal{Z}^*$  se interseca con cada base de  $M(G)$ , es decir, con cada bosque de esqueleto del grafo  $G$ . Por lo tanto  $\mathcal{Z}^*$  contiene un corte. Y esto es lo que se trataba de demostrar.

8.97. Por cuanto el grafo  $G^*$  es dual con relación al  $G$ , existe entre sus aristas una correspondencia biunívoca que posee la propiedad de que los ciclos en  $G$  corresponden a los de  $G^*$ , y viceversa. De aquí proviene inmediatamente que los ciclos en  $M(G)$  corresponden a los cociclos en  $M(G^*)$  y, por tanto, en virtud del problema 8.96, el matroide  $M(G^*)$  es isomorfo al matroide  $(M(G))^*$ .

8.99. Es obvio que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$  y que de  $\mathcal{C} \subseteq D$  se deduce  $\mathcal{J}_{[A,B]}(C) \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(D)$  para cualesquiera  $C, D \subseteq B \setminus A$ . Queda por demostrar (d3):  $\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$  para todo  $C \subseteq B \setminus A$ . En efecto,

$$\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) = [(\overline{C \cup A \cap B}) \setminus A] \cup A \cap B \setminus A = [(\overline{C \cup A \cap B}) \cup A \cap B] \setminus A = \\ = [(\overline{C \cup A \cup A}) \cap (B \cup A) \cap B] \setminus A = [(\overline{C \cup A \cap (B \cup A)}) \cap B] \setminus A.$$

De la correlación  $\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \subseteq (\overline{C \cup A})$  se deduce que  $\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \subseteq \overline{C \cup A} = C \cup A$ . De aquí,  $\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \cap B \subseteq C \cup A \cap B$ . Por consiguiente

$$[\overline{C \cup A \cap (B \cup A)} \cap B] \setminus A \subseteq (\overline{C \cup A \cap B}) \setminus A = \mathcal{J}_{[A,B]}(C),$$

es decir, se ha obtenido que  $\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) \subseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ . Pero

$\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) \supseteq \mathcal{J}_{[A,B]}(C)$ . De aquí

$$\mathcal{J}_{[A,B]} \mathcal{J}_{[A,B]}(C) = \mathcal{J}_{[A,B]}(C).$$

lo que se trataba de demostrar.

8.100. Si en el operador de clausura  $\mathcal{J}_{[A,B]}(C)$  del problema 8.99 ponemos  $A = \emptyset$ , obtendremos  $\mathcal{J}(C) = \mathcal{J}_{[\emptyset,B]}(C) = \overline{C} \cap B$ . Esto quiere decir que  $C \rightarrow \mathcal{J}(C)$  es una relación de clausura. La propiedad de sustitución (d4) también tiene lugar. Efectivamente, sea  $p \in \mathcal{J}(C \cup \{q\})$ ,  $p \notin \mathcal{J}(C)$ . Entonces  $p \in \overline{C \cup \{q\}} \cap B$ , pero  $p \notin \overline{C} \cap B$ . Esto significa que  $p \in \overline{C \cup \{q\}}$ , pero  $p \notin \overline{C}$ . De aquí, según la propiedad de sustitución para la geometría  $G(S)$ , tenemos  $q \in C \cup \{p\}$ . Por consiguiente,  $q \in \overline{C \cup \{p\}} \cap B$ , puesto que  $p, q \in B$ .

8.101. Si en el operador de clausura  $\mathcal{J}_{[A,B]}(C)$  del problema 8.99 ponemos  $B = S$ , obtendremos  $\mathcal{J}(C) = \mathcal{J}_{[A,S]}(C) = \overline{C \cup A} \setminus A$ . Esto significa que

$C \rightarrow \mathcal{J}(C)$  es una relación de clausura. Queda por comprobar la propiedad (d4): para cualesquiera  $p, q \in S \setminus A$  y para todo  $C \subset S \setminus A$ , si  $p \in \mathcal{J}(C \cup \{q\})$ ,  $p \notin \mathcal{J}(C)$ , entonces  $q \in \mathcal{J}(C \cup \{p\})$ . En efecto, sea  $p \in \overline{C \cup \{q\}} \cup A \setminus A$ ,  $p \notin \overline{C \cup A} \setminus A$ . Es evidente que  $p, q \notin A$ . De aquí  $p \in \overline{C \cup A} \cup \{q\}$ ,  $p \notin \overline{C \cup A}$ . En virtud de la propiedad de sustitución en la geometría  $G(S)$  llegamos a que  $q \in \overline{C \cup A} \cup \{p\}$ . Pero  $q \notin A$ . Por consiguiente,  $q \in \overline{C \cup A} \cup \{p\} \setminus A = \mathcal{J}(C \cup \{p\})$ .

8.102. Compruébese que la familia  $\mathcal{J}(M|B)$  satisface los axiomas (i1) — (i5).

8.103. Sea  $A \subseteq B$  y  $X_1, X_2$ , los conjuntos máximos de  $A$  que constituyen elementos de la familia  $\mathcal{J}(M.B)$ . Entonces existen tales  $Y_1, Y_2$  (ambos son subconjuntos independientes máximos de  $S \setminus B$ ) que  $X_1 \cup Y_1$  y  $X_2 \cup Y_2$  son independientes en  $M$ . De este modo, si  $B_1 = (S \setminus B) \cup A$ , entonces  $X_1 \cup Y_1$  y  $X_2 \cup Y_2$  han de ser bases  $M|B_1$ . Por consiguiente,  $|X_1 \cup Y_1| = |X_2 \cup Y_2|$  y por eso  $|Y_1| = |Y_2|$  y  $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2 = \emptyset$ ,  $|X_1| = |X_2|$ . Así pues, la familia  $\mathcal{J}(M.B)$  satisface el axioma (i3). La validez de los axiomas (i1) y (i2) se comprueba con facilidad. Por consiguiente,  $M.B$  es un matroide sobre el conjunto  $B$ .

8.106. Hágase uso de los resultados de los problemas 8.103 y 8.104.

8.107. Para la demostración emplearemos los axiomas para las funciones de rango y las relaciones de los problemas 8.104 d) y 8.105 d). Supongamos que  $M|A$  tiene una función de rango  $r_A$ . Entonces la función de rango  $r_A^*$  del matroide  $(M|A)^*$ , dual con relación a  $M|A$ , satisface para todo  $B \subseteq A$  la igualdad

$$r_A^*(A \setminus B) = |A| - r(A) - |B| - r(B).$$

En virtud del problema 8.105 d), la función de rango  $r_{S/S \setminus A}^*$  del matroide  $M^*/(S \setminus A)$  se encuentra del modo siguiente:

$$\begin{aligned} r_{S/S \setminus A}^*(A \setminus B) &= r^*[(A \setminus B) \cup (S \setminus A)] - r^*(S \setminus A) = \\ &= r^*(S \setminus B) - r^*(S \setminus A) = |S \setminus B| - r(S) + r(S \setminus (S \setminus B)) - \\ &= |S \setminus A| + r(S) - r(S \setminus (S \setminus A)) = |A| - |B| + r(B) - r(A) = \\ &= r_A^*(A \setminus B). \end{aligned}$$

De este modo queda demostrada la afirmación a). Para demostrar b), hagamos uso de la afirmación a). En efecto,

$$(M^*|(S \setminus A))^* = M^{**}/(S \setminus (S \setminus A)) + M/A.$$

De aquí,  $(M/A)^* = (M^*|(S \setminus A))^{**} = M^*|(S \setminus A)$ .

8.108. Todo menor de un matroide es matroide, puesto que puede obtenerse como un submatroide de contracción del matroide o, lo que es equivalente, como una contracción del submatroide del matroide.

8.111. Compruébese para una familia  $\mathcal{J}$  el cumplimiento de los axiomas (i1) — (i3). Es evidente que  $\emptyset \in \mathcal{J}$ , puesto que  $\emptyset \in \mathcal{J}_1$  y  $\emptyset \in \mathcal{J}_2$ . Sea  $B \in \mathcal{J}$  y  $A \subseteq B$ . Escribamos  $B = B_1 \cup B_2$  y  $A = A_1 \cup A_2$ , donde  $A_1, B_1 \in \mathcal{J}_1$  y  $A_2, B_2 \in \mathcal{J}_2$ . Por cuanto  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  y  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , entonces de que  $A \subseteq B$  se desprende  $A_1 \subseteq B_1$  y  $A_2 \subseteq B_2$ . De aquí, en virtud de la validez de (i2) en los matroides  $M_1$  y  $M_2$ ,  $A_1 \in \mathcal{J}_1$  y  $A_2 \in \mathcal{J}_2$ , y, por consecuencia,  $A_1 \cup A_2 = A \in \mathcal{J}$ . De este modo, la validez de (i1) y (i2) queda establecida.

Demostremos (i3). Sea  $A, B \in \mathcal{J}$  y  $|A| = |B| + 1$ ,  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $B = B_1 \cup B_2$ , donde  $A_1, B_1 \in \mathcal{J}_1$  y  $A_2, B_2 \in \mathcal{J}_2$ ,  $|A| = |A_1| + |A_2|$ ,  $|B| = |B_1| + |B_2|$  (puesto que  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  y  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ). De aquí, o bien  $|A_1| > |B_1|$ , o bien  $|A_2| > |B_2|$ . Ahora, de la validez de (i3) en cada uno de los matroides  $M_1$  y  $M_2$  se deduce la validez de (i3) también para la familia  $\mathcal{J}$  lo que se trataba de demostrar.

8.113. Hágase uso del problema 8.112.

8.119. Veamos una familia  $\mathcal{S} = \{A \subseteq S \mid f(A) < |A|\}$  y demos que sus elementos, mínimos por inclusión, son ciclos de cierto matroide, es decir, satisfacen los axiomas (c1) y (c2). Es obvio que (c1) se cumple por construcción.

Sean  $C_1 \neq C_2$  los conjuntos mínimos de  $\mathcal{S}$  y supongamos que  $a \in C_1 \cap C_2$ . En este caso  $|C_1| \geq 2$  y, por tanto,  $|C_1| - 1 = |C_1 \setminus \{a\}| \leq f(C_1 \setminus \{a\}) \leq f(C_1) < |C_1|$ , es decir,  $f(C_1) = |C_1| - 1$ , y  $f(B) \geq |B|$  para todo  $B \subset C_1$ . Análogamente obtenemos que  $f(C_2) = |C_2| - 1$ . En particular,  $|C_1 \cap C_2| \leq f(C_1 \cap C_2)$ , y, de este modo, por ser  $f$  monótona y semimodular, tenemos

$$\begin{aligned} f((C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}) &\leq f(C_1 \cup C_2) \leq f(C_1) + \\ &+ f(C_2) - f(C_1 \cap C_2) \leq |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - \\ &- |C_1 \cap C_2| \leq |C_1 \cup C_2| - 2 \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}|. \end{aligned}$$

El conjunto  $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$  pertenece a la familia  $\mathcal{S}$  y, por lo tanto, contiene el conjunto mínimo de ésta. El axioma (c2) está comprobado.

La familia  $\mathcal{J}$  define de este modo el matroide  $M$ . Resta demostrar que la función  $r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\}$ , definida para todos los  $A \subseteq S$ , es

una función de rango del matroide  $M$ . Con este fin basta comprobar, por ejemplo, que  $r$  satisface los axiomas (r1) - (r3). Directamente de la definición de  $r$  se deduce que  $0 \leq r(A) \leq |A|$  para cada  $A \subseteq S$  y que  $r(A) \leq r(B)$  para  $A \subseteq B$ , es decir, los axiomas (r1) y (r2) están comprobados. Luego, para todos los subconjuntos  $A_1 \subseteq A$  y  $B_1 \subseteq B$  se verifica la igualdad  $|A \setminus A_1| + |B \setminus B_1| = |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|$ . Por consiguiente, siendo semimodular la función  $f$ , tenemos

$$\begin{aligned} (f(A_1) + |A \setminus A_1|) + (f(B_1) + |B \setminus B_1|) &\geq \\ \geq f(A_1 \cup B_1) + |(A \cup B) \setminus (A_1 \cup B_1)| + f(A_1 \cap B_1) + \\ + |(A \cap B) \setminus (A_1 \cap B_1)|. \end{aligned}$$

De este modo,  $r(A) + r(B) = \min_{A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B} \{f(A_1) + |A \setminus A_1| + f(B_1) + |B \setminus B_1|\} \geq \min_{\substack{C_1 \subseteq A \cup B, C_2 \subseteq A \cap B}} \{f(C_1) + |(A \cup B) \setminus C_1| + f(C_2) + |(A \cap B) \setminus C_2|\} = r(A \cup B) + r(A \cap B)$ . De este modo queda establecida la validez del axioma (r3) y el problema está resuelto.

8.120. Sea  $f(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A)$  para todo  $A \subseteq S$ . Entonces  $f$  es una función semimodular y monótona creciente de números enteros, dado que precisamente tales son las funciones de rango  $r_i$  de los matroides  $M_i$ . Por consiguiente, en virtud del problema 8.119, la familia  $\mathcal{J}' = \{A \subseteq S \mid \forall B \subseteq A: |B| \leq f(B)\}$  define el matroide  $M(S, r)$ , donde

$$r(A) = \min_{B \subseteq A} \{f(B) + |A \setminus B|\} = \min_{B \subseteq A} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i(B) + |A \setminus B| \right\}$$

Luego, supongamos que  $B \subseteq A$ ,  $A \in \mathcal{J}'$  y  $B = \sum_{i=1}^n B_i$ , donde  $B_i \subseteq A_i$  para  $i=1, 2, \dots, n$ . Entonces

$$|B| = \left| \bigcup_{i=1}^n B_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n r(B_i) \leq \sum_{i=1}^n r_i(B),$$



puesto que  $B_i \in \mathcal{J}_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por consiguiente,  $A \in \mathcal{J}'$ . Es cierta también, evidentemente, la afirmación inversa de que si  $A \in \mathcal{J}'$ , entonces  $A \in \mathcal{J}$ . Quiere decir,  $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$  y el problema está resuelto.

8.121. La implicación (c)  $\Rightarrow$  (b) es obvia. Para demostrar la implicación (b)  $\Rightarrow$  (a), hagamos uso del problema 8.119. Supongamos que  $B \subseteq A$  y  $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ , donde  $B_i \subseteq A_i$  para todo  $i$ . Partiendo de que (b) es válida, tenemos:

$$|B| \leq \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n r_i(B_i) \leq \sum_{i=1}^n r_i(B) \text{ lo que es, en vista del problema}$$

8.119, simplemente una definición del conjunto independiente del matroide  $\bigcup_{i=1}^n M_i$ . Resta mostrar que (a)  $\Rightarrow$  (b). Elijamos  $n$  conjuntos disjuntos dos a dos

$S_i$  que tengan la misma potencia que  $S$  y  $n$  aplicaciones biunívocas  $\varphi_i: S \rightarrow S_i$ . Suponiendo que  $\varphi_i(B)$  es un subconjunto independiente en  $S_i$  si y sólo si  $B$  es un conjunto independiente del matroide  $M_i$ , obtenemos los matroides  $N_i$  sobre los conjuntos  $S_i$  que son isomorfos a los matroides  $M_i$ , cualesquiera que sean  $i$ . Designemos por  $r'_i$  la función de rango del matroide  $N_i$ , es decir,  $r'_i(\varphi_i(A)) = r_i(A)$  para cada  $A \subseteq S$ , y con  $r'$ , la función de rango del matroide  $\bigoplus_{i=1}^n N_i$ .

Definamos un grafo bipartido  $G$  sobre el conjunto de vértices  $S \cup (\bigcup_{i=1}^n S_i)$  con el conjunto de aristas  $R = \{(p, \varphi_i(p)) \mid p \in S, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Supongamos que  $T$  es un matroide de las combinaciones de pares del grafo  $G$  sobre el conjunto  $S$  (véase el problema 8.79). Está claro que el matroide  $T$  se induce por la función semimodular monótona  $f(A)$  (definida para todo  $A \subseteq S$ ) tal que

$$f(A) = r' \left( \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(A) = \sum_{i=1}^n r'_i \varphi_i(A) \right) = \sum_{i=1}^n r_i(A).$$

De aquí se deduce que las funciones  $f$  y  $\sum_{i=1}^n r_i$  son, en realidad, iguales o,

dicho de otro modo que  $\bigcup_{i=1}^n M_i = T$ . Utilizando la descripción de los conjuntos independientes en el matroide  $T$ , tenemos: el conjunto  $A$  es un conjunto independiente del matroide  $\bigcup_{i=1}^n M_i$  cuando y sólo cuando existe tal encaje  $\varphi: A \rightarrow$

$\bigcup_{i=1}^n S_i$  que  $\varphi(A)$  es un conjunto independiente del matroide  $\bigoplus_{i=1}^n N_i$ , si y

sólo si existe un encaje  $\varphi: A \rightarrow \bigcup_{i=1}^n S_i$  tal que  $\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(A)$ , donde  $\varphi_i(A)$  son conjuntos independientes del matroide  $N_i$  para cualquier  $i$ , cuando y sólo cuando  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  es una unión de conjuntos disjuntos de dos en dos y  $A_i$

son conjuntos independientes del matroide  $M_i$  para cualquier  $i$ . La demostración está concluida.

8.122. Hágase uso de la solución del problema 6.111.

8.123. Supongamos que  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{J}_2$  son familias de conjuntos independientes de los matroides  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Un subconjunto  $A$  es independiente en  $M_2$  cuando y sólo cuando  $S \setminus A$  contiene la base  $B$  del matroide  $M_2^*$ . Es evidente que  $r_2^*(S) + \max\{|A|, A \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2\} \leq \max\{|A \cup B|, A \in \mathcal{J}_1, B \in \mathcal{J}_2^*\} = |A_1 \cup B_1|$ , donde podemos considerar que  $B_1$  es la base del matroide

$M_2^*$  y  $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ . Por consiguiente, para  $A_1 \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$  se verifica, en virtud del problema 8.122, la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \max_{A \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2} \{ |A| \} &= -r_2^*(S) + \min_{A \subseteq S} (r_1(A) + r_2^*(A) + |S \setminus A|) = \\ &= \min_{A \subseteq S} (r_1(A) + r_2(S \setminus A)). \end{aligned}$$

8.124. Supongamos, sin limitar la generalidad de los razonamientos, que  $S = B_1 \cup B_2$ . Pongamos  $r(S) = |B_1| = |B_2| = n$ . Para la contracción  $M_1 = M/Y_1$  tenemos  $r_1(X) = r(X \cup Y_1) - |Y_1|$ , cualquiera que sea  $X \subseteq S \setminus Y_1$ . Existe un matroide  $M_1$  con la misma función de rango  $r_1(X)$  definida para cualquier  $X \subseteq B_2$ . Análogamente, existe el matroide  $M_2$  sobre  $B_2$  con  $r_2(X) = r(X \cup X_1) - |X_1|$ ,  $X \subseteq B_2$ . Para el matroide dual  $M_3 = M_2^*$  sobre  $B_2$  obtenemos  $r_3(X) = |X| + r((B_2 \setminus X) \cup X_1) - n$ . Para  $X \subseteq B_2$ ,  $Y = B_2 \setminus X$  tenemos, teniendo en cuenta la condición de semimodularidad de las funciones de rango:

$$\begin{aligned} r_1(X) + r_3(Y) &= r(X \cup Y_1) + r(X \cup X_1) - |Y_1| + |Y| - n \geq \\ &\geq r(X \cup B_1) + r(X \cup (X_1 \cap Y_1)) + |Y| - |Y_1| - n = \\ &= |X| + |Y| - |Y_1| = |X_1|. \end{aligned}$$

Entonces, en virtud del problema 8.123, existe  $X_2 \subseteq B_2$ ,  $|X_2| = |X_1|$  tal que  $r_1(X_2) = r_3(X_2) = |X_2|$ . Por consiguiente,

$$r(X_2 \cup Y_1) = r(Y_2 \cup X_1) = n, \text{ donde } Y_2 = B_2 \setminus X_2$$

[Woodall D. R. — J. Comb. Theory, 1974, 16, p. 227—228].

8.125. La demostración se realiza por inducción. El caso de  $k = 2$  proviene del problema 8.124. Supongamos que el resultado es válido para las particiones que contienen menos de  $k$  bloques. Supongamos que  $S_1 \subseteq S$  y  $T_1 \subseteq T$  son unos conjuntos, para los cuales  $(S \setminus S_1) \cup T_1$  y  $(T \setminus T_1) \cup S_1$  son bases del matroide  $M$ . Analicemos el matroide  $M_1 = M/S_1$  con función de rango  $r_1(X) = r(X \cup S_1) - r(S_1)$ . Observemos que  $r_1(S \setminus S_1) = r_1(T \setminus T_1) = r_1(M_1)$ , es decir,  $S \setminus S_1$  y  $T \setminus T_1$  son las bases del matroide  $M_1$ . Entonces, tenemos una partición  $S \setminus S_1 = S_2 \cup \dots \cup S_k$  en  $k - 1$  bloques. Según la suposición por inducción, existe una partición correspondiente  $T \setminus T_1 = T_2 \cup \dots \cup T_k$  tal que  $(S \setminus S_1 \setminus S_i) \cup T_i$  es una base de  $M_1$  para  $i = 2, \dots, k$ . De aquí se deduce que  $(S \setminus S_i) \cup T_i$  es la base del matroide  $M$  para  $i = 2, \dots, k$ . Pero, por cuanto  $(S \setminus S_1) \cup T_1$  es también la base de  $M$ , la afirmación queda demostrada.

8.126. Sea  $G(S)$  una geometría sobre el conjunto  $S$ . Construyamos su extensión unipuntual  $G'(S \cup \{a\})$ , tomando como relación de clausura  $A \rightarrow \mathcal{J}(A)$ , donde

$$\mathcal{J}(A) = \begin{cases} \bar{A}, & \text{si } a \in A \text{ y } \bar{A} \neq S; \\ \overline{A \setminus a} \cup a, & \text{si } a \in A \text{ y } r_G(\overline{A \setminus a}) < r(G) - 1, \\ S \cup a, & \text{si } \bar{A} = S, \text{ o bien } a \in A \text{ y } r_G(\overline{A \setminus a}) = r(G) - 1 \end{cases}$$

para cualesquiera  $A \subseteq S \cup \{a\}$ . Es obvio que esto es una relación de clausura.

Comprobemos (d4): sea  $P \in \mathcal{J}(A \cup \{q\})$ ,  $p, q \in \mathcal{J}(A)$ . Entonces puede haber dos casos. En primer lugar,  $p = a \in \mathcal{J}(A \cup \{q\})$ . Entonces o bien  $q = a$ , o bien  $r(A) = r(G) - 1$ . De aquí  $q \in \mathcal{J}(A \cup a)$  ó  $\mathcal{J}(A \cup a) = S \cup a \supseteq q$ . En segundo lugar, cuando  $p \neq a$ ,  $p \in \mathcal{J}(A \cup \{q\})$ , tenemos

$$a \in A \Rightarrow q \in \mathcal{J}(A \cup \{p\}),$$

$$\begin{aligned} a \in A \Rightarrow p \in \mathcal{J}(A \cup \{q\}) &= \overline{A \setminus a} \cup \{q\} \cup a \Rightarrow p \in \overline{(A \setminus a) \cup \{q\}} \\ \cup \{q\} &\Rightarrow q \in \overline{(A \setminus a) \cup \{p\}}. \end{aligned}$$

La igualdad  $r(G') = r(G)$  se cumple por construcción.



El caso 1 queda demostrado. En el caso 2) se debe mostrar que

$$\overline{r}((A \cap B) \cup p) + \overline{r}(A \cup B \cup p) \leq \overline{r}(A \cup p) + \overline{r}(B \cup p)$$

Si  $\overline{A \cup B} \notin \mathcal{M}$ , entonces también  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A \cap B} \notin \mathcal{M}$ , de donde se deduce la desigualdad. Por otra parte, si  $\overline{A \cup B} \in \mathcal{M}$ , esto puede ser sólo cuando  $\overline{A} \in \mathcal{M}, \overline{B} \in \mathcal{M}$  y  $A, B$  es un par modular en  $G(S)$ . En tal caso  $\overline{A}, \overline{B}$  será también un par modular y  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{M}$ .

8.131. Indicación. Hágase uso de la solución del problema 8.130.

8.137. No, no para todo matroide. Por ejemplo, el matroide de Fano  $F_7$  no puede ser incrementado, puesto que cada subconjunto que contiene cuatro elementos contiene obligatoriamente, por lo menos, una terna «prohibida».

8.138. Sí; por ejemplo, un matroide sobre  $S$ , de cuyas bases sirven los subconjuntos de  $S$  que contienen cuatro elementos, a excepción de los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\} \text{ y } \{1, 2, 3, 7\}, \\ & \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 7, 6\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 6, 7\}, \\ & \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{6 \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \\ & \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 6, 7\}, \\ & \{1, 3, 6, 7\}, \{2, 3, 6, 7\}. \end{aligned}$$

8.142. Crapo H. H. «Annal N.Y. Acad. Sc.», 1970, 175, 89—92.

8.145. El problema fue formulado por primera vez por Crapo en 1971.

8.148. a) Se deduce de la definición de aplicación fuerte y de la propiedad consistente en que cada elemento del retículo geométrico es una unión de cierto número de átomos.

b) Analícese la cadena máxima de 0 a  $x$  del retículo  $L_1$  y hágase uso del resultado a).

8.149. Es evidente que si  $\sigma: L_1 \rightarrow L_2$  es un isomorfismo, entonces  $\sigma$  es la aplicación fuerte «sobre» y  $r(L_1) = r(L_2)$ . Con el fin de demostrar la afirmación inversa, admitamos primeramente que  $\sigma$  es una aplicación biunívoca. Si  $\sigma$  es una aplicación fuerte biunívoca, ella conserva la relación de orden. En efecto, sea  $x \not\leq y$ , y  $\sigma(x) \leq \sigma(y)$ . Entonces  $y < x \vee y$ , y  $\sigma(y) = \sigma(x) \vee \sigma(y) = \sigma(x \vee y)$ , mas esto contradice la biunivocidad de la aplicación  $\sigma$ . De este modo, la relación de orden se conserva y toda aplicación fuerte biunívoca es un isomorfismo.

Supongamos que  $\sigma: L_1 \rightarrow L_2$  es una aplicación fuerte «sobre» y que  $r(L_1) = r(L_2)$ . Para finalizar la demostración mostremos que  $\sigma$  es una aplicación biunívoca. Por cuanto  $\sigma$  es una superposición, entonces  $\sigma(0) = 0$  y  $\sigma(1) = 1$ . Admitamos ahora que  $\sigma(x) = \sigma(y)$  para  $x, y \in L_1$  tales que  $x \neq y$ . Entonces  $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \vee \sigma(y) = \sigma(x)$ . Elijamos una cadena máxima  $C$  de 0 a 1 en  $L_1$  que pase por  $x$  y  $x \vee y$ . La imagen de esta cadena  $\sigma(C)$  es una cadena máxima de 0 a 1 en  $L_2$ , puesto que las aplicaciones fuertes conservan la propiedad de recubrimiento. Pero  $r(L_1) = r(L_2)$ , por lo cual  $\sigma$  es biunívoca sobre  $C$  y, por consiguiente,  $x = x \vee y$ , lo que contradice nuestra suposición. Por eso  $\sigma$  es una aplicación fuerte biunívoca y el problema está resuelto.

8.150. (a)  $\Rightarrow$  (b). Sea  $X$  un conjunto cerrado en el matroide  $\mathcal{N}(T)$ . Por cuanto  $\sigma[\sigma^{-1}(X)] \subseteq \overline{\sigma\sigma^{-1}(X)} = \overline{X} = X$ , entonces

$$\overline{\sigma^{-1}(X)} \subseteq \sigma^{-1}\sigma[\overline{\sigma^{-1}(X)}] \subseteq \sigma^{-1}(X).$$

Por consiguiente,  $\overline{\sigma^{-1}(X)} = \sigma^{-1}(X)$  y  $\sigma^{-1}(X)$  es un conjunto cerrado.

(b)  $\Rightarrow$  (c). Establezcamos primero que  $\sigma^*$  conserva el orden. Si  $v$  y  $u$  son superficies del retículo  $L(M)$ , entonces de que  $u \leq v$  se deduce que  $U \subseteq V$ , o bien que  $\overline{\sigma(U)} \subseteq \overline{\sigma(V)}$ , o bien que  $\sigma^*(u) \leq \sigma^*(v)$ . En particular,  $\sigma^*(x \vee y) > \sigma^*(y)$  y  $\sigma^*(x \vee y) > \sigma^*(y)$ , es decir,  $\sigma^*(x \vee y) \geq \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$ . Demostremos la desigualdad inversa. Sea  $z = \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$ . Por eso el conjunto  $Z$

está cerrado en el matroide  $N(T)$  y, por tanto,  $\sigma^{-1}(Z)$  también está cerrado en el matroide  $M(S)$ . Además,  $Z$  contiene los conjuntos  $X$  e  $Y$ . Por consiguiente, si  $u = x \vee y$  entonces  $U \subseteq Z$ . De este modo,

$$\overline{\sigma(U)} \subseteq \sigma[\overline{\sigma^{-1}(Z)}] \subseteq \overline{Z} = Z.$$

Por consiguiente,  $\sigma^*(x \vee y) \leq \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$ . De aquí y de las desigualdades obtenidas anteriormente tenemos  $\sigma^*(x \vee y) = \sigma^*(x) \vee \sigma^*(y)$ .

Supongamos ahora que existe un átomo  $p$  en  $L(M)$  tal que  $\sigma^*(p)$  tiene un rango estrictamente superior a 1. Sea  $q$  un átomo del retículo  $L(N)$  y  $q^* < \sigma^*(p)$ . Entonces,  $\overline{\sigma} \subset \sigma^{-1}(Q) \subset P$ , donde todas las inclusiones son estrictas. De este modo,  $\sigma^{-1}(Q)$  no puede ser cerrado y hemos llegado, pues, a una contradicción con la suposición. Por consiguiente, la aplicación  $\sigma^*$  aplica los átomos en los átomos o en los retículos nulos.

(c)  $\Rightarrow$  (a). Supongamos que  $x \in L(M)$  y  $\overline{A} = X$ . Sean  $p, q, \dots, r$  los átomos de  $A$ . Entonces

$$\sigma^*(x) = \sigma^*(p \vee q \vee \dots \vee r) = \sigma^*(p) \vee \sigma^*(q) \vee \dots \vee \sigma^*(r),$$

o bien, lo que es lo mismo,  $\sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{\sigma(A)}$ .

8.154. La equivalencia de las afirmaciones (a), (b), (c) proviene de la definición y del problema 8.150. Para demostrar la equivalencia entre (c) y (d), hagamos uso de que si  $A \subseteq S$ , entonces

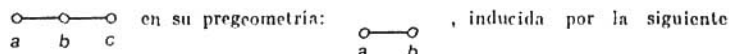

$$\overline{A^*} = A \cup \{\sigma \mid a \notin S \setminus (A \cup \{a\})\},$$

donde  $\overline{A^*}$  es la clausura del conjunto  $A$  en el matroide  $M^*$ , y  $M^{**} = M$ .

8.160. Higgs D. A. «J. London Math. Soc.», 1966, 41, 612—618; Higgs D. A. «J. Combin. Theory», 1966, 5, 185—191.

8.161. Hágase uso del hecho de que  $\sigma^*$  conserva el supremo reticular y aplica los átomos en átomos o en un conjunto vacío.

8.162. Tal es, por ejemplo, la aplicación débil de la geometría  $G$ :

 en su pregeometría: , inducida por la siguiente

función:

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \neq c; \\ 0, & \text{si } x = c. \end{cases}$$

8.166. Si la función idéntica  $\tau$  sobre el conjunto  $S \cup 0$  induce una aplicación débil del matroide  $M(S)$  en el matroide  $N(S)$ , donde  $r(M) = m$ ,  $r(N) = n$  y  $m > n$ , entonces, evidentemente,  $\tau$  induce la aplicación débil del  $n$ -truncamiento  $M_n$  del matroide  $M(S)$  en el matroide  $N(S)$ .

8.167. Muéstrase que  $\tau$  induce una aplicación débil conservadora de rango  $M$  en  $N$  cuando y sólo cuando cada base de  $N$  es también base en  $M$ . Hágase uso del hecho de que la base del matroide  $M^*$  es exactamente un complemento de la base del matroide  $M$ .

8.172. Lucas D. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, 206, 247—279.

8.173. Lucas D. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, 206, 247—279.

8.174. El matroide dual con relación al matroide de Faano está representado en la fig. 8.5'. Todas las rectas del matroide  $\Phi^*$  contienen 2 puntos;  $\Phi^*$  tiene 7 planos de potencia 4, y 7 planos de potencia 3.

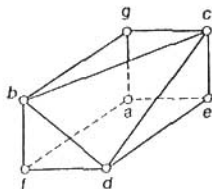


Fig. 8.5'.

### § 3. Coordinatización y representabilidad de los matroides

8.175. Sea  $M$  un matroide con la función de rango  $r$  y una familia de conjuntos independientes  $\mathcal{J}$ . Entonces, para cada aplicación  $\varphi: S \rightarrow V$  y  $A \subseteq S$  arbitrario se cumplen las siguientes relaciones:

a)  $\dim \varphi(A) \leq |\varphi(A)|$ , con la particularidad de que  $\dim \varphi(A) = |\varphi(A)|$  cuando y sólo cuando  $\varphi(A)$  es linealmente independiente en  $V$ ;

b)  $r(A) \leq |A|$ , con la particularidad de que  $r(A) = |A|$  cuando y sólo cuando  $A \in \mathcal{J}$ ;

c)  $|\varphi(A)| \leq |A|$ , con la particularidad de que  $|\varphi(A)| = |A|$  cuando y sólo cuando  $\varphi$  es una aplicación biunívoca.

Por eso, si  $\varphi: S \rightarrow V$  conserva el rango, entonces  $A \in \mathcal{J}$  cuando y sólo cuando  $|A| = r(A)$  ( $= \dim \varphi(A) \leq |\varphi(A)| \leq |A|$ ), es decir, cuando y sólo cuando  $|A| = \dim \varphi(A) = |\varphi(A)|$ , o bien si y sólo si  $\varphi|_A$  es biunívoca y  $\varphi(A)$ , un conjunto linealmente independiente en  $V$ .

Demostremos la afirmación inversa. Sea  $\varphi: S \rightarrow V$  tal que  $A \in \mathcal{J}$  cuando y sólo cuando  $\varphi|_A$  es biunívoca y  $\varphi(A)$ , linealmente independiente en  $V$ . Tomemos un subconjunto arbitrario  $X \subseteq S$ . Sea  $B$  una base del matroide  $M|_X$  y sea  $\varphi(B')$  un subconjunto máximo (por inclusión) de vectores linealmente independientes en  $\varphi(X)$ , donde  $B' \subseteq X$  y  $\varphi|_{B'}$  es biunívoca. En este caso tenemos

$$r(X) = |B| = |\varphi(B)| = \dim \varphi(B) \leq \dim \varphi(X)$$

y

$$r(X) \geq r(B') = |B'| = |\varphi(B')| = \dim \varphi(X).$$

De este modo,

$$r(X) = \dim \varphi(X)$$

y  $\varphi: S \rightarrow V$  es la aplicación conservadora del rango, lo que se trataba de demostrar.

8.176. Sea  $\varphi: S \rightarrow V$  una coordinatización del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ . Para cada átomo  $p$  del retículo  $L(M)$  (es decir, para cada superficie  $P = \overline{P}$  del matroide  $M$ ) elijamos un elemento determinado  $a_p \in \overline{\varphi(P)}$ ,  $a_p \neq 0$ , de  $V$  (esto es bien factible, puesto que  $\overline{P} = \overline{Q}$  cuando y sólo cuando  $\overline{\varphi(P)} = \overline{\varphi(Q)}$ ) y definamos la aplicación  $\varphi_0: S \rightarrow V$ , donde  $S_0$  es un conjunto de átomos del retículo  $L(M)$ , del modo siguiente:

$$\varphi_0(p) = a_p.$$

La aplicación  $\varphi_0$  es una coordinatización de la geometría  $G$  sobre el campo  $G$ . La afirmación inversa es evidente.

8.177. Sea  $\varphi: S \rightarrow V$  una coordinatización del matroide de Fano  $\Phi$  sobre cierto campo  $F$ . Sin limitar la generalidad de los razonamientos pongamos:  $\varphi(a) = (1, 0, 0)$ ;  $\varphi(b) = (0, 1, 0)$ ;  $\varphi(c) = (0, 0, 1)$  y  $\varphi(d) = (1, 1, 1)$ . Por cuanto  $e$  depende de  $\{a, b\}$  y  $\{c, d\}$ , ha de cumplirse la igualdad  $\varphi(e) = \lambda(1, 1, 0)$ , donde  $\lambda \neq 0$ , y, análogamente,  $\varphi(f) = \mu(1, 0, 1)$ ,  $\varphi(g) = j(0, 1, 1)$ , donde  $\mu, j \neq 0$ . Los vectores  $\varphi(e)$ ,  $\varphi(f)$ ,  $\varphi(g)$  son linealmente dependientes, por lo cual  $\det(\varphi(e); \varphi(f); \varphi(g)) = \lambda\mu j(-2) = 0$ , lo que es posible sólo para un campo de característica 2.

8.178. Hágase uso de la solución del problema 8.177.

8.179. Es suficiente convencerse de que para cada  $(k \times p)$ -submatriz  $A_1$  de la matriz  $A$  tiene lugar la relación  $r(A_1) = r(BA_1)$  y que con las operaciones citadas el rango de la matriz queda intacto. Aquí, mediante  $r$  se designa la función de rango de la matriz.

8.180. Sea  $\varphi: S \rightarrow V$  una coordinatización del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ . Entonces  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_h)\}$  es un conjunto linealmente independiente de vectores en  $V$  y para cada  $e \in S$  tenemos

$$\varphi(e) = \sum_{i=1}^h \lambda_i(e) \varphi(e_i)$$

para ciertos coeficientes unívocamente definidos  $\lambda_i(e)$  del campo  $F$ . Fijemos una aplicación  $\theta: S \rightarrow F^h$ , poniendo

$$\theta(e) = (\lambda_1(e), \dots, \lambda_h(e)), \text{ donde } e \in S.$$

Entonces

$$\theta(e_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ para todo } i, \text{ donde}$$

$$i_i^i = 1, 2, \dots, h.$$

Mostremos que  $\theta$  es una aplicación que conserva el rango. En efecto, sea  $A$  un subconjunto arbitrario del conjunto  $S$ . Entonces  $\sum_{e \in A} \alpha_e \theta(e) = 0$ , donde  $\alpha_e \in F$  en aquel único caso cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e (\lambda_1(e), \dots, \lambda_h(e)) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \lambda_1(e) = \dots = \sum_{e \in A} \alpha_e \lambda_h(e) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \left( \sum_{i=1}^h \lambda_i(e) \varphi(e_i) \right) = 0,$$

o bien cuando y sólo cuando

$$\sum_{e \in A} \alpha_e \varphi(e) = 0.$$

Por consiguiente,  $\theta(e)$  y  $\varphi(e)$  satisfacen precisamente las mismas relaciones, lo que significa que  $\theta$  es una aplicación conservadora de rango de  $S$  en  $F^h$ . Así pues, hemos establecido que  $\theta$  es la coordinatización del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ .

8.181. Hágase uso del problema 8.180 y fórmese la matriz  $A$  con las columnas  $\theta(e_1), \dots, \theta(e_h)$ , donde  $e_1, \dots, e_h$  son elementos de la base  $B$  del matroide  $M$ , la cual será precisamente la que buscamos.

8.182. Es fácil mostrar que el matroide  $U_{2,4}$ , definido sobre el conjunto  $S = \{a, b, c, d\}$ , no es representable sobre el campo  $GF(2)$ . Supongamos que esto no es así. Entonces, en virtud del problema 8.181, para la base  $\{a, b\}$  del matroide  $U_{2,4}$  existe una  $(2 \times 4)$ -matriz de representación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q \\ 0 & 1 & r & s \end{pmatrix},$$

donde  $p, q, r, s \in GF(2)$  y ningún elemento de  $p, q, r, s$  es igual a cero. En efecto, si, por ejemplo,  $p = 0$ , entonces  $\{b, c\}$  no puede ser independiente. Por eso la matriz de representación  $U_{2,4}$  sobre el campo  $GF(2)$  debe tener la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que no es posible, puesto que en tal caso el conjunto  $\{c, d\}$  será dependiente en  $U_{2,4}$ . De este modo, el matroide  $U_{2,4}$  no es representable sobre el campo  $GF(2)$ . Al mismo tiempo el matroide  $U_{2,4}$  es representable sobre cualquier otro campo  $F$ , distinto de los campos de característica 2. Efectivamente, en el campo  $F$  se tiene por lo menos un elemento  $t$ , distinto de 0 y 1, y, por tanto, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

será la representación buscada de  $U_{2,4}$  sobre el campo  $F$ .

8.185. Sea  $G$  un grafo arbitrario con el conjunto de vértices  $V$ ,  $|V| = n$ , y el conjunto de aristas  $S$ , y sea  $F$  un campo arbitrario. Enumeremos todos los vértices del grafo  $G$  de 1 a  $n$  y pongamos

$$f(v_i) = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T,$$

para todo  $i$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Muéstrase que  $\varphi: S \rightarrow F^n$ , definida para todo  $a = (v_i, v_j) \in S$  del modo siguiente:  $\varphi(a) = e_i - e_j$ , es la coordinatización del matroide  $M(G)$  sobre el campo  $F$ . Además si  $F = GF(2)$ , entonces  $\varphi(a) = e_i + e_j$ .

8.186. Sea  $M$  un matroide de rango  $k$  sobre el conjunto  $S = \{e_1, \dots, e_n\}$  y sea  $A$  una  $(k \times n)$ -matriz arbitraria con los coeficientes del campo  $F$  tal que la aplicación que pone en correspondencia al elemento  $e_i \in S$  la  $i$ -ésima columna de la matriz  $A$  conserva el rango (la existencia de tal matriz fue establecida en el problema 8.181). Entonces un sistema de ecuaciones

$$Ax = 0, \quad \text{donde } x \in F^n$$

tiene  $n - k$  soluciones linealmente independientes en  $F^n$ . Sea  $B$  una  $(n \times (n - k))$ -matriz, de cuyas columnas sirven las soluciones linealmente independientes del sistema  $Ax = 0$ . Demostremos por turno dos afirmaciones respecto de la matriz  $B$ , de las cuales se deducirá la afirmación del problema.

(1) Un conjunto de  $k$  columnas de la matriz  $A$  es linealmente dependiente cuando y sólo cuando el conjunto complementario de  $(n - k)$  columnas de la matriz  $B^T$  es linealmente dependiente.

Por ser simétrica la relación entre las matrices  $A$  y  $B$  y debido a la posibilidad de enumerar las columnas de la matriz  $A$ , para demostrar la afirmación (1) basta mostrar que las primeras  $k$  columnas de la matriz  $A$  son linealmente dependientes cuando y sólo cuando las últimas  $(n - k)$  columnas de la matriz  $B^T$  son linealmente dependientes. Dividamos las matrices  $A$  y  $B$  en submatrices del modo siguiente:  $A = (A_1, A_2)$  y  $B = (B_1, B_2)^T$ , donde  $A_1$  es una  $(k \times k)$ -submatriz,  $A_2$  es  $((k \times (n - k))$ -submatriz de la matriz  $A$ , y  $B_1$  es  $(k \times (n - k))$ -submatriz,  $B_2$  es  $((n - k) \times (n - k))$ -submatriz de la matriz  $B$ .

El conjunto de las primeras  $k$  columnas de la matriz  $A$  es linealmente dependiente cuando y sólo cuando  $A_1$  es una matriz degenerada, o bien cuando y sólo cuando existe tal  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \in F^n$ ,  $y \neq 0$ , que  $Ay^T = 0$ , o bien si y sólo si existe tal  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-k}) \in F^{n-k}$ ,  $z \neq 0$  que  $y^T = Bz^T$  (por cuanto las columnas de la matriz  $B$  engendran un espacio de soluciones del sistema  $Ax = 0$ ), o bien cuando y sólo cuando  $B_2z^T = 0$  y  $z \neq 0$ , o bien cuando y sólo cuando  $B_2^*$  es una matriz degenerada, o bien si y sólo si las últimas  $(n - k)$  columnas de la matriz  $B^T$  son linealmente dependientes.

(2) La aplicación  $\varphi: S \rightarrow F^{n-k}$  que a todo elemento  $e_i$  le pone en correspondencia la  $i$ -ésima columna de la matriz  $B$  conserva el rango del matroide dual  $M^*$ .

Sea  $X \subseteq S$  y  $r^*(X) = m$ , donde  $r^*$  es la función de rango del matroide  $M^*$ . Se requiere demostrar que  $\dim \{\varphi(a) \mid a \in X\} = m$ . Sin limitar la generalidad de razonamientos podemos considerar que  $X = \{e_1, \dots, e_s\}$ . Notemos que  $r^*(X) = r^*(\{e_1, \dots, e_s\}) = m$ , cuando y sólo cuando existe una base del matroide  $M$  que contiene  $(s - m)$  elementos de  $X$  y ninguna otra base de  $M$



contiene un número mayor de elementos de  $X$ , o bien si, y sólo si, existe un conjunto linealmente independiente de  $k$  columnas de la matriz  $A$  que contiene exactamente  $(s - m)$  columnas de las primeras  $s$  columnas y ningún otro conjunto linealmente independiente de  $k$  columnas contiene un número mayor de columnas entre las primeras  $s$  columnas, o bien cuando y sólo cuando existe un conjunto linealmente independiente de  $(n - k)$  columnas de la matriz  $B^T$  que contiene exactamente  $m$  columnas de las primeras  $s$  y ningún otro conjunto de este género contiene un número mayor de columnas entre las primeras columnas de la matriz  $B^T$  (hemos tomado los complementos y aprovechamos la afirmación demostrada (I)), o bien si y sólo si entre las primeras  $s$  columnas de la matriz  $B^T$ , a saber, entre  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_s)$ , hay no más de  $m$  linealmente independientes, es decir,

$$\dim \{ \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_s) \} = m.$$

De este modo,  $\varphi$  es una coordinatización del matroide  $M^*$  sobre el campo  $F$ .

8.187. Hágase uso del problema 8.186 y muéstrase que las columnas de la matriz  $(-A^T, E_{n-k})$  engendran un espacio de soluciones del sistema  $(E_n, A) \times \times x^T = 0$ .

8.189. a) Es evidente que si  $\varphi$  es una coordinatización del matroide  $M$  en el conjunto  $S$  sobre el campo  $F$ , entonces  $\varphi|_A$ , donde  $A \subseteq S$ , es una coordinatización del submatroide  $M|A$  sobre el campo  $F$ . En virtud del problema 8.186 y de la igualdad  $(M/A)^* = M^*|(S \setminus A)$  del problema 8.107, como también de la observación anterior, concluimos que cualquier contracción del matroide  $M$  es también representable sobre el campo  $F$ . Por cuanto cualquier menor puede ser representado mediante una sucesión de contracciones y exclusiones, la afirmación a) del problema queda demostrada.

b) Si  $A_1$  y  $A_2$  son matrices de representaciones de los matroides  $M_1$  y  $M_2$  sobre el campo  $F$ , respectivamente, entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

es una matriz de representación del matroide  $M = M_1 \oplus M_2$  sobre el campo  $F$ . La afirmación inversa se deduce de a).

8.190. La suma directa del matroide de Fano  $\Phi$  (problemas 8.20 y 8.177) y del matroide  $\Phi_1$  (problema 8.178) no es representable sobre ningún campo. Esto se deduce de la afirmación b) del problema 8.189.

8.194. La coordinatización de los matroides de nuestro problema sobre el campo  $F$  es equivalente al encaje de las configuraciones en consideración en un plano proyectivo de dimensión 2 sobre el campo  $F$ , en el que se cumplen los teoremas de Desargue y de Pappo (véase el capítulo 5, § 2 de [1]). Para nuestras configuraciones dichos teoremas no se cumplen, puesto que los puntos 7, 8, 9 en el primer caso y los puntos 8, 9, 10 en el segundo caso, no son colineales. Por consiguiente, los matroides de «no Pappo» y «no desarguean» no pueden ser representados sobre ningún campo.

8.195. Supongamos lo contrario. Admitamos que el matroide de Vamos  $M$  puede ser encajado en la geometría proyectiva de dimensión 3 sobre cierto campo  $F$ . Entonces la recta  $d_1d_2$ , que no es coplanar con  $b_1b_2c_1c_2$ , debe intersectarse con el plano  $b_1b_2c_1c_2$  en cierto punto  $e$ . Pero, por cuanto  $e \in b_1b_2d_1d_2 \cap c_1c_2d_1d_2$ , entonces  $e$  debe yacer en la intersección de las rectas  $b_1b_2$  y  $c_1c_2$ . Análogamente, la recta  $a_1a_2$  debe intersectarse con el plano  $b_1b_2c_1c_2$  en el punto  $e$ , mas en tal caso  $a_1, a_2, d_1$  y  $d_2$  son coplanares y esto contradice el hecho de que  $\{a_1, a_2, d_1, d_2\}$  es la base del matroide  $M$ .

8.196. Lazarson T. J. London Math. Soc., 1958, 33, 21—25.

8.197. Hágase uso de que  $2^9 - 1 = 1103 \cdot 2089 \cdot 233$ .

8.201. Whitney H. Ann. J. Math., 1935, 57, 509—533; Rado R. Proc. London Math. Soc., 1957, 7, 300—320; Minty G. J. J. Math. Mech., 1966, 15, 485—520; Bixby R. E. Discrete Math., 1974, 8, 139—145; Tutte W. T. J. Res.

Nat. Bur. Stand., 1965, 69 B, 1-47; Seymour P. D. J. London Math. Soc., 1976, 12, 356-360.

8.202. Fourmer J.—C. J. Comb. Theory, 1974, 16 B, 181-190.

8.203. Tutte W. T. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1965, 69B, 1-47.

8.204. Hágase uso de los problemas 8.173 y 8.203.

8.205-8.210. Lucas D. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 206, 247-279.

8.213. Seymour P. D. J. Comb. Theory, 1979, 26B, 159-173; Bixby R. E. J. Combin. Theory, 1979, 26B, 174-204.

8.216. Necesidad. Sea  $\varphi$  una coordinatización del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ . De las propiedades elementales de los determinantes se desprende inmediatamente la validez de las relaciones (a) y (b) para los paréntesis de la coordinatización  $\varphi$ . Para demostrar (c), notemos que la ecuación es trivial, si algún sumando en (c) no es igual a cero y, por lo tanto, si los conjuntos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  son bases del matroide  $M$ , o bien si para cierto  $i$  los conjuntos  $\{y_1, x_2, \dots, x_n\}$  y  $\{y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n\}$  son también bases del matroide  $M$ . En realidad podemos considerar que los primeros de ellos son bases. En efecto, si  $\{y_i, x_2, \dots, x_n\}$  y  $\{y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n\}$  son bases del matroide  $M$ , es fácil comprobar, haciendo uso de (b), que las sicigias del tipo (c) con el primer término  $[y_i, x_2, \dots, x_n]$  [ $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n$ ] son equivalentes a las sicigias con el primer término  $[x_1, \dots, x_n]$  [ $y_1, \dots, y_n$ ]. Empleemos ahora la aplicación lineal regular  $T: V \rightarrow V$ , que aplica  $\varphi(x_j)$  en el  $j$ -ésimo vector unitario  $e_j$  del espacio lineal  $V$  para cada  $j$ . Sea  $T(\varphi(y_j)) = w_j \in V$  y sea  $W$  una  $(n \times n)$ -matriz cuya  $j$ -ésima columna es igual a  $w_j$ , donde  $j = 1, 2, \dots, n$ . Al aplicar la transformación  $T$  para multiplicar el determinante en (c) por una misma constante, llegamos a que la relación (c) es equivalente a la siguiente:

$$\det E \cdot \det W = \sum_{i=1}^n \det(w_1, e_2, \dots, e_n) \det(w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, e_1, w_{i+1}, \dots, w_n) = \\ = \sum_{i=1}^n w_{1i} (-1)^{i-1} \det W_{1i},$$

donde  $W_{1i}$  es un menor de la submatriz de la matriz  $W$ , obtenido de  $W$  por exclusión de la primera fila y la  $i$ -ésima columna. Pero la ecuación (8.5') es simplemente un desarrollo de la matriz  $W$  respecto de la primera fila. Por cuanto  $T$  es una transformación invertible, las sicigias definidas por los paréntesis de la coordinatización  $\varphi$  satisfacen la relación (c).

**Suficiencia.** Supongamos que  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  es un elemento del campo  $F$ , definido para todos los  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ , y de este modo las sicigias dadas satisfacen las relaciones (a) — (c). Construyamos una coordinatización  $\varphi$ , para cuyos paréntesis se verificará la siguiente condición:

$$\det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)) = [x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (8.6')$$

Sea  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  una base del matroide  $M$  sobre el conjunto  $S$ . Entonces  $\{Y\} \neq \emptyset$  y podemos normalizar los valores de los paréntesis, al dividir cada uno de ellos por  $\{Y\}$ . Por cuanto las sicigias son homogéneas, las sicigias normalizadas satisfacen también las relaciones (a) — (c). Por eso podemos considerar que  $\{Y\} = 1$ . Definamos la  $i$ -ésima coordenada  $\varphi_i(x)$  del modo siguiente:

$$\varphi_i(x) = [y_1 y_2, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

y mostremos que  $\varphi: S \rightarrow F^n$  es una coordinatización del matroide  $M$ . Si demostramos que para la aplicación  $\varphi$  definida de este modo se verifica la relación (8.6'), la deducción de que  $\varphi$  es una coordinatización del matroide  $M$  se deducirá de la correlación (a) para las sicigias.

Sea  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una sucesión arbitraria tal que  $x_i \in S$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Puede considerarse que todos los elementos de la sucesión  $X$

son diferentes, por cuanto de lo contrario:  $[x_1, x_2, \dots, x_n] = \det(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))$ . Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  y  $k = |X \setminus Y|$ . Demostremos por inducción respecto de  $k$  que la relación (8.6') se cumple. Si  $k = 0$  ó a 1, entonces (8.6') tiene lugar por construcción. Supongamos que (8.6') se cumple para todo  $n < k$ , donde  $k \geq 2$ . Entonces, sirviéndonos de la suposición de inducción, tenemos:

$$[X][Y] = \sum_{i=1}^n [y_i, x_2, \dots, x_n][y_1, \dots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n \det(\varphi(y_i),$$

$\varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ )  $\det(\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_{i-1}), \varphi(x_1), \varphi(y_{i+1}), \dots, \varphi(y_n)) = \det(\varphi(X)) \det(\varphi(Y))$ , puesto que ya nos hemos convencido de que los determinantes satisfacen la correlación (c). Pero  $[Y] = \det(\varphi(y)) = 1$ , por consiguiente, queda demostrada (8.6'). Ahora podemos invertir la normalización, multiplicando la primera coordenada de cada vector  $\varphi(x)$  por el valor inicial  $[Y]$ . De este modo, la demostración está concluida.

8.217. Si  $\varphi$  es un isomorfismo de los matroides, los menores correspondientes deben ser isomorfos. Por cuanto las columnas de la matriz cuadrada  $N_1$  son vectores coordinatizadores de cierto menor del matroide  $M(R_1)$  (véase el problema 8.198), entonces han de ser dependientes cuando y sólo cuando lo mismo es válido también para  $N_2$ , o bien, lo que es equivalente, el determinante sobre el campo  $F_1$  de la matriz  $N_1$  es igual a 0 cuando y sólo cuando el determinante sobre el campo  $F_2$  de la matriz  $N_2$  es igual a cero.

Viceversa, demostremos que  $B$  es la base del matroide  $M(R_1)$  cuando y sólo cuando las columnas correspondientes de la matriz  $R_2$  forman una base del matroide  $M(R_2)$ . En otras palabras, mostremos que la  $(n \times n)$ -submatriz  $B$  de la matriz  $R_1$  es regular sobre el campo  $F_1$  cuando y sólo cuando la submatriz correspondiente de  $R_2$  es regular sobre el campo  $F_2$ . Para la submatriz  $B$  de la matriz  $A_1$  esto se deduce de la suposición del problema. Si  $B = B' \cup B''$ , donde  $B'$  es una submatriz de la matriz  $E_n$ , y  $B''$  una submatriz de la matriz  $A_1$ , entonces, al desarrollar el determinante de la matriz  $B$  respecto de las columnas de la submatriz  $B'$ , obtenemos que  $\det_{F_1} B = \pm \det_{F_1} N$ , donde  $N$  es una submatriz cuadrada de la matriz  $A_1$ . De aquí se deduce directamente la afirmación que se trataba de demostrar.

8.223. Las implicaciones (a)  $\Rightarrow$  (b) y (d)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (f) son evidentes, mientras que las (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (d) se desprenden del problema 8.216, donde los valores de los paréntesis 0 ó  $\pm 1$  del campo de números racionales se consideran como elementos del campo  $F$ . Por cuanto las relaciones para las cicigias son válidas sobre el campo de números racionales, serán válidas también respecto del módulo  $p$ , donde  $p$  es la característica del campo  $F$ . Para finalizar la demostración de la equivalencia de las afirmaciones del problema, mostremos que (f)  $\Rightarrow$  (a).

Sea  $R = (E_n, A)$  una matriz estándar de representación del matroide  $M$  sobre el campo  $F$ , cuya característica es distinta de 2. Hace falta mostrar que la matriz  $R$  puede transformarse en una matriz totalmente unimodular  $R'$ , multiplicando las filas y columnas correspondientes por los elementos no nulos del campo  $F$ . De aquí, en virtud del problema 8.179, se deducirá la afirmación (a). Debido al problema 8.217, si  $R' = (E_n, A')$  es una matriz estándar de representación del matroide  $M$  sobre el campo  $GF(2)$ , entonces  $a_{ij} \neq 0$  en la matriz  $R$  cuando y sólo cuando  $a'_{ij} \neq 1$  en la matriz  $R'$ . En otras palabras, la aplicación  $\varphi(a_{ij}) = a'_{ij}$  es tal que

$$\varphi(a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_{ij} = 0; \\ 1, & \text{si } a_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

transforma la matriz  $R$  en matriz estándar de representación  $R'$  del matroide  $M$  sobre el campo  $GF(2)$ . De aquí, en vigor del problema 8.217), para todas las submatrices cuadradas  $C$  de la matriz  $R$  y para sus  $\varphi$ -imágenes  $C'$  de la matriz  $R'$ , obtenemos  $\det_{F(2)} C = 0$  cuando y sólo cuando  $\det_{GF(2)} C' = 0$ . En particular,

si  $B$  es una submatriz cuadrada de orden 2 de la matriz  $A$ , cuyos elementos son todos distintos de 0, entonces  $\det_F B = 0$ , puesto que el determinante sobre el campo  $GF(2)$  de la submatriz  $B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  es igual a 0.

Sean  $a_1, \dots, a_k$  vectores filas de la matriz  $R$ . Supongamos que los elementos no nulos en  $a_1$  son  $a_{1i_1} = 1, a_{1i_2}, \dots, a_{1i_s}$ . Dividamos cada elemento de la  $i_j$ -ésima columna de la matriz  $R$  por  $a_{1i_j}$ , donde  $j = 2, \dots, s$ . De este modo, hagamos todos los elementos en el vector fila  $a_1$  iguales a 0 ó a 1.

Supongamos ahora que se ha logrado hacer todos los elementos en los vectores filas  $a_1, \dots, a_{k-1}$  iguales a 0 ó a  $\pm 1$ , multiplicando adecuadamente las filas y columnas, y que  $a_{hj_1}, \dots, a_{hj_t}$  son elementos no nulos del vector fila  $a_k$ . Hagamos que  $C_{j_e}$  sea un subconjunto de índices de las filas  $\{1, 2, \dots, k-1\}$  para los cuales los elementos  $a_{ije}$  en la  $j_e$ -ésima columna no son iguales a 0, es decir,  $i \in C_{j_e}$  cuando y sólo cuando  $a_{ije} \neq 0$ . Si  $i \in C_{j_e} \cap C_{j_m}$ , entonces en  $R$  existe una submatriz de la forma  $\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ a_{hj_e} & a_{hj_m} \end{pmatrix}$ . De donde, en virtud de la observación hecha más arriba, su determinante es igual a 0, o bien  $a_{hj_e} = a_{hj_m}$ . Por consiguiente, si multiplicamos las columnas  $j_e$  por  $a_{hj_e}^{-1}$  (elemento inverso de  $a_{hj_e}$  del campo  $F$ ), entonces el vector fila  $a_k$  contendrá sólo ceros y unidades, mientras que los vectores filas  $a_i$ , para  $i = 1, \dots, k-1$ , contienen 0,  $\pm 1$  y  $\pm f_l = 0$  en las columnas  $j_e$ , para las cuales  $i \in C_{j_e}$ . Multipliquemos ahora cada vector fila  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , que contiene al menos un  $f_l$  (es decir, las filas que tienen ceros no en todas las columnas de números  $j_1, \dots, j_t$ ), por  $f_l^{-1}$ . La nueva matriz obtenida tendrá la forma:

$$\begin{matrix} m \\ i \\ j \\ k \end{matrix} \begin{pmatrix} +1 & & \dots & \dots & \pm f_l^{-1} & \dots & \dots \\ 0 & \pm 1 & \dots & \dots & \pm f_l^{-1} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & j_1 & j_2 & \dots & j_t & & \end{pmatrix}$$

Las columnas  $j_1, \dots, j_t$  se hicieron tales como se requería. Esto significa que nuestro último paso consiste en multiplicar cada vector columna con índice  $s \notin \{j_1, \dots, j_t\}$  por ciertos  $f_m$ . En este caso debemos estar seguros de que si  $f_m^{-1}$  y  $f_l^{-1}$  pertenecen al vector columna  $s$ , entonces  $f_m = \pm f_l$ .

Si  $m, i \in C_{j_l}$  para cierto  $l$ , entonces tenemos una submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm f_m^{-1} \\ \pm 1 & \pm f_l^{-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} j_l \\ s \end{matrix}$$

De donde, en virtud de que el determinante de esta submatriz es igual a cero, tenemos  $f_m = \pm f_l$ . De lo contrario, si tal  $l$  no existe, se encontrará una submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \\ k \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \pm f_m^{-1} \\ 0 & \pm 1 & \pm f_l^{-1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ s \end{matrix}$$

que será degenerada, puesto que el determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

sobre el campo  $GF(2)$  es igual a 0. Del hecho de que la penúltima matriz es nula se deduce que  $f_m = \pm f_l$ .

Pero la columna  $s$  puede contener, además, los elementos  $\pm 1$  de la fila, digamos,  $a_j$ , la cual tiene sólo ceros en las columnas  $j_1, \dots, j_t$ . En este caso

multipliquemos primero  $a_j$  por  $f_m^{-1}$ , si  $\pm f_m^{-1}$  se encuentra en la intersección de la  $j$ -ésima fila y  $s$ -ésima columna. Por consiguiente, resta por demostrar que si  $a_j$  tiene  $\pm 1$  en las columnas  $s, s' \in \{j_1, \dots, j_t\}$ , entonces  $f_m = \pm f_l$ , donde  $f_m^{-1}$  es un elemento en la  $s$ -ésima columna distinto de 0 y  $\pm 1$ , y  $f_l^{-1}$  es un elemento en la  $s'$ -ésima columna. Esto es factible sólo cuando  $f_m^{-1}$  y  $f_l^{-1}$  están situados ambos o en la columna  $s$ , o bien en la columna  $s'$ . En efecto, supongamos que esto no es así. Entonces, si  $m, i \in C_{j_1}$ , tenemos una submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \\ j \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & f_m^{-1} & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm f_l^{-1} \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

$j_1 \quad s \quad s'$

que es degenerada, puesto que el determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  sobre

el campo  $GF(2)$  es igual a 0 y, por lo tanto,  $f_m = \pm f_l$ .

Si  $m, i \notin C_{j_1}$ , entonces la submatriz

$$\begin{matrix} m \\ i \\ j \\ k \end{matrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \pm f_m^{-1} & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \pm f_l^{-1} \\ 0 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es también degenerada, por cuanto el determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sobre el campo  $GF(2)$  es igual a 0, y, por lo tanto,  $f_m = \pm f_l$ .

Demostremos por fin que  $R' = (E_n, A')$ , considerada como matriz con coeficientes enteros, es totalmente unimodular. Como ya se ha observado más arriba, la matriz  $R'$  no puede contener submatrices cuadradas de segundo orden, cuyos coeficientes son distintos de 0. De aquí, en particular, tenemos que  $R'$  no contiene submatrices cuadradas de segundo orden, cuyos coeficientes son distintos de 0, y entre ellos hay exactamente uno que es igual a 1 ó a  $-1$ . Designemos este hecho por (\*). Sea  $M = (m_{ij})$  una  $(k \times k)$ -submatriz arbitraria de la matriz  $R'$  tal que su determinante sobre el campo de números racionales no sea igual a 0 y  $m_{11} \neq 0$ . Entonces, realizando las transformaciones elementales, reducimos la matriz  $M$  a la  $M'$  de la forma siguiente  $\begin{pmatrix} m_{11} & N \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ . Notemos que  $\det M_1 = \pm \det M$ . En virtud de (\*) todos los elementos en  $M_1$  son iguales a 0 ó a  $\pm 1$ , de lo contrario la matriz  $M$  tendría una submatriz  $\begin{pmatrix} m_{11} & 1 \\ -m_{11} & 1 \end{pmatrix}$  o  $\begin{pmatrix} m_{11} & -1 \\ -m_{11} & -1 \end{pmatrix}$ , lo que es imposible.

Para la matriz  $M_1$  la condición (\*) es también válida. En efecto, si  $B_1 = \begin{pmatrix} m_{1j} & m_{1h} \\ m_{ij} & m_{ih} \end{pmatrix}$  es una submatriz de la matriz  $M_1$ , para la cual no se cumple

la condición (\*), entonces para la submatriz  $B = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{1j} & m_{1h} \\ 0 & m_{ij} & m_{ih} \\ 0 & m_{ij} & m_{ih} \end{pmatrix}$  de la

matriz  $M$  tendremos  $\det B = m_{11} \cdot \det B_1 = \pm 2$ , es decir, el determinante de la matriz  $B$  sobre el campo  $F$  no es igual a 0, y sobre el campo  $GF(2)$ , sí lo es. Mas esto contradice el problema 8.217. Por consiguiente,  $M_1$  también satisface la condición (\*).

Elijamos ahora un elemento no nulo en la primera columna de la matriz  $M_1$ , y hagamos iguales a 0 los demás elementos de la citada columna con ayuda

de las transformaciones elementales. La obtenida matriz nueva  $M_2$  tiene también por elementos suyos 0 y 1, así como satisface la condición (\*). Realizados  $k$  pasos, llegaremos a que el determinante de la matriz  $M$  sobre el campo de números racionales es igual a  $\pm 1$ . De este modo, todos los menores distintos de cero de la matriz  $R'$  son iguales a  $\pm 1$ , y la matriz  $R'$  es totalmente unimodular.

8.224. De acuerdo con la fórmula de Binet-Cauchy para los determinantes, tenemos

$$\det A \cdot A^T \sum (\det B)^2,$$

donde la suma se toma respecto de todas las  $(n \times n)$ -submatrices  $B$  de la matriz  $A$ . Por hipótesis del problema,  $(\det B)^2$  es igual a 0 ó a 1, con la particularidad de que  $(\det B)^2 = 1$  cuando y sólo cuando las columnas de la matriz  $B$  corresponden a la base del matroide  $M$ . Es fácil ver que la matriz de representación del matroide en la fig. 8.10 tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y es localmente unimodular. De que

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se deduce que el número de bases en el matroide  $M$  es igual a  $\det A \cdot A^T = 21$ .

8.225. Este admirable resultado fue obtenido por Tutte (véase Tutte W.T. Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, 144—174; Seymour P. D. J. Comb. Theory, 1979, 26 B, 159—173).

8.230. Brylawski T. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 203, 1—44.

8.231. Esta caracterización constructiva de los matroides unimodulares ha sido empleada para desarrollar algoritmos polinomiales que ayudan a determinar si una matriz es totalmente unimodular, lo que es de gran importancia para los problemas de optimización de números enteros. Seymour P. D. J. Comb. Theory, 1980, 28 B, 305—360.

8.232. Tutte W. T. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 90, 527—552.

8.234. El diagrama refleja correctamente las relaciones entre las clases de matroides. Al punto  $x$  se le puede poner en correspondencia, por ejemplo, el matroide  $R_{10}$ ; al punto  $y$ , el matroide de Fano  $\Phi$ ; a  $z$ , el matroide homogéneo  $U_{2,4}$ ; a  $u$ , un matroide cíclico del grafo  $K_5$  o  $K_{3,3}$ ; a  $v$ , un matroide de cortes del grafo completo  $K_5$  o  $K_{3,3}$ ; a  $w$ , el matroide de Vamos, el «no de Pappos» o el «no desarguesana».

8.239. Brualdi R. A., Dinolt G. W. J. Comb. Theory, 1972, 12, 268—286.

8.241. Brualdi R. A., Dinolt G. W. J. Comb. Theory, 1972, 12, 268—286.

8.243. Perfect H. J. Math. Analysis Appl., 1968, 96—111; Ingleton A. W.,

Piff M. J. J. Comb. Theory, 1973, 15, 51—68.

8.245. La afirmación inversa no es cierta, puesto que el matroide cíclico del grafo en la fig. 8.2 está ordenado por la base, pero no transversal.

## § 4. Problemas mixtos en los matroides

8.251—8.254. Hausmann D., Korte B. — in "Spe. Top. Appl. Math. Funct. Anal. Numer. Anal. and Optimiz. Proc. Semin., Bonn, 1979". Amsterdam e. a. 1980, 196—211.

8.256—8.259. Minty G. J. J. Math. and Mech., 1966, 15, 485—520.

8.260. Representétese  $P(M; \lambda)$  en forma de la suma

$$\sum_{A \subseteq S \setminus e} (-1)^{|A|} \lambda^{r(S) - r(A)} + \sum_{e \in A \subset S} (-1)^{|A|} \lambda^{r(S) - r(A)}$$

y hágase uso de las correlaciones para las funciones de rango.

8.261. La hipótesis del problema es equivalente al hecho de que no se pueden colorar de forma regular los vértices de un grafo que contenga por lo menos un bucle.

8.263. a)  $P(\Phi; \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$ ;

b)  $P(M; \lambda) = \prod_{\tau=0}^r (\lambda - q\tau)$ ;

c)  $P(M; \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1)$ ;

d)  $P(U_{2,4}; \lambda) = \lambda^2 - n\lambda + (n - 1)$ ,  $n \geq 2$ .

8.264.  $\chi(\Phi) = 5$ .

8.274. Las relaciones a) — c) se obtienen por cálculo directo. Hágase uso del resultado del problema 8.272 para demostrar la relación f).

8.275. Este notable hecho fue demostrado por primera vez por T. Brylawski [Brylawski T. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, No 171, p. 235—282].

8.281. El método de demostración consiste en mostrar que cualquier grafo  $G$  sin puentes puede representarse como una unión de tres grafos eulerianos  $G_1, G_2, G_3$  y esto es equivalente, como es fácil de ver, a que  $G$  tiene el  $(Z_2 \times Z_2 \times Z_2)$  — flujo [Jaeger F. — Fifth British Comb. Conf., 1976, p. 373—379].

8.282. Se puede mostrar que  $P(M^*(P_{10}); \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \times (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda^2 - 5\lambda + 10)$ . De aquí, en virtud del problema 8.280,  $P_{10}$  no tiene el 4-flujo.

8.283. Es una hipótesis abierta de Tutte. Si se demuestra, el grafo de Peterson se hace, en virtud del problema 8.282, grafo mínimo, para el cual no existen los  $n$ -flujos cuando  $n < 5$ .

8.284. Es una hipótesis abierta de Tutte conocida en la literatura como versión fuerte de la hipótesis de Tutte sobre el 4-flujo (Tutte W.T. — In: Combinatorial Math. and it's applications. Univ. of North Carolina, 1969, p. 553—564).

## BIBLIOGRAFÍA

1. K. A. Ribnikov. Análisis combinatorio. Editorial Mir. Moscú, 1988.
2. G. Birkhoff, T. Vartec, Modern applied algebra. New York, 1970.
3. И. Я. Виленин. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969  
(N. Ya. Vilenkin. Combinatoria.)
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977  
(G. P. Gavrilov, A. A. Sapozhenko. Problemas de las matemáticas discretas.)
5. A. Kaufmann. Introduction a la combinatorique en vue des applications. Paris, Dunod, 1968.
6. G. J. Ryser. Combinatorial Mathematics. New York, 1963.
7. J. Riordan. An introduction to combinatorial analysis. Wiley, New York, 1958.
8. G. Birkhoff. Lattice Theory. Providence, Rhode Island, 1967.
9. В. И. Сачков. Комбинаторные проблемы дискретной математики. — М.: Наука, 1977  
(V. N. Sachkov. Problemas combinatorios de las matemáticas discretas.)
10. Л. А. Скормяков. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982  
(L. A. Skorniakov. Elementos de la teoría de estructuras.)
11. R. Wilson. Introduction to graph theory. Oliver and Boyd Edinburgh, 1972.
12. F. Harary. Graph Theory. Addison — Wesley Publishing Company. 1969.
13. F. Harary, E. Palmer. Graphical enumeration. New York, Academic Press, 1973.
14. M. Hall. Combinatorial Theory. Blaisdell Publ. Company. Waltham, Toronto, 1967.
15. P. Erdős, J. Spencer. Probabilistic methods in combinatorics. Budapest, Akademiai Kiado, 1974.
16. Denes J., Keedwell A. D. Latin squares and their applications. Budapest, Akademiai Kiado, 1974.
17. Lovász L. Combinatorial problems and exercises. Budapest, Akademiai Kiado, 1979.
18. M. Aigner. Combinatorial Theory. Berlin, Springer — Verlag, 1979.
19. O. Ore. Theory of graphs. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1962.
20. L. Ford, D. Fulkerson. Flows in networks. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1962.
21. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, Н. К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981  
(V. A. Emelichev, M. M. Kovalev, N. K. Kravtsov. Poliedros, grafos, optimización.)
22. M. Swamy, K. Thulasiraman. Graphs, Networks and Algorithms. John Wiley & Sons, Inc., 1981.
23. А. А. Зыков. Теория конечных графов. — М.: Наука, 1969  
(A. A. Zykov. Teoría de los grafos finitos.)
24. L. Mirsky. Transversal theory. New-York, 1971.



25. L. Lovász, M. Plummer. *Matching Theory*. Budapest, Akademiai Kiado, 1986.
26. G. Grätzer. *General lattice theory*. Akademie — Verlag, Berlin, 1978.
27. J. Riordan. *Combinatorial Identities*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1968.
28. G. Andrews. *The Theory of partitions*. Addison—Wesley Publ. Comp., Ins., 1976.
29. D. Welsh. *Matroid theory*, New York, Academic Press, 1976.
30. B. Bollobas. *Extremal Graph Theory*. London, Academic Press, 1978.
31. R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer. *Ramsey Theory*. New York, Wiley, 1980.
32. H. Minc. *Permanents*. Addison — Wesley Publ. Comp., Inc., 1978.
33. В. Н. Сачков. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978  
(V. N. Sachkov. Métodos probabilísticos en el análisis combinatorio.)
34. В. Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982  
(V. N. Sachkov. Introducción a los métodos combinatorios de las matemáticas discretas.)
35. В. И. Баранов, Б. С. Стечкин. Экстремальные комбинаторные задачи и их применение. М.: Наука, 1988  
(V. I. Baránov, B. S. Stechkin. Problemas combinatorios extremos y su aplicación.)
36. В. Е. Тараканов. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. М.: Наука, 1985 (V. E. Tarakánov. Problemas combinatorios y (0,1)-matrices.)
37. R. Graham. *Rudiments of Ramsey Theory*. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1981.
38. F. Kerteszi. *Introduction to finite geometry*. Budapest, Akademiai Kiado, 1976.
39. N. Christofides. *Graph Theory. An algorithmic approach*. New York, Academic Press, 1975.
40. R. Randow. *Introduction to the theory of matroids*. — Lect. Notes in Econ. and Math. Syst., 1975, v. 109.
41. E. Minieka. *Optimization algorithms for networks and graphs*. Marcel Dekker, Inc., New-York, 1978.
42. Ch. Papadimitrion, K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity*. Prentice Hall, New Jersey, 1982.
43. E. Lawler. *Optimization: networks and matroids*. New York, 1976.
44. V. Bryant, H. Perfect. *Independence theory in combinatorics*. London, Chapman and Hall, 1980.
45. J. Kung. *A source book in matroid theory*. Boston. Birkhäuser, 1986.
46. *Classic Papers in Combinatorics* (Ed. by I. Gessel, G—C. Rota) Boston, Birkhäuser, 1987.
47. *Theory of matroids* (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1986.
48. *Combinatorial geometries* (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987.
49. *Combinatorial geometries: Advanced Theory* (ed. by N. White). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1988.
50. A. Reeski. *Matroid theory and it's applications*. Budapest, Akademiai Kiado, 1988.

## INDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

- Algebra de incidencia 144  
 Algoritmo ávido 168  
   — polinomial 203  
 Altura de un vértice 90  
 Análogo de vértice del teorema de Menger 126  
   — matricial del teorema de König 126  
 Anchura de un conjunto parcialmente ordenado 120  
 Anticadena 101  
 Aplicación débil 185  
   — fuerte 182  
   — isótoma 118  
   — simple 186  
   — — conservadora de rango 186  
 Árbol 77  
   — radical 77  
 Arco de un plano proyectivo 93  
 Arista de un grafo 75  
   — múltiple 75  
 Átomo 120  
 Automorfismo de un conjunto parcialmente ordenado 44  
   — — — cuadrado latino 56  
  
 Base de un matroide 158  
 Belliano 122, 130  
 Bloque-esquema 67  
   — incompleto equilibrado (BIB-esquema) 68  
   — parcialmente equilibrado con  $m$  tipos de conexiones (PBIB( $m$ )-esquema) 68  
   — simétrico 69  
 Booleano 121  
 Bosque 77  
 Bucle (lazo) de un matroide 171  
  
 Cadena 78, 119  
   — hamiltoniana 76  
   — máxima 119  
   — puntual 139  
   — saturada 119  
   — simple 76  
 Capacidad de un arco 124  
 Cápsula convexa de los puntos 71  
 Ciclo de un matroide 158  
   — euleriano 76  
   — fundamental 164  
 Clique de un grafo 76  
 Cociclo de un matroide 174  
 Cociente de un matroide (cociente inglés) 184  
  
 Coeficiente binomial de Gauss 152  
 Colineación 95  
 Combinación afin 160  
   — de pares 99, 125  
   — lineal de vectores 159  
 Complemento de un elemento 136  
   — — — grafo 77  
   — relativo de un elemento 137  
 Componente de conexión 76  
 Condición de recubrimiento 133  
   — reforzada de Hordan-Hölder 138  
 Cónica (curva de segundo orden) 92, 97  
 Conjunto bien ordenado 123  
   — característico de un matroide 195  
   — dependiente de manera afin 160  
   — de vértices (A, B)-separador 125  
   — engendrador de un matroide 167  
   — independiente de manera afin 160  
   — parcialmente ordenado 44, 118  
   — — — totalmente finito 120  
   — transitivo 39  
 Constantes geométricas extremales 115  
 Convolución de sucesiones 23  
 Coordinatización 187  
 Corte de una red 124  
 Cota superior exacta 128  
   — inferior exacta 128  
 Cuadrado latino 56  
 Cubo de Boole 81  
 Curva hiperbólica 93  
   — parabólica 93  
   — elíptica 94  
  
 Desigualdad de Yamamoto-Lubel-Meshalkin 121  
 Diagrama de Hasse 119  
 Diamante 131  
 Dimensión de un grafo 75  
 Distancia entre vértices 83  
 Distribución de los vértices de un grafo en grados 76  
  
 Ecuación de Polya 89  
 Elemento máximo 118  
   — mínimo 118  
 Elementos de un bloque-esquema 67  
 Elevador (lift) de un matroide 184  
 Epiformismo 82  
 Esqueleto 77  
 Esquema resoluble 60  
 Estructura de incidencia 141

- Factor de un matroide 184  
 Filtro modular 181  
 Flat (superficie) 166  
 Flujo estacionario de una magnitud 124  
 Fórmula de Cayley (primera) 87  
 — — Clark (tercera)  
 — — inversión de Moebius 147  
 — — Meir-Moon 90  
 — — Renyi 87  
 — — Waring 27  
 — — Weisner 150  
 Fuente 124  
 Función de corraño 174  
 — — incidencia 143  
 — — Kronecker 145  
 — — Moebius 145  
 — — rango 133  
 — generatriz 23  
 — modular 155  
 — submodular 155  
 Geometría asociada a un matroide 187  
 — combinatoria (geometría) 166  
 — de Wille 171  
 — proyectiva 142  
 Grado de un vértice 76, 99  
 Grafo 75  
 — bipartido 76, 125  
 — — completo 76  
 — completo 76  
 — de entrelazamiento 61  
 — — Peterson 207  
 — finito 75  
 — isomorfo 77  
 — monocromático 50  
 — no orientado 75  
 — orientado 75  
 — simple 75  
 Hammoide 201  
 — rígido 201  
 Hiperarista 98  
 Hipergrafo 98  
 — dual 101  
 Hiperplano 167  
 Hipótesis de Berge 108  
 — — Dirac 100  
 — — Erdős-Sos 101  
 Homomorfismo de un retículo 131  
 Identidades de Morgan 137  
 Incremento de un matroide 182  
 — libre de un matroide 182  
 Índice cíclico de un grupo 39  
 Infimo 128  
 Intervalo 120  
 Intervalos transpuestos 138  
 Invariante 205  
 — de Tutte-Grothendiek 205  
 Inventario de un conjunto 43  
 Inversión de Moebius 143  
 Involutividad 139  
 Lema de Bernsaid 42  
 Longitud de una cadena 101, 121  
 Matroide 158  
 — afin 160  
 — cíclico 164  
 — cográfico 172  
 — conexo 174  
 — de Fano 162  
 — — los cortes 172  
 — — recubrimiento 170  
 — — Vamos 162  
 — dual 174  
 — gráfico 164  
 — homogéneo 159  
 — ordenado por bases 201  
 — orientable 194  
 — transversal 168  
 — unimodular 187  
 — vectorial 160  
 Menor de un matroide 177  
 Método de división en sucesiones de Morgan 26  
 — de inclusión y exclusión 45  
 Métodos geométricos 75  
 — lógicos 45  
 Multigrafo 75  
 Número de Bell 30  
 — — Galois 152  
 — — Stirling 33, 36, 154  
 — pentagonal 16  
 Oráculo 202  
 — polinomialmente reducible 203  
 Orden de un plano 92  
 Operador de clausura 131  
 Par comparable de elementos 118  
 Paréntesis de una coordinatización 195  
 Partición 14  
 Particiones ordenadas 109  
 — ortogonales 81  
 Pentágono (diamante) 131  
 Permanente de una matriz 52  
 Peso de la clase de equivalencia 39  
 — — un conjunto 168  
 — — elemento 168  
 Plano de Galois 95  
 — finito 92  
 — proyectivo de Desargue 92  
 Polinomio característico de un conjunto parcialmente ordenado 152  
 — cromático 205  
 — — de un grafo 152  
 — — Bell 30

- Polinomio característico Stirling 33  
 — — Tutte 206  
 Pregeometría 181  
 Principio de alojamiento completo 111  
 — — Dirichlet 109  
 — — los cajones 110  
 Problema de empaques 104  
 — — Erdős-Katona 105  
 — — Turán 104  
 — — van der Waerden 71  
 Problemas enumerativos en los grafos 85  
 — extremales 108  
 Producto directo de conjuntos parcialmente ordenados 121  
 — — — grupos 41  
 — — — las matrices 52  
 — — — retículos 130  
  
 Rango de un subconjunto 140  
 — lineal de un conjunto 187  
 Recta externa 93  
 — impropia 93  
 — ordinaria 93  
 Rectángulo latino 56  
 Relación de incidencia 142  
 — — orden 118  
 Representación de Cayley 40  
 — — un matroide 168  
 Retículo 128  
 — con complementos 136  
 — completo 130  
 — de Boole 138  
 — desarrollable 141  
 — geométrico 139  
 — modular 132  
 — semimodular 133  
 Retículos isomorfos 131  
  
 Salida 124  
 Separadores de un matroide 179  
 Símplice 71  
  
 Sicigia 195  
 Sistema de conjuntos 98  
 — — grupos de pares 62  
 — — representantes de los conjuntos 48  
 — — ternas de Kirkman 61  
 — — — Steiner 60  
 Sombra 103  
 Subgeometría 176  
 Subgrafo 75  
 — de esqueleto 77  
 Subplano baeriano 95  
 Subpregeometría 181  
 Superficie 166  
 Suposición de Erdős-Frankl  
 Supremo 128  
  
 Tangente 93  
 Teorema de Crapo 148  
 — — Desargue 92  
 — — desarrollo 185  
 — — Dilworth 123  
 — — Hall 48  
 — — Ramsey 50  
 — — Rota 148  
 — — Singer 96  
 — — Stanley 146  
 — — Tutte 193  
 — sobre el flujo 124  
 Teoría de Polya 39, 40  
 Transformación proyectiva 95  
 Transversal 125  
 — parcial 167  
 Traza de una matriz 53  
 Truncamiento de un matroide 184  
  
 Unión de los grafos 77  
  
 Vector índice de un grupo de pares 62  
 Vertedero 124  
 Vértice de un grafo 75  
 Vértices A-conexos 172